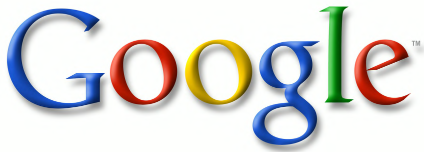




M.E.Vaschenko-Zaharchenko

ALGEBRAIC ANALYSIS
or
HIGHER ALGEBRA

1887

Russian

АЛГЕБРАИЧЕСКІЙ АНАЛИЗЪ

или

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА.

сочиненіе

М. Е. Ващенко-Захарченко,

Сверхштатнаго Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета
Св. Владиміра.



КІЕВЪ.
Въ Типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра.
1887.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго университета св. Владиміра, 1 августа 1887 года.

Ректоръ *Н. Ренненкампфъ*.

Продается въ книжныхъ магазинахъ Н. Я. Оглоблина:

Кіевъ, Крещатикъ, № 33. | С.-Петербургъ, Малая Садовая, № 4.

Предисловіе.

Алгебраическій анализъ или высшая алгебра—это два различныя названія одной и той же части математическихъ наукъ, той части, которая занимается изслѣдованіемъ свойствъ раціональныхъ и ирраціональныхъ функцій. Ирраціональныя функціи дѣлятся на два отдѣла: на радикальныя и ирраціональныя собственно. Эти послѣднія суть функціи (корни), удовлетворяющія раціональнымъ уравненіямъ, корни коихъ не могутъ быть выражены извѣстнымъ совокупленіемъ радикаловъ. Раціональныя и ирраціональныя функціи суть обратны между собою, первыя даны всегда въ явной формѣ, а о свойствахъ послѣднихъ выводятся заключенія изъ первыхъ.—Эти функціи и составляютъ предметъ изслѣдованій высшей алгебры. Предлагаемый нынѣ трудъ, пополненныя лекціи, читанныя мною въ университетѣ св. Владиміра съ 1865 г. по 1887 годъ, содержитъ въ полномъ объемѣ Высшую алгебру, за исключеніемъ теоріи перестановленій и приложенія ея къ изслѣдованію буквенныхъ уравненій. Эта послѣдняя часть высшей алгебры, которая не была затронута въ моихъ лекціяхъ, выйдетъ въ непродолжительномъ времени, чтобы пополнить настоящій трудъ, въ которомъ содержатся самыя новѣйшія изслѣдованія геометровъ въ этой области. При составленіи настоящаго курса я пользовался слѣдующими сочиненіями:

Остроградскій. Лекціи алгебраическаго и трансцендентнаго анализа. С-Петербургъ. 1837. in-8.

Serret. Cours d'algèbre supérieure. Paris. 1866. in-8.

Jordan. Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris. 1870. in-4.

Legendre. Théorie des nombres. Paris. 1830. in-4.

Matthiessen. Grundzuge der antiken und modernen Algebre. Leipzig. 1878. in-8.

Fidler. Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binaren formen. Leipzig. 1860. in-8.

Bachmann. Die Lehre von der Kreistheilung. Leipzig. 1872. in-8.
Dedekind. Vorlesungen über Zalentheorie. Braunschweig. 1871. in-8.
Salmon. Modern higher algebra. Dublin. 1866. in-8.
Burnside. The theory of equations. Dublin. 1881. in-7.
Todhunter. Theory of equations. London. 1861. in-8.
Brioschi. Theorie des determinants traduit de l'italien par Combescure. Paris. 1856. in-8.
Netto. Teoria delle sostituzioni versione dal tedeseo per Battaglini. Torino. 1883. in-8.

Въ заключеніе считаю долгомъ поблагодарить Совѣтъ Императорскаго университета св. Владиміра за пособіе, оказанное при напечатаніи настоящаго сочиненія.

М. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ, августъ 1887 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЙ АНАЛИЗЪ.

Глава V.

Глава VI.

Глава VII.

Глава VIII.

Глава IX.

Глава X.

Глава XI.

Глава XII.

Глава XIII.

Глава XIV.

Глава XV.

Глава XVI.

Глава XVII.

Глава XVIII.

Глава XIX.

Глава XX.

Алгебраическій анализъ.

ГЛАВА I.

Общіе законы количествъ.

§ 1. Первый количественный матеріалъ алгебры составляетъ рядъ натуральныхъ чиселъ:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ldots. \qquad (1)$$

который получается прибавленіемъ къ взятой единицѣ другой такой же, къ полученному результату третьей и т. д. до безконечности, такъ какъ подобное прибавленіе не имѣетъ предѣла. Слѣдовательно рядъ натуральныхъ чиселъ безконеченъ. Безконечность, т. е. число *большее всякаго даннаго числа*, въ алгебрѣ изображаютъ символомъ ∞.

Въ алгебрѣ извѣстное число единицъ, но неопредѣленное, т. е. вообще собраніе единицъ, обозначаютъ буквами a, b, c,.. α, β, γ,... Такое собраніе единицъ называютъ *количествомъ*, говорятъ, напримѣръ, количество a, количество b и т. д. Если же количество неизвѣстно, и требуется опредѣлить его по извѣстнымъ условіямъ, то такія количества обозначаютъ буквами x, y, z, . . , ξ, η, ζ, . . .

§ 2. *Сложеніе.* Первое основное и самое простое дѣйствіе въ алгебрѣ есть прибавленіе къ a единицамъ, взятымъ изъ ряда (1), b единицъ того же ряда. Такое дѣйствіе обозначаютъ символомъ:

$$a+b \qquad (2)$$

знакъ $+$ носитъ названіе *плюсъ*. Очевидно, результатъ подобнаго дѣйствія есть нѣкоторое число c, изъ того же ряда (1). Что число c есть результатъ дѣйствія (2) обозначаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$a+b=c \qquad (3)$$

знакъ $=$ обозначаетъ *равенство*.

Количества a и b называются *слагаемыми*, результатъ c — *суммою*, а само дѣйствіе *сложеніемъ*.

Всѣ слѣдующія дѣйствія надъ количествами суть только преобразованія этого послѣдняго. Изъ него вытекаютъ всѣ тѣ разнообразныя дѣйствія надъ количествами, которыя въ анализѣ носятъ названіе *функцій*.

Законъ перестановительный. Такъ какъ прибавить къ a единицамъ b единицъ все равно, что прибавить къ b единицамъ a единицъ, то мы имѣемъ:

$$a + b \equiv b + a \tag{4}$$

это законъ *перестановительный*, а выраженіе (4) есть *тождество*, т. е. одна и та же количественная мысль выражается двумя способами въ силу *перваго основнаго закона* (4).

Сложеніе есть дѣйствіе прямое и всегда возможное, т. е. всегда въ ряду (1) находится число c, которое есть сумма двухъ данныхъ чиселъ a и b взятыхъ изъ того же ряда.

Изъ опредѣленія суммы слѣдуетъ, что c всегда больше каждаго изъ слагаемыхъ a и b. Это неравенство выражается символомъ:

$$c > a \quad \text{и} \quad c > b \tag{5}$$

§ 3. *Умноженіе.* Второе прямое дѣйствіе есть умноженіе, когда одно и то же число изъ ряда (1) слагается нѣсколько разъ: два, три, четыре и т. д. раза

$$a \quad , \quad a + a \quad , \quad a + a + a \quad , \quad a + a + a + a \ , \ldots$$

что для сокращенія пишутъ такъ:

$$1a \quad , \quad 2a \quad , \quad 3a \quad , \quad 4a \quad , \ . \ . \ . \quad , \quad na \tag{6}$$

Результатъ такого сложенія называется *произведеніемъ*. Число, показывающее сколько разъ другое сложено, называется *множителемъ*. Въ рядѣ (6) числа $1, 2, 3, \ldots, n$ суть множители, они всегда ставятся передъ слагаемымъ числомъ и носятъ также названіе *коэфиціентовъ*. Если результатъ сложенія числа b a разъ назовемъ c, то это напишется такъ:

$$a.b = c \quad \text{или} \quad ab = c \tag{7}$$

Умноженіе есть дѣйствіе всегда возможное, такъ какъ оно есть сложеніе, т. е. по даннымъ числамъ a и b изъ ряда (1), одно какъ множитель, другое какъ множимое, произведеніе c будетъ всегда число находящееся въ томъ же ряду.

Изъ опредѣленія умноженія слѣдуетъ, что

$$c > a \quad \text{и} \quad c > b \tag{8}$$

Законъ перестановительный въ умноженіи. Такъ какъ въ произведеніи ab число b состоитъ изъ b единицъ, и каждая его единица взята a разъ, то мы имѣемъ:

$$ab \equiv ba \tag{9}$$

это есть законъ перестановительный въ умноженіи.

Законъ распредѣлительный. Если два числа a и b изъ ряда (1) сложены и сумма умножена на число n, то это пишутъ такъ:

$$n(a+b)$$

но складывая $a+b$ n разъ, каждое изъ чиселъ a и b будетъ сложено n разъ, слѣдовательно предъидущее выраженіе можно написать еще въ формѣ:

$$na+nb$$

т. е. мы имѣемъ:

$$n(a+b) \equiv na+nb \tag{10}$$

этимъ тождествомъ выражается второй основной законъ алгебраическихъ количествъ, который называется *закономъ распредѣлительнымъ*, такъ какъ множитель n распредѣляется по слагаемымъ a и b.

§ 4. *Возвышеніе въ степень.* Третье прямое дѣйствіе есть возвышеніе въ степень, когда взятое число a изъ ряда (1) множится само на себя: два, три, четыре и т. д. раза:

$$a \;,\; aa \;,\; aaa \;,\; aaaa \;,\; aaaaa \;,\; \ldots$$

эти выраженія пишутся такъ:

$$a^1 \;,\; a^2 \;,\; a^3 \;,\; a^4 \;,\; a^5 \;,\; a^6 \;,\; \ldots \;,\; a^n$$

гдѣ числа 1, 2, 3, 4, ... n показываютъ сколько разъ число a умножено само на себя. Числа эти называются *показателями* или *экспонентами*. Результатъ дѣйствія называется *степенью*.

Дѣйствіе возвышенія всегда возможно; каждая степень произвольно взятаго числа изъ ряда (1), находится всегда въ томъ же ряду, такъ какъ возвышеніе есть преобразованное сложеніе. Если результатъ возвышенія числа a въ n степень означимъ чрезъ b, то будемъ имѣть:

$$a^n = b$$

Законъ повторительный. Изъ опредѣленія показателей слѣдуетъ, что:

$$a^n a^m \equiv a^{n+m} \qquad (12)$$

этимъ тождествомъ и выражается третій основной законъ алгебры—законъ *повторительный.*

Три основные закона, выраженные тождествами:

$$1. \qquad a+b \equiv b+a \quad , \quad ab \equiv ba$$

$$2. \qquad n(a+b) \equiv na+nb \qquad (13)$$

$$3. \qquad a^n . a^m \equiv a^{n+m}$$

служатъ основаніемъ всѣхъ алгебраическихъ преобразованій одного выраженія въ другое, такими преобразованіями выражаются свойства принадлежащія всѣмъ числамъ ряда (1).

Возьмемъ для примѣра:

$$(a+b)(c+d)$$

по второму закону мы имѣемъ:

$$(a+b)c+(a+b)d$$

по первому:

$$c(a+b)+d(a+b)$$

опять по второму:

$$ca+cb+da+db$$

слѣдовательно мы имѣемъ:

$$(a+b)(c+d) \equiv (a+b)c+(a+b)d \equiv ac+bc+ad+bd$$

Всѣ три предъидущія выраженія представляютъ одну и туже количественную мысль въ различныхъ формахъ.

Возьмемъ еще примѣръ:

$$(a+b)(a+b) \equiv (a+b)^2$$

По второму закону мы имѣемъ:

$$(a+b)^2 \equiv (a+b)a+(a+b)b$$

По первому:

$$(a+b)^2 \equiv a(a+b)+b(a+b)$$

По второму также:

$$(a+b)^2 \equiv aa + ab + ba + bb$$

или по первому закону и по третьему:

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + ab + ab + b^2$$

или наконецъ:

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

Изъ этихъ простыхъ примѣровъ видимъ, какъ съ помощью трехъ основныхъ законовъ преобразуется одна и та же количественная мысль въ различныя формы.

Алгебраическія изслѣдованія и доказательства теоремъ состоятъ въ томъ, что выбираютъ ту изъ формъ количественной мысли, которая удобнѣе комбинируется съ другими выраженіями.

§ 5. Три прямыя дѣйствія: *сложеніе*, *умноженіе* и *возвышеніе въ степень* имѣютъ *обратныя*, когда по данному результату прямаго дѣйствія и одному изъ дѣйствующихъ количественныхъ символовъ требуется отыскать другой. Изъ этого видимъ, что прямое дѣйствіе есть *опредѣленіе*, а обратное—*вопросъ*, на который иногда можно, а иногда и нельзя дать отвѣта.

Вычитаніе. Первое обратное дѣйствіе есть *вычитаніе*, когда по данной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ требуется найти другое слагаемое.

Такъ какъ мы всегда имѣемъ:

$$a + b = b + a$$

то сложеніе имѣетъ только одно обратное дѣйствіе, т. е. дѣйствіе будетъ одно и тоже будетъ ли опредѣляться одно или другое изъ слагаемыхъ a или b. Означая данное слагаемое чрезъ a, данный результатъ чрезъ c, искомое слагаемое черезъ x, будемъ имѣть:

$$a + x = c \qquad (14)$$

Такъ какъ для полученія результата c надобно къ x единицамъ прибавить a единицъ, то очевидно для опредѣленіи x надобно отъ c отнять a единицъ; такое дѣйствіе, т. е. отнятіе отъ c единицъ a единицъ, изображается символомъ:

$$c - a$$

Знакъ — называется *минусомъ* и означаетъ отнятіе a единицъ отъ числа c. Слѣдовательно искомое число x будетъ символически изображаться такъ:

$$x = c - a \qquad (15)$$

число c называется *уменьшеннымъ*, a — *вычитаемымъ*, а результатъ $c-a$ *разностью*.

Мы выше замѣтили, что каждое изъ слагаемыхъ меньше суммы, слѣдовательно дѣйствіе обозначенное символомъ (15) только тогда возможно, когда $c>a$, въ противномъ же случаѣ оно дѣлается невозможнымъ.

Алгебра не останавливается передъ этой невозможностію, она логически вводитъ рядъ количествъ, которыя нетолько дѣлаютъ вычитаніе всегда возможнымъ, но обращаютъ его въ дѣйствіе прямое.

Разсмотримъ какіе случаи представляются въ символѣ:

$$x=c-a$$

Случай 1. $c>a$; въ этомъ случаѣ дѣйствіе $c-a$ всегда возможно и результатъ получается отнявъ отъ c единицъ a единицъ.

Случай 2. $c=a$; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$x=a-a \tag{16}$$

такой результатъ обозначаютъ символомъ 0, который носитъ названіе *нуля*. Этимъ числомъ пополняютъ рядъ (1) и дѣлаютъ возможнымъ рѣшеніе вопроса $a+x=c$ и въ томъ случаѣ, когда $c=a$. Пополненный числомъ 0 рядъ (4) дѣлается:

$$0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,.\,.\,.\,,\,n\,,\,.\,.\,.$$

Такъ какъ нуль есть число рѣшающее вопросъ, выраженный уравненіемъ:

$$a+x=a$$

или:

$$a+0=a \tag{18}$$

то изъ этого видимъ, что нуль есть такое число, которое будучи прибавлено къ какому угодно числу ряда (1), не измѣняетъ этого числа.

Случай 3. $a>c$. Если $a>c$, то можно положить:

$$a=c+b$$

и задача:

$$a+x=c$$

сдѣлается:

$$c+b+x=c$$

Если отъ обѣихъ частей этого равенства отымемъ по c, то найдемъ:

$$0 + b + x = 0$$

но вмѣсто $0 + b$ можно поставить просто b, въ силу (18), слѣдовательно задача сводится на слѣдующую:

$$b + x = 0$$

Но мы выше видѣли, что $b - b = 0$, слѣдовательно искомое число будетъ $-b$, т. е.

$$x = -b$$

Изъ полученнаго рѣшенія предложенной задачи видимъ, что рѣшеніе ея есть число взятое изъ ряда (17), но сопровождаемое знакомъ —. Если такія числа мы введемъ въ алгебру, то вычитаніе сдѣлается нетолько всегда возможнымъ, но оно сдѣлается дѣйствіемъ *прямымъ*. Такія числа назвали *отрицательными* и ими пополняется рядъ (17), который дѣлается:

$$\ldots -n, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots \quad (19)$$

Въ противоположность отрицательнымъ числамъ, числа:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

пишутся со знакомъ $+$, т. е.:

$$+1, +2, +3, +4, \ldots$$

и называются *положительными*. Впрочемъ знакъ $+$ передъ положительными числами не пишется, но всегда подразумѣвается. Всякое число называется *абсолютнымъ*, если говорятъ о числѣ единицъ не обращая вниманія на знакъ.

Когда изъ сравненія выраженій $b + x$ и $b - b$ мы заключаемъ, что $x = -b$, то здѣсь встрѣчается недоразумѣніе. Въ выраженіяхъ $a + c$ и $a - b$ знаки $+$ и $-$ показываютъ одинъ дѣйствіе сложенія, другой вычитанія, слѣдовательно суть дѣйственные символы, когда же мы изъ $b - b$ заключаемъ, что $x = -b$, то дѣйственный символъ — обращается въ этомъ случаѣ въ характеристику количественнаго символа. Спрашивается, какой же знакъ остается въ дѣйствіи $b - b$ послѣ перваго b, т. е. передъ знакомъ — ?

Чтобы объяснить это обстоятельство мы дѣйствіе $b - b$ напишемъ въ формѣ $-b + b$, сравнивая его съ выраженіемъ $x + b$ мы находимъ

$x = -b$ и при этомъ видно, что выраженіе $b - b$ должно писать въ формѣ $b + (-b)$, гдѣ уже знакъ — дѣлается характеристикой количества b.

Введеніе отрицательныхъ количествъ въ алгебру, обращаетъ дѣйствіе вычитаніе, которое есть обратное сложенію, въ прямое, на которое распространяется и законъ *перестановительный*, такъ какъ мы имѣемъ:

$$a - b = -b + a \quad , \quad -a - b = -b - a \tag{20}$$

Замѣтимъ еще, что дѣйствія $a+b$ и $a-b$ съ введеніемъ положительныхъ и отрицательныхъ количествъ или чиселъ, напишутся:

$$+a+b \quad , \quad +a-b$$

но когда алгебраическая фраза начинается количествомъ положительнымъ, то знакъ $+$ передъ нимъ не пишется, а потому фразы $a+b$ и $a-b$, тоже что $+a+b$ и $+a-b$. Если въ фразѣ $a-a=0$ или $-a+a=0$ вмѣсто $+a$ поставимъ $a+0$, то она сдѣлается:

$$-a+a+0=0$$

нуль въ первой части можно считать прибавленнымъ къ $-a$, а слѣдовательно нуль есть такое число, которое будучи прибавлено и къ числу отрицательному не измѣняетъ его, то есть:

$$-a+0=-a \quad \text{или} \quad 0-a=-a \tag{21}$$

§ 6. *Сложеніе и вычитаніе отрицательныхъ чиселъ.* Числа : -1, -2,.. показываютъ, что взяты одна отрицательная единица, двѣ, три и т. д., слѣдовательно ихъ можно писать въ формѣ:

$$-1 \;,\; 2.-1 \;,\; 3.-1 \;,\; 4.-1 \;,\; 5.-1 \;,\; ..$$

или:

$$-1 \;,\; -1.2 \;,\; -1.3 \;,\; -1.4 \;,\; ...$$

откуда видно, что сложить два отрицательныя числа $-a$ и $-b$ это значитъ къ a отрицательнымъ единицамъ прибавить b отрицательныхъ единицъ, сумма будетъ равна суммѣ абсолютныхъ чиселъ a и b, взятая съ отрицательнымъ знакомъ, т. е. сумма будетъ $-a-b$. Если $a+b=c$, то:

$$-c=-a-b$$

но $c=a+b$, а $-c=-1.c$, слѣдовательно:

$$-a-b=-1.c=-1.(a+b)=-(a+b)$$

Если складывается положительное число $+a$ съ отрицательнымъ $-b$, то сумма этихъ чиселъ будетъ равна абсолютной разности чиселъ a и b, взятой со знакомъ $+$ или со знакомъ $-$, смотря потому будетъ-ли $a > b$ или $a < b$. Это слѣдуетъ изъ опредѣленія отрицательныхъ количествъ.

Если изъ положительнаго числа $+a$ требуется вычесть отрицательное число $-b$, то надобно найти рѣшеніе слѣдующаго вопроса:

$$-b + x = a$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по $+b$ и замѣчая, что $b - b = 0$, мы найдемъ:

$$x = a + b$$

откуда слѣдуетъ, что:

$$a - (-b) = a + b$$

Если изъ отрицательнаго числа $-a$ требуется вычесть отрицательное число $-b$, т. е.:

$$-a - (-b)$$

то необходимо рѣшить вопросъ:

$$-b + x = -a$$

если къ обѣимъ частямъ этого равенства прибавимъ $+b$, то найдемъ, какъ выше, что:

$$x = -a + b$$

или:

$$-a - (-b) = -a + b = b - a$$

Изъ этого видимъ, что если отрицательное число вычитается изъ положительнаго или отрицательнаго, то оно къ нему прибавляется.

Изъ выраженій:

$$+a - (-b) = a + b \quad \text{и} \quad -a - (-b) = -a + b$$

слѣдуетъ, что отрицательное число $-b$, взятое отрицательно, т. е. $-(-b)$, дѣлается положительнымъ, т. е. $-(-b) = +b$.

§ 7. *Умноженіе отрицательныхъ чиселъ.* Если множимое будетъ отрицательное число $-b$, а множитель положительное число a, то произведеніе $+a . -b$ есть сумма a отрицательныхъ чиселъ $-b$, т. е.:

$$+a . -b = -b - b - b - b - b - b - b - b \; \ldots .$$

a разъ, что даетъ:

$$+a.-b=-a.b=-ab$$

Если на числа отрицательныя мы распространимъ законъ перемѣстительный, то мы будемъ имѣть:

$$+a.-b=-b.+a=-ab$$

откуда слѣдуетъ, что если множится два числа, положительное и отрицательное, то произведеніе будетъ отрицательное число равное произведенію абсолютныхъ чиселъ множимаго и множителя.

Теперь если оба множителя будутъ отрицательныя числа, какой знакъ будетъ имѣть произведеніе?

Для рѣшенія этого вопроса опредѣлимъ умноженіе слѣдующимъ образомъ: умножить одно число на другое значитъ составить изъ втораго такъ число, какъ первое составлено изъ единицы. Умножить $-a$ на $-b$ значить составить изъ $-b$ такъ число, какъ $-a$ составлено изъ единицы; $-a$ составлено изъ единицы слѣдующимъ образомъ: взята $+1$, перемѣненъ въ ней знакъ, и затѣмъ она сложена a разъ, слѣдовательно надобно взять $-b$, перемѣнить въ немъ знакъ, что даетъ $+b$, и сложить a разъ, результатъ будетъ $+ab$, слѣдовательно:

$$-a.-b=+ab$$

т. е. произведеніе двухъ отрицательныхъ чиселъ равно положительному числу, коего величина равна произведенію абсолютныхъ чиселъ a и b.

Такимъ же точно разсужденіемъ можно доказать предъидущіе результаты:

$$+a.-b=-ab \quad \text{и} \quad -a.+b=-ab$$

Какъ только введена въ алгебру отрицательная единица и изъ нея составлены отрицательныя числа : -1, -2, -3, -4, ..., такъ какъ изъ положительной единицы составлены положительныя числа : $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, ..., то необходимо распространяются и три основные алгебраическіе закона (13) на отрицательныя числа, т. е.:

$$+a-b=-b+a \quad , \quad -a-b=-b-a$$

$$+a.-b=-b.+a \quad , \quad -a.-b=-b.-a$$

$$+a(-b-c)=+a.-b+a.-c$$

$$-a(-b-c)=-a.-b-a.-c$$

и

$$(-a)^n.(-a)^m=(-a)^{n+m}$$

Допустивъ составленіе отрицательныхъ чиселъ изъ отрицательной единицы, какъ положительныхъ изъ положительной единицы, само собою на нихъ распространяются и основные законы (13), а затѣмъ и правило знаковъ при умноженіи, которое собственно говоря, логически доказано быть не можетъ, а можетъ логически быть допущено. Всѣ извѣстныя доказательства, если ихъ внимательно разобрать, составляютъ логическій кругъ, такъ какъ разъ допустивъ тѣ же законы и для отрицательныхъ количествъ, правило для знаковъ есть необходимое слѣдствіе такого допущенія.

§ 8. *Дѣленіе.* Второе обратное дѣйствіе есть *дѣленіе*, когда по данному произведенію b и одному изъ множителей a, требуется отыскать другой x, т. е. требуется найти число x, которое бы удовлетворяло равенству:

$$ax = b \tag{22}$$

гдѣ числа a и b взяты изъ ряда (1).

Такъ какъ мы имѣемъ $ab = ba$, то умноженіе имѣетъ только одно обратное дѣйствіе, т. е. будетъ-ли данъ одинъ или другой множитель, дѣйствіе для ихъ опредѣленія будетъ одно и тоже. Это дѣйствіе называется *дѣленіемъ;* число b называется *дѣлимымъ*, a — *дѣлителемъ*, а искомый результатъ называется *частнымъ*. Дѣйствіе это, какъ легко видѣть изъ примѣровъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ возможно, а въ другихъ невозможно, т. е. по даннымъ числамъ a и b изъ ряда (1) искомое число x иногда находится въ томъ же ряду, а иногда его нѣтъ.

Напримѣръ:

$$3x = 6$$

очевидно $x = 2$; но если будетъ дано напримѣръ:

$$2x = 1$$

то нѣтъ ни въ ряду (1), ни въ ряду (19) чиселъ, которыя бы дали отвѣтъ на предложенный вопросъ. Слѣдовательно искомое число есть новое, которое должно быть выведено изъ опредѣленія *дѣленія*. А по опредѣленію надобно искать для x такое число, которое будучи умножено на 2 дало-бы въ результатѣ единицу. Возвратимся для того къ опредѣленію умноженія $ax=b$. Произведеніе b, множителей a и x, есть сумма a слагаемыхъ x, т. е.:

$$\overset{1}{x} + \overset{2}{x} + \overset{3}{x} + \overset{4}{x} + \overset{5}{x} + \overset{6}{x} + \ldots + \overset{a}{x} = b$$

Изъ этого равенства видимъ, что число b раздѣлено на a равныхъ частей, и одна изъ нихъ есть число x. Это число называется *частнымъ* или *дробью.*

Его означаютъ символомъ:

$$x = \frac{b}{a}$$

Число b называется *дѣлимымъ* или *числителемъ*, а a — *дѣлителемъ* или *знаменателемъ*. Умноженіемъ дроби $\frac{b}{a}$ на ея знаменатель a, мы будемъ называть дѣйствіе, которое даетъ въ результатѣ числитель b.

Слѣдовательно символъ $\frac{b}{a}$, или дробь, означаетъ, что числитель b долженъ быть раздѣленъ на столько равныхъ частей, сколько въ знаменателѣ a содержится единицъ. Но это опредѣленіе дроби неудобно, такъ какъ въ дробяхъ, имѣющихъ однаго знаменателя, приходится всегда снова дѣлить числителя, поэтому лучше опредѣлить дробь слѣдующимъ образомъ:

Дробь $\frac{b}{a}$ означаетъ, что единица раздѣлена на столько равныхъ частей, сколько въ знаменателѣ содержится единицъ, и что этихъ равныхъ частей единицы было взято столько, сколько единицъ содержитъ числитель.

Очевидно, что оба опредѣленія тождественны. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить b единицъ на a равныхъ частей — это раздѣлить каждую единицу числа b на a равныхъ частей и взять отъ каждой единицы по такой части, т. е. b частей, или раздѣлить единицу на a равныхъ частей и взять такихъ частей той же единицы b.

Цѣлыя числа: 1, 2, 3, 4, 5, ... можно разсматривать какъ дроби, имѣющія знаменателемъ единицу:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \ldots\ldots$$

Возьмемъ теперь дробь $\frac{1}{a}$, которая показываетъ, что единица раздѣлена на a равныхъ частей и взята одна такая часть. Эту часть, въ свою очередь, можно разсматривать, какъ единицу и чтобы ее отличить отъ первоначальной единицы назовемъ ее единицею a-го порядка. Одна, двѣ, три и т. д. единицы будутъ дроби:

$$\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a}, \frac{4}{a}, \ldots \frac{n}{a}, \ldots$$

этотъ рядъ такъ составленъ изъ единицы a-го порядка, какъ рядъ (1) цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ составленъ изъ единицы. Если единицу a-го порядка принять за единицу, то единица 1-го порядка сдѣлается числомъ a, число 2 сдѣлается $2a$ и т. д.; получается такой же безконеч-

ный рядъ положительныхъ чиселъ какъ и рядъ (1), только единица его будетъ a-я часть первоначальной единицы. Числа:

$$-\frac{1}{a}, \quad -\frac{2}{a}, \quad -\frac{3}{a}, \quad -\frac{4}{a}, \quad -\frac{5}{a}, \ldots$$

будутъ отрицательныя числа, выраженныя единицей a-го порядка. Слѣдовательно на дроби можно распространить всѣ алгебраическіе законы, которымъ подчинены цѣлыя положительныя и отрицательныя числа. Итакъ рядъ (19) долженъ быть пополненъ еще числами различныхъ порядковъ, чтобы дѣйствіе обратное умноженію—дѣленіе было всегда возможно и обратилось въ прямое.

Вводя такія числа въ рядъ (19) рѣшеніе вопроса, выраженнаго равенствомъ:

$$ax = b$$

сдѣлается всегда возможнымъ, какія-бы числа a и b ни были. Мы говоримъ въ отвлеченномъ смыслѣ, но въ конкретномъ — полученіе дробнаго числа, какъ рѣшеніе предложеннаго вопроса, показываетъ часто его несообразность. Напримѣръ, колесо имѣетъ сто зубцовъ, сколько должно быть зубцовъ на колесѣ, которое бы дѣлало семь оборотовъ въ то время когда первое дѣлаетъ одинъ? Очевидно, чтобы получить число зубцовъ надобно раздѣлить 100 на 7, что даетъ 14 и $^2/_7$ зубца — нелѣпость, потому что дробныхъ зубцовъ быть не можетъ.

Мы не будемъ говорить здѣсь о свойствахъ дробей и о дѣйствіяхъ надъ ними, такъ какъ мы говоримъ здѣсь только о ихъ происхожденіи и значеніи.

4.

Остается сказать теперь о произведеніи, въ которомъ одинъ изъ множителей есть нуль и о дроби, въ которой или числитель или знаменатель, или то и другое, суть нули. Легко видѣть изъ опредѣленія умноженія, что:

$$a \cdot 0 = 0$$

такъ какъ $a.0$ показываетъ, что нуль долженъ быть сложенъ a разъ, что даетъ въ результатѣ также нуль. Если множитель будетъ нуль, т. е. если дано выраженіе $0 \cdot a$, то оно получаетъ только тогда смыслъ, когда мы распространимъ и на нуль законъ перестановительный, т. е. положимъ, что:

$$0 \cdot a = a \cdot 0$$

откуда $0 \cdot a = 0$.

Если въ дроби $\frac{b}{a}$ числитель $b=0$, то дробь будетъ также равна нулю, что видно изъ выраженія $b=ax$, которое служило опредѣленіемъ дроби.

Если въ дроби $\frac{b}{a}$ знаменатель $a=0$, то для опредѣленія смысла выраженія $\frac{b}{0}$ положимъ $a=\frac{1}{n}$. По мѣрѣ того, какъ число n возрастаетъ, $\frac{1}{n}$ приближается все болѣе и болѣе къ нулю и дробь $\frac{b}{a}=x$ сдѣлается:

$$x=bn$$

слѣдовательно съ возрастаніемъ n возрастаетъ также x. Когда n сдѣлается безконечно большимъ числомъ, дробь $\frac{b}{0}$ сдѣлается также безконечно большою, т. е.:

$$\frac{b}{0}=\infty$$

§ 9. *Извлеченіе корней.* Третье прямое дѣйствіе есть возвышеніе въ степень, оно выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$a^n=b$$

которое будетъ выражать прямое дѣйствіе, когда по данному числу a, показателю степени n, взятыхъ изъ ряда (1), требуется опредѣлить степень b. Дѣйствіе это всегда возможно, т. е. въ ряду (1) всегда найдется искомое число b.

Дѣйствіе будетъ обратное, когда по данному результату или степени b, взятому изъ ряда (1), и одному изъ чиселъ a или n, требуется найти другое, т. е. если искомое число означимъ чрезъ x, то задача будетъ выражена слѣдующими двумя равенствами:

$$x^n=b \quad \text{и} \quad a^x=b$$

Такъ какъ равенство:

$$a^b=b^a$$

не имѣетъ мѣста, то возвышеніе имѣетъ два обратныя дѣйствія, совершенно различныя. Второе есть дѣйствіе трансцендентное, заключающее въ себѣ опредѣленіе логариѳма, а потому о немъ мы здѣсь говорить не станемъ, а скажемъ о первомъ, т. е. о дѣйствіи:

$$x^n=b$$

въ немъ требуется найти такое число для неизвѣстнаго x, которое бы будучи умножено само на себя n разъ дало въ результатѣ данное число b.

То дѣйствіе, съ помощью котораго, въ этомъ случаѣ, отыскивается требуемое число называется *извлеченіемъ корня n-й степени* и обозначается символомъ $\sqrt[n]{}$, поставленнымъ подъ числомъ b, т. е. изъ:

$$x^n = b$$

мы имѣемъ:

$$x = \sqrt[n]{b}$$

слѣдовательно подъ этимъ символомъ разумѣется совокупность всѣхъ тѣхъ дѣйствій, которыя надобно совершить надъ b для полученія искомаго числа.

Разсмотримъ сначала самый простой случай, когда $n = 2$, т. е. требуется найти такое число въ ряду (19), которое бы удовлетворяло равенству:

$$x^2 = b \tag{23}$$

символическое выраженіе для x будетъ $x = \sqrt[2]{b}$, или просто:

$$x = \sqrt{b}$$

иногда при извѣстномъ числовомъ значеніи b, легко найти въ ряду (19) число для x, которое будучи умножено само на себя даетъ b, напримѣръ, положимъ $b = 16$, то легко видѣть, что $x = 4$, слѣдовательно $\sqrt{16} = 4$.

Замѣтимъ при этомъ, что не только $+4$ удовлетворяетъ уравненію:

$$x^2 = 16 \tag{24}$$

но и -4, такъ какъ и $+4$ и -4, будучи возвышены во вторую степень даютъ $+16$. Слѣдовательно на вопросъ, выраженный уравненіемъ (24), есть два отвѣта, коихъ числовыя величины равны, но имѣютъ противные знаки. Въ силу этого передъ корнемъ второй степени ставится всегда два знака: $+$ и $-$, т. е. пишется:

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

или вообще:

$$x = \pm\sqrt{b}$$

Слѣдовательно символъ $\pm\sqrt{b}$ имѣетъ слѣдующее свойство:

$$(\pm\sqrt{b})^2 = b$$

Но въ большей части случаевъ, при извѣстномъ числовомъ значеніи b, въ ряду (19), пополненномъ числами всѣхъ возможныхъ порядковъ, нѣтъ такого числа, которое бы удовлетворяло уравненію (23); напримѣръ положимъ $b=2$, то уравненіе (23) сдѣлается:

$$x^2=2$$

Если вмѣсто x поставимъ единицу, то найдемъ $1^2=1$, а подставляя 2, найдемъ $2^2=4$, слѣдовательно искомое число для x заключается между 1 и 2; но между 1 и 2 лежатъ числа всѣхъ возможныхъ порядковъ, т. е. дроби больше единицъ и меньше 2, изъ которыхъ ни одна, какъ легко показать, не можетъ удовлетворить уравненію $x^2=2$. Но можно найти всегда такія два послѣдовательныя числа, извѣстнаго порядка, между которыми находится искомое число. Если одно изъ такихъ чиселъ, напримѣръ, a-го порядка $\frac{m}{a}$ или $\frac{m+1}{a}$ примемъ за искомое число, то погрѣшность, сдѣланная при этомъ, будетъ меньше единицы этого порядка, т. е. меньше $\frac{1}{a}$.

Чѣмъ порядокъ чиселъ $\frac{m}{a}$ и $\frac{m+1}{a}$ будетъ выше, т. е. чѣмъ число a будетъ больше, тѣмъ числа $\frac{m}{a}$ или $\frac{m+1}{a}$ будутъ ближе къ искомому —идеальному числу, которое называется *ирраціональнымъ* и въ настоящемъ случаѣ такія числа выражаются символами:

$$\pm\sqrt{2}\quad,\quad\pm\sqrt{3}\quad,\quad\pm\sqrt{5}\;,\ldots$$

Слѣдовательно, чтобы возможно было всегда рѣшить вопросъ выраженный уравненіемъ:

$$x^2=b$$

надобно ввести въ рядъ (19), пополненный числами различныхъ порядковъ, числа ирраціональныя—идеальныя, относительно числовой единицы, но дѣйствительно существующія, какъ протяженія.

Самый простой примѣръ этому служитъ діагональ квадрата, коего сторона равна единицѣ. И въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что діагональ такого квадрата выражается символомъ:

$$x=\sqrt{2}$$

Такое же разсужденіе можно сдѣлать относительно уравненія:

$$x^n=+b$$

при $n=3,\ 4,\ 5,\ldots.$

Изъ опредѣленія символа a^n слѣдуетъ, что:

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

откуда слѣдуетъ, что отвѣтъ на вопросъ выраженный уравненіемъ:

$$a^n . x = a^m$$

будетъ:

$$x = a^{m-n}$$

т. е. при дѣленіи a^m на a^n показатель n дѣлителя вычитывается изъ показателя m дѣлимаго.

Если $m = n$, то отвѣтъ будетъ имѣть двѣ формы: одну ариѳметическую, другую символическую. Въ самомъ дѣлѣ, если $m = n$, то уравненіе:

$$a^m . x = a^m$$

даетъ $x = 1$, или $x = a^0$. Поэтому пишутъ:

$$a^0 = 1$$

Если $n > m$, и въ уравненіи:

$$a^n . x = a^m$$

положимъ $n = p + m$, то будемъ имѣть:

$$a^n . x = a^{p+m} . x = a^p . a^m . x = a^m$$

или:

$$a^p . x = 1$$

откуда:

$$x = \frac{1}{a^p}$$

но мы имѣемъ также:

$$x = a^{m-n} = a^{-p}$$

слѣдовательно:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

или:

$$a^p . a^{-p} = 1$$

Если надобно a^n возвысить въ m-ю степень, то нужно a^n помножить само на себя m разъ, что дастъ:

$$[a^n]^m = a^n . a^n . a^n . a^n \ldots\ldots = a^{n+n+n+n+\ldots} = a^{m.n}$$

Такъ какъ мы имѣемъ:

$$\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$$

то очевидно можно писать вмѣсто символа $\sqrt[n]{a}$ символъ $a^{1/n}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы будемъ имѣть, примѣняя правило возвышенія:

$$\left[a^{1/n}\right]^n = a$$

Очевидно, что символъ $\sqrt[n]{a^m}$ можно написать въ формѣ:

$$a^{\frac{m}{n}}$$

идея дробныхъ показателей принадлежитъ Декарту.

§ 10. Остается разсмотрѣть тотъ случай, когда число b отрицательное, т. е. когда требуется рѣшить вопросъ:

$$x^2 = -b$$

Возвышая во вторую степень числа положительныя и числа отрицательныя, всегда получаемъ въ результатѣ числа положительныя, а предъидущій вопросъ требуетъ найти такое число, которое бы, будучи возвышено во вторую степень, дало отрицательное число $-b$, взятое изъ пополненнаго, всѣми возможными числами, ряда (19). Очевидно, въ этомъ ряду такого числа нѣтъ. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ положимъ $b=1$, т. е. требуется рѣшить уравненіе.

$$x^2 = -1$$

Искомое число, удовлетворяющее этому уравненію есть *новое*, его называютъ *мнимой единицей* и обозначаютъ согласно Гауссу буквой i; слѣдовательно i есть такой числовой символъ, который, будучи возвышенъ въ квадратъ, даетъ -1, т. е.

$$i^2 = -1$$

или, распространяя на это уравненіе символическое рѣшеніе, найдемъ:

$$i = \sqrt{-1}$$

Изъ мнимой единицы i составляются *мнимыя числа* положительныя и отрицательныя, точно также, какъ изъ положительной и отрицательной

единицы составляются числа дѣйствительныя положительныя и отрицательныя. Эти мнимыя числа суть:

$$i \;,\quad 2i \;,\quad 3i \;,\quad 4i \;,\quad 5i \;, \ldots$$

$$-i \;,\quad -2i \;,\quad -3i \;,\quad -4i \;,\quad -5i \;, \ldots$$

Точно также получаются и мнимыя числа различныхъ порядковъ:

$$\frac{1}{a}i \;,\quad \frac{2}{a}i \;,\quad \frac{3}{a}i \;,\quad \frac{4}{a}i \;,\quad \frac{5}{a}i \;, \ldots$$

$$\frac{1}{a}i \;,\quad -\frac{2}{a}i \;,\quad -\frac{3}{a}i \;,\quad -\frac{4}{a}i \;,\quad -\frac{5}{a}i \;, \ldots$$

§ 11. Изъ чиселъ дѣйствительныхъ и мнимыхъ составляются числа извѣстныя въ анализѣ подъ именемъ *составныхъ* чиселъ или количествъ; онѣ имѣютъ форму:

$$a + bi$$

гдѣ a и b суть дѣйствительныя числа положительныя или отрицательныя.

Изъ дѣйствій прямыхъ и обратныхъ, вытекающихъ изъ трехъ основныхъ законовъ алгебры, другихъ числовыхъ символовъ получиться не можетъ, слѣдовательно это и есть весь количественный матеріалъ надъ которымъ алгебра производитъ свои дѣйствія и въ формѣ которыхъ, получаются результаты при рѣшеніи всевозможныхъ вопросовъ.

Если замѣтимъ, что:

$$i^2 = -1 \;,\quad i^3 = -i \;,\quad i^4 = +1$$

то легко видѣть, что вообще:

$$i^{4n} = +1 \;,\quad i^{4n+1} = i \;,\quad i^{4n+2} = -1 \;,\quad i^{4n+3} = -i$$

поэтому какое-бы алгебраическое дѣйствіе не совершали надъ составнымъ количествомъ $a + bi$, мы всегда получимъ количество такой же формы $A + Bi$.

Итакъ весь количественный матеріалъ алгебры, надъ которымъ она производитъ свои дѣйствія и въ формѣ котораго получаетъ результаты, представляется въ слѣдующей формѣ:

$$+a \;,\quad -a \;,\quad +ai \;,\quad -ai \;,\quad a + bi$$

гдѣ a и b суть числа дѣйствительныя цѣлыя, дробныя или ирраціональныя.

§ 12. Посмотримъ теперь какъ эти числа представляются геометрически. Для этого надобно найти такія геометрическія предложенія, которые бы указали, что должны собою представлять въ геометріи числа отрицательныя, мнимыя и составныя, когда положительныя представляютъ извѣстный родъ протяженій.

Возьмемъ прямую линію и на ней въ извѣстной точкѣ поставимъ нуль и отъ этой точки вправо на равныхъ разстояніяхъ поставимъ числа 1, 2, 3, 4, ... ∞; значитъ отъ нуля отсчитываются вправо числа 1, 2, 3, 4, ...

Дѣйствіе $3+4$ означаетъ отсчитываніе, начиная отъ нуля, сначала 3 единицы, а потомъ еще четыре, всего слѣдовательно надобно отсчитать 7 единицъ вправо отъ нуля. Если будетъ дано 7—4, то это значитъ требуется отсчитать вправо отъ нуля 7 единицъ, а потомъ возвратится назадъ на четыре единицы. Слѣдуя логически такому дѣйствію мы должны въ выраженіи 3—5 сначала отсчитать вправо отъ нуля 3 единицы, и потомъ возвратится на 5 единицъ назадъ, слѣдовательно еще на двѣ единицы отъ нуля влѣво, но $3-5=-2$, слѣдовательно числа отсчитываемыя влѣво отъ нуля должны быть приняты за отрицательныя. Изъ этого мы заключаемъ вообще, что если мы отсчитываемъ извѣстныя величины въ извѣстномъ направленіи, то въ противоположномъ направленіи мы должны отсчитывать числа отрицательныя. Всѣ геометрическія изслѣдованія подтверждаютъ правильность такого условія, а геометрическія истины или предложенія получаютъ необыкновенную общность. Приведенное обобщеніе понятія объ положительныхъ и отрицательныхъ величинахъ принадлежитъ французскому геометру Декарту.

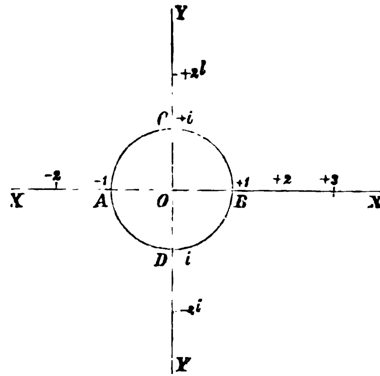
Посмотримъ теперь какъ слѣдуетъ представлять геометрически мнимыя и составныя числа.

Если изъ точки 0 принятой за нуль, радіусомъ равнымъ единицѣ опишемъ кругъ и проведемъ діаметръ YY, перпендикулярный къ прямой XX (фиг. 1), то радіусъ OC будетъ, какъ извѣстно средне-пропорціональная величина между радіусами OA и OB, изъ коихъ первый есть $+1$, а второй -1, слѣдовательно $OC^2=-1$, т. е. $OC=\sqrt{-1}=i$. Изъ этого заключаемъ, что числа i, $2i$, $3i$, $4i$, ... должны отсчитываться на перпендикулярѣ OY, по направленію вверхъ, а числа $-i$, $-2i$, $-3i$, $-4i$, ... въ противоположную сторону, т. е. на перпендикулярѣ OY, по направленію внизъ.

Остается показать какъ представить геометрически число $a+bi$. Для этого на прямой XX, отъ нуля въ ту или другую сторону, откладываютъ число a, смотря по тому будетъ-ли оно положительное или отрицательное. Затѣмъ на прямой YY отъ нуля откладываютъ число bi въ ту

или другую сторону, смотря по тому будетъ-ли bi положительное или отрицательное; изъ точекъ a и bi, въ данномъ случаѣ N и M, возставляютъ перпендикуляры NE и ME, пересѣченіе которыхъ и даетъ точку E, которая геометрически и представляетъ число $a+bi$.

Фиг. 1.



Такое представленіе мнимыхъ количествъ принадлежитъ прусскому геометру Кюну (Kühn), изложившему свой методъ въ 1750 г. въ III-мъ томѣ мемуаровъ С.-Петербургской Академіи Наукъ. Впослѣдствіи, въ началѣ настоящаго столѣтія, вопросомъ о геометрическомъ построеніи мнимыхъ и составныхъ количествъ занимались французскіе математики Арганъ (Argand) и Коши (Couchy), а также Гауссъ (Gauss).

Всѣ геометрическія слѣдствія, вытекающія изъ такого условія, показываютъ его логичность. Впрочемъ есть еще и другой способъ, предложенный въ послѣднее время и принадлежащій французскому геометру Максимиліану Мари (Maximilien Marie), представлять геометрически мнимыя и составныя числа, который дѣлаетъ нѣкоторые геометрическіе выводы и заключенія проще, но онъ не вошелъ въ употребленіе.

§ 13. Изъ геометрическаго представленія дѣйствительныхъ и составныхъ количествъ видимъ, что первыя изъ нихъ представляютъ точки лежащія на одной прямой, а вторыя всѣ точки одной плоскости. Были попытки представить точки въ пространствѣ, но тѣ условія, которыя необходимы для этого, выходятъ изъ предѣловъ основныхъ законовъ алгебры, которые не могутъ дать количественныхъ символовъ отличныхъ отъ тѣхъ, къ которымъ мы были приведены прямыми и обратными дѣйствіями алгебры.

Англійскій математикъ Гамильтонъ (Hamilton), въ 1844 году, ввелъ три символа: i, j и k такого свойства:

$$ij=k \quad , \quad jk=i \quad , \quad ki=j$$

и изъ нихъ составилъ такое выраженіе:

$$u = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

которое онъ назвалъ *кватерненомъ* (quaternion). Выраженіе это состоитъ изъ чотырехъ членовъ, одного дѣйствительнаго и трехъ въ символическихъ. Съ помощью такого выраженія можно представить всѣ точки въ пространствѣ. Символы i, j и k не подлежатъ алгебраическимъ законамъ, такъ какъ между ними существуетъ зависимость:

$$ji = -k \quad , \quad kj = -i \quad , \quad ik = -j$$

Гауссъ, въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ, упоминаетъ, что онъ доказалъ, что выраженіе $a+bi$ есть самое общее и что общнѣе символа не можетъ быть при существованіи трехъ основныхъ законовъ количествъ, т. е. законовъ: перемѣстительнаго, распредѣлительнаго и повторительнаго. Мы приведемъ здѣсь доказательство, предложенное Кенигсбергеромъ (Koenigsberger) въ 1874 г., такъ какъ доказательство данное Гауссомъ неизвѣстно.

Пусть такой символъ будетъ:

$$z = a + bi + ci'$$

гдѣ a, b и c суть алгебраическія числа, а i и i' символы между которыми не существуетъ однородной линейной зависимости съ дѣйствительными коэфиціентами, т. е. что если мы имѣемъ:

$$a + bi + ci' = 0$$

то это уравненіе можетъ существовать только при условіи:

$$a = 0 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad c = 0$$

Если такой символъ можетъ вытекать изъ трехъ основныхъ законовъ алгебры, то онъ долженъ подлежать этимъ законамъ. Основный законъ всѣхъ алгебраическихъ количественныхъ символовъ состоитъ въ томъ, что произведеніе равно нулю, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю и обратно. Легко показать, что символы формы:

$$z = a + bi + ci'$$

распространяя на нихъ три основные закона алгебры, не удовлетворяютъ основному свойству умноженія, упомянутому выше.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$z_1 = a_0 + a_1 i + a_2 i'$$
$$z_2 = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i'$$

Если положимъ, что:

$$i^2 = \rho_0 + \rho_1 i + \rho_2 i'$$
$$i'^2 = \sigma_0 + \sigma_1 i + \sigma_2 i'$$
$$ii' = \tau_0 + \tau_1 i + \tau_2 i'$$

то произведеніе будетъ:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_0 + a_1 i + a_2 i')(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i') = \\ &= a_0\alpha_0 + (a_1\rho_0 + a_2\tau_0)\alpha_1 + (a_1\tau_0 + a_2\sigma_0)\alpha_2 + \\ &+ i[a_1\alpha_0 + (a_0 + a_1\rho_1 + a_2\tau_1)\alpha_1 + (a_1\tau_1 + a_2\sigma_1)\alpha_2] + \\ &+ i'[a_2\alpha_0 + (a_1\rho_2 + a_2\tau_2)\alpha_1 + (a_0 + a_1\tau_2 + a_2\sigma_2)\alpha_2] \end{aligned}$$

Но это произведеніе должно быть равно нулю, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю, т. е. когда:

$$a_0 + a_1 i + a_2 i' = 0$$

или:

$$\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i' = 0$$

или когда:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 0$$

или:

$$\alpha_0 = 0 \quad , \quad \alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

между тѣмъ оно равно нулю безъ этого условія.

Въ самомъ дѣлѣ, вторая часть произведенія равна нулю, когда:

$$a_0\alpha_0 + (a_1\rho_0 + a_2\tau_0)\alpha_1 + (a_1\tau_0 + a_2\sigma_0)\alpha_2 = 0$$
$$a_1\alpha_0 + (a_2 + a_1\rho_1 + a_2\tau_1)\alpha_1 + (a_1\tau_1 + a_2\sigma_1)\alpha_2 = 0$$
$$a_2\alpha_0 + (a_1\rho_2 + a_2\tau_2)\alpha_1 + (a_0 + a_1\tau_2 + a_2\sigma_2)\alpha_2 = 0$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} a_0 \, , & a_1\rho_0 + a_2\tau_0 \, , & a_1\tau_0 + a_2\sigma_0 \\ a_1 \, , & a_0 + a_1\rho_1 + a_2\tau_1 \, , & a_1\tau_1 + a_2\sigma_2 \\ a_2 \, , & a_1\rho_2 + a_2\tau_2 \, , & a_0 + a_1\tau_2 + a_2\sigma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Но это есть однородное уравненіе третьей степени относительно: a_0, a_1, a_2; слѣдовательно для совершенно произвольныхъ количествъ ρ_0, ρ_1, ρ_2, σ_0, σ_1, σ_2, τ_0, τ_1, τ_2 и для дѣйствительнаго значенія количествъ a_1 и a_2 оно

даетъ хотя одно дѣйствительное значеніе для a_0. Изъ такимъ образомъ опредѣленныхъ количествъ a_0, a_1, a_2, мы найдемъ дѣйствительныя величины для α_0, α_1 и α_2. Слѣдовательно произведеніе:

$$(a_0 + a_1 i + a_2 i')(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i')$$

для дѣйствительнаго конечнаго значенія величинъ a_0, a_1, a_2, α_0, α_1, α_2 уничтожается помимо уничтоженія одного изъ множителей, — законъ которому подлежатъ всѣ алгебраическіе символы. Слѣдовательно символа формы:

$$z = a + bi + ci'$$

удовлетворяющаго всѣмъ основнымъ законамъ алгебраическихъ количествъ, быть не можетъ.

ГЛАВА II.

Дѣйствія надъ составными количествами.

§ 14. Изъ всего сказаннаго выше видимъ, что количественный символъ $a + bi$ есть самый общій, и общнѣе его быть не можетъ, пока въ изслѣдованія будутъ входить символы, подлежащіе только тремъ основнымъ законамъ алгебраическихъ количествъ. Изслѣдуемъ свойства этого символа.

Два составныя количества:

$$a + bi \quad \text{и} \quad a - bi$$

называются *сопряженными*, ихъ произведеніе $a^2 + b^2$ называется *нормою* составнаго количества $a + bi$ или количества $a - bi$. Корень квадратный изъ нормы, взятый съ положительнымъ знакомъ, $+\sqrt{a^2 + b^2}$, называется *модулемъ* составнаго количества.

Первое слѣдствіе, которое мы выводимъ изъ предъидущаго это то, что количества $a + bi$ и $a - bi$ можно разсматривать какъ корни квадратнаго уравненія:

$$(x - a)^2 + b^2 = 0$$

и въ самомъ дѣлѣ, рѣшая это уравненіе найдемъ, что корни его суть:

$$a + bi \quad \text{и} \quad a - bi$$

Изъ этого видимъ также, что сумма и произведеніе двухъ сопряженныхъ количествъ суть числа дѣйствительныя:

$$2a \quad \text{и} \quad a^2 + b^2$$

Равенство между двумя составными количествами:

$$a + bi \quad \text{и} \quad c + di$$

можетъ существовать только въ томъ случаѣ, когда $a=c$ и $b=d$, въ противномъ случаѣ изъ уравненія:

$$a + bi = c + di$$

можно опредѣлить i чрезъ количества дѣйствительныя a, b, c и d, что невозможно.

Легко видѣть, что сумма, разность, произведеніе и частное двухъ составныхъ количествъ суть также количества составныя.

$$a + bi \pm (c + di) = a \pm c + (b \pm d) i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad) i$$

и

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

или:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Изъ этого легко видѣть, что произведеніе, а слѣдовательно и степень, какого угодно числа составныхъ множителей есть также количество составное.

§ 15. Чтобы легче видѣть зависимость между слагаемыми и суммою, между множителями и произведеніемъ, мы дадимъ составному количеству $a + bi$ другую форму. Положимъ:

$$a = \rho \cos \varphi \quad , \quad b = \rho \sin \varphi$$

Изъ этихъ двухъ положеній найдемъ:

$$\rho = + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \text{ и } \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

дуга φ заключается между 0 и π, такъ какъ $\operatorname{tg}\varphi$ между этими предѣлами угла можетъ получить всѣ значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$. Количество ρ, какъ мы уже выше сказали, называется *модулемъ*, а уголъ φ — *аргументомъ* составного количества.

Слѣдовательно составному количеству:

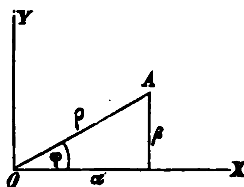
$$z = a + bi$$

можно дать тригонометрическую форму:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1}$$

Мы уже выше видѣли, что составное количество представляетъ точку на плоскости; эта точка A (фиг. 2) опредѣляется координатами a и b, слѣдовательно ρ будетъ ничто иное какъ разстояніе этой точки A отъ начала координатъ O, а уголъ φ будетъ опредѣлять направленіе этого разстоянія, поэтому можно разсматривать выраженіе (1), какъ это разстояніе, котораго величина есть ρ, а направленіе φ.

Фиг. 2.



Слѣдствіе 1. Если два составныя количества равны, то необходимо равны и ихъ модули.

Слѣдствіе 2. Всякое составное количество, коего модуль равенъ нулю, само обращается въ нуль, и обратно. Это слѣдуетъ изъ того, что если:

$$a^2 + b^2 = 0$$

то необходимо и

$$a = 0 \text{ и } b = 0$$

а слѣдовательно:

$$a + bi = 0$$

Слѣдствіе 3. Всякое дѣйствительное количество a имѣетъ модулемъ свое числовое значеніе, а аргументомъ четное или нечетное число разъ

взятое π, смотря по тому будетъ-ли a величина положительная или отрицательная. Это слѣдуетъ изъ того положенія, что для всякаго дѣйствительнаго количества $b=0$, а потому модуль его есть $\rho=\sqrt{a^2}$, или $\rho=a$, а $\cos\varphi=\pm 1$, смотря по тому будетъ-ли $a>0$ или $a<0$.

§ 16. *Сложеніе и вычитаніе составныхъ количествъ.* Возьмемъ два составныя количества:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

и сложимъ, то найдемъ:

$$z+z_1=(\rho\cos\varphi+\rho_1\cos\varphi_1)+i(\rho\sin\varphi+\rho_1\sin\varphi_1)$$

Если означимъ модуль этой суммы чрезъ r, а аргументъ чрезъ θ, то найдемъ:

$$r=\sqrt{(\rho\cos\varphi+\rho_1\cos\varphi_1)^2+(\rho\sin\varphi+\rho_1\sin\varphi_1)^2}=\sqrt{\rho^2+\rho_1^2+2\rho\rho_1\cos(\varphi-\varphi_1)}$$

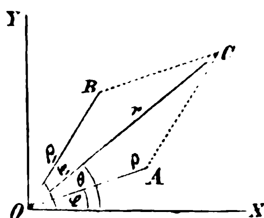
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\rho\sin\varphi+\rho_1\sin\varphi_1}{\rho\cos\varphi+\rho_1\cos\varphi_1}$$

Если вмѣсто $\operatorname{tg}\theta$ поставимъ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, то легко найти что:

$$\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{\sin(\varphi_1-\theta)}{\sin(\theta-\varphi)}$$

Изъ этихъ выраженій легко видѣть, что сумма двухъ составныхъ количествъ геометрически представляется, по величинѣ r и направленію θ, діоганалью параллелограмма, коего стороны суть ρ и ρ_1, а направленія ихъ φ и φ_1 (фиг. 3).

Фиг. 3.



Откуда также видимъ, что модуль суммы составныхъ количествъ менѣе суммы модулей этихъ количествъ и болѣе ихъ разности, т. е.:

$$r<\rho+\rho_1 \quad \text{и} \quad r>\rho-\rho_1$$

Если два выраженія z и z_1 вычтемъ одно изъ другаго, то найдемъ, что ихъ разность $z-z_1$ равна суммѣ количествъ:

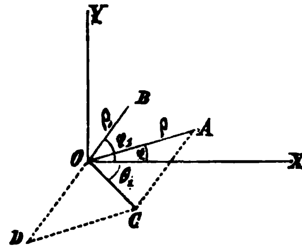
$$z-z_1=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\rho_1\left\{\cos(\varphi_1+\pi)+i\sin(\varphi_1+\pi)\right\} \qquad (2)$$

такъ какъ извѣстно, что:

$$\cos(\varphi_1+\pi)=-\cos\varphi \quad \text{и} \quad \sin(\varphi_1+\pi)=-\sin\varphi_1$$

Изъ выраженія (2) видимъ, что модуль и аргументъ разности двухъ составныхъ количествъ равенъ, по величинѣ r_1 и по направленію θ, діагонали параллелограмма (фиг. 4), построеннаго на модулѣ уменьшаемаго ρ и на модулѣ вычитаемаго ρ_1, взятаго въ противоположномъ направленіи.

Фиг. 4.



§ 17. *Умноженіе и дѣленіе составныхъ количествъ.* Если два выраженія:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad \text{и} \quad z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

перемножимъ, то найдемъ:

$$zz_1=\rho\rho_1\left\{(\cos\varphi\cos\varphi_1-\sin\varphi\sin\varphi_1)+i(\sin\varphi\cos\varphi_1+\cos\varphi\sin\varphi_1)\right\}$$

или:

$$zz_1=\rho\rho_1\left\{\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)\right\}$$

Откуда видимъ, что модуль произведенія двухъ составныхъ количествъ равенъ произведенію модулей множителей, а аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ множителей. Легко теперь видѣть, что произведеніе составныхъ количествъ z, z_1, $z_2, \ldots$, коихъ модули суть ρ, ρ_1, ρ_2, $\rho_3, \ldots$, а аргументы φ, φ_1, $\varphi_2, \ldots$, будетъ:

$$zz_1z_2\ldots=\rho\rho_1\rho_2\ldots\left\{\cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\ldots)+i\sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\ldots)\right\}$$

Если въ этомъ уравненіи положимъ:

$$\rho=\rho_1=\rho_2=\ldots\ldots\ ; \quad \varphi=\varphi_1=\varphi_2=\ldots$$

то очевидно также:

$$z = z_1 = z_3 = \ldots\ldots$$

и найдемъ, что:

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

но:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

откуда:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \qquad (3)$$

Послѣднее выраженіе (3) есть извѣстная *теорема Муавра,* при n цѣломъ. Названіе свое теорема эта получила отъ имени французскаго математика Муавра (Moivre), жившаго въ XVIII столѣтіи. Чтобы получить ее для n дробнаго и отрицательнаго возьмемъ выраженіе:

$$\cos \frac{n}{m} \varphi + i \sin \frac{n}{m} \varphi$$

и положимъ, что $\frac{n}{m}$ есть несократимая дробь. Возвысимъ это выраженіе въ m-ю степень, то найдемъ:

$$\left(\cos \frac{n}{m} \varphi + i \sin \frac{n}{m} \varphi\right)^m = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

но мы выше видѣли, что:

$$\cos n\varphi + i \sin n\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$\left(\cos \frac{n}{m} \varphi + i \sin \frac{n}{m} \varphi\right)^m = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

откуда, извлекая изъ обѣихъ частей уравненія корень m-й степени, найдемъ:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m} \varphi + i \sin \frac{n}{m} \varphi$$

это есть теорема Муавра для показателя дробнаго.

Возвысимъ теперь $\cos\varphi+i\sin\varphi$ въ $-n$ степень, то будемъ имѣть:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=\frac{1}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n}=\frac{1}{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}$$

помножая числитель и знаменатель послѣдней дроби на $\cos n\varphi-i\sin n\varphi$, найдемъ:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=\cos n\varphi-i\sin n\varphi$$

то есть теорема Муавра для отрицательнаго показателя.

Раздѣлимъ количества:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad \text{и} \quad z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

одно на другое, то будемъ имѣть:

$$\frac{z}{z_1}=\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}=\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)}$$

или:

$$\frac{z}{z_1}=\frac{\rho}{\rho_1}\left\{\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)\right\}$$

Откуда видимъ, что модуль частнаго двухъ составныхъ количествъ равенъ частному модулей дѣлимаго и дѣлителя, а аргументъ частнаго равенъ разности аргументовъ дѣлимаго и дѣлителя.

Модуль мы будемъ обозначать символомъ mod, начальнымъ слогомъ французскаго слова module — модуль.

§ 18. Произведеніе двухъ составныхъ количествъ:

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

какъ мы видѣли выше есть:

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\left\{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right\}$$

его легко построить слѣдующимъ образомъ:

Пусть OA и OB будутъ составныя количества z_1 и z_2 (фиг. 5), уголъ $OAX=\varphi_1$, $BOX=\varphi_2$, $OA=\rho_1$, $OB=\rho_2$. На оси X отложимъ $OC=1$ проведемъ AC, отложимъ $\angle DOB=\angle AOC=\varphi_1$ и $\angle DBO=\angle ACO$. Изъ построенія видимъ, что $\triangle AOC \infty \triangle DBO$, слѣдовательно:

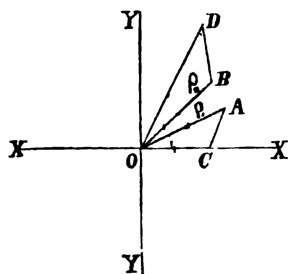
$$\rho_1:1=OD:\rho_2$$

откуда $\bmod OD = \rho_1\rho_2$, но $\angle DOC = \varphi_1 + \varphi_2$, слѣдовательно:

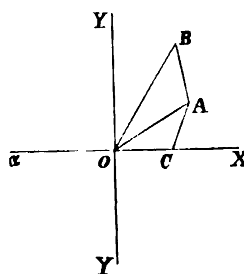
$$OD = \rho_1\rho_2 \{\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}$$

т. е. OD есть искомое произведеніе составныхъ количествъ z_1 и z_2.

Фиг. 5.



Фиг. 6.

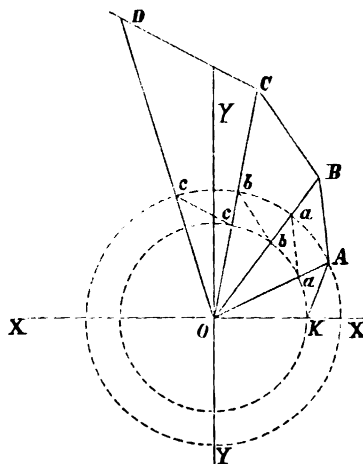


Если требуется построить z^2 при:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

то это дѣлается слѣдующимъ образомъ: пусть $OA = z$ (фиг. 6), на оси X отложимъ $OC = 1$, проведетъ AC, отложимъ $\angle AOB = \angle AOC = \varphi$, и $\angle OAB = \angle OCA$, то $\triangle OCA \sim \triangle OAB$, слѣдовательно:

Фиг. 7.



$$OB : \rho = \rho : 1$$

откуда $\bmod OB = \rho^2$, но $\angle BOC = 2\varphi$, слѣдовательно OB будетъ искомый квадратъ количества составнаго z, т. е.:

$$OB = z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Вообще, чтобы построить послѣдовательныя степени составнаго количества z надо поступать слѣдующимъ образомъ: около точки O (фиг. 7) описать двѣ окружности радіусами $OU=1$ и $OA=\rho$. Затѣмъ отложить при O φ, 2φ, 3φ, 4φ,... и соединить точки aa, bb, cc,... прямыми, затѣмъ проводятъ послѣдовательно имъ параллельныя прямыя KA, AB, BC, CD,... Прямыя OA, OB, OC, OD,.... очевидно представятъ геометрически степени z, z^2, z^3, z^4,... составнаго количества z. Геометрическое мѣсто точекъ K, A, B, C, D,... есть логариѳмическая спираль.

ГЛАВА III.

О функціяхъ.

§ 19. Имѣя весь количественный матеріалъ, посмотримъ какія дѣйствія совершаются надъ этимъ матеріаломъ.

Прежде всего опредѣлимъ, что такое *перемѣнное* количество?

Перемѣннымъ количествомъ въ алгебрѣ называютъ такое количество, которое можетъ получить неопредѣленное число значеній въ продолженіи вычисленій, т. е. не имѣетъ опредѣленнаго значенія.

Количества перемѣнныя обозначаютъ буквами $x, y, z\dots$ и $\xi, \eta, \zeta,\dots$ Если количество въ продолженіи вычисленія или изслѣдованія имѣетъ опредѣленную величину, то называется *постояннымъ* и обозначается буквами $a, b, c,\dots, \alpha, b, \gamma,\dots$ Если надъ перемѣннымъ количествомъ или надъ перемѣнными совершаютъ алгебраическія дѣйствія, прямыя или обратныя, то совокупность этихъ дѣйствій называется *функціею* того количества надъ которымъ совершено дѣйствіе. Напримѣръ:

$$x+a\ ,\ x-a\ ,\ a-x\ ,\ ax\ ,\ \frac{a}{x}\ ,\ ax^n\ ,\ \frac{a}{x^n}\ ,\dots.$$

всѣ эти выраженія суть функціи количества x, такъ какъ надъ ними совершены дѣйствія: къ x прибавлено постоянное количество a, изъ него вычтено a, оно вычтено изъ a, x помножено на a, a раздѣлено на x, x возвышено въ n-ю степень и умножено на a, a раздѣлено на x^n и т. д.

Алгебраическою функціею одного или нѣсколькихъ количествъ называется совокупленіе ихъ черезъ конечное число алгебраическихъ дѣйствій, какъ то: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень, извлеченія корней и рѣшенія уравненій. Если функція содержитъ въ себѣ только первыя пять дѣйствій — она называется *раціональною функціею;*

самыя дѣйствія носятъ названіе *раціональныхъ*. Если же въ функціюв входятъ два остальныя дѣйствія, т. е. извлеченіе корней и рѣшеніе уравненій, то въ первомъ случаѣ она называется *радикальною*, а во второмъ — *ирраціональною*; самыя дѣйствія носятъ названіе *радикальныхъ* и *ирраціональныхъ*. Если функція составлена изъ безконечнаго числа раціональныхъ дѣйствій, то она называется *трансцендентною*. Мы будемъ заниматься только изслѣдованіемъ алгебраическихъ функцій. Алгебраическія функціи бываютъ двухъ родовъ: *цѣлыя* и *дробныя*. Самый простой видъ цѣлой раціональной алгебраической функціи есть слѣдующій:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a^n$$

въ которой коэфиціенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ суть числа, которыя могутъ быть цѣлыя, дробныя и ирраціональныя дѣйствительныя или мнимыя. Если полиномъ расположенъ по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ перемѣннаго, то степень n перваго члена есть степень самой функціи. Уравненіе называется *алгебраическимъ*, если оно можетъ быть приведено къ виду $f(x) = 0$, гдѣ $f(x)$ есть цѣлая функція отъ перемѣннаго x.

Дробною раціональною функціей называется такая функція, въ которой числитель и знаменатель суть цѣлые раціональные полиномы какой нибудь степени. Напримѣръ функція:

$$\frac{1+x^2}{x^3-a}$$

есть дробная раціональная, а:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+x^2}$$

есть функція дробная радикальная.

Для обозначенія функціи, когда не показаны явно всѣ дѣйствія совершенныя надъ x, употребляются символы:

$$f(x)\ ,\ \mathrm{F}(x)\ ,\ \varphi(x)\ ,\ F(x)\ ,\ \Phi(x)\ ,\ \psi(x)\ ,\dots$$

гдѣ буквы f, F, $\varphi, \dots$ обозначаютъ совокупность дѣйствій совершенныхъ надъ x.

§ 20. Если надъ функціей совершается снова извѣстный рядъ дѣйствій, то говорятъ: *функція отъ функціи* или *функція функціи* отъ x и обозначаютъ символомъ $\Phi f(x)$, т. е. надъ x совершенъ рядъ дѣйствій, выраженный символомъ f, и надъ результатомъ совершенъ рядъ дѣйствій, выраженный символомъ Φ. Очевидно что означаетъ символъ $F\{\Phi f(x)\}$ и

т. д. Символы $F, f, \ldots$ суть символы *дѣйственные*; x, y, z, a, b, c, суть символы *количественные*, которые можно также разсматривать какъ дѣйственные. Въ выраженіи $f(x)$, f есть символъ дѣйствія, а x есть субъектъ дѣйствія. Если на количественный символъ x или a мы будемъ смотрѣть, какъ на дѣйствіе надъ единицей, то $x(1)$ или $a(1)$ будутъ функціи отъ единицы, а x и a обращаются въ символы дѣйственные.

Символы количественные, разсматриваемые, какъ дѣйственные, подлежатъ тремъ основнымъ законамъ, которые выражаются въ слѣдующей формѣ:

$$x(1)+a(1)=(x+a)(1)$$

$$x(1)a(1)=a(1)x(1)=x.a(1)$$

$$y(1)\{x(1)+a(1)\}=y(1)x(1)+y(1)a(1)=y(x+a)(1)$$

$$x^n(1).x^m(1)=x^{n+m}.(1)$$

Въ этой формѣ основные законы алгебры разсматриваются, какъ принадлежащіе не количественнымъ символамъ, а дѣйственнымъ.

Смотря по характеру и роду дѣйственныхъ символовъ f, F, $\Phi, \ldots$, нѣкоторые подлежатъ тремъ основнымъ законамъ алгебры, на такіе символы распространяются всѣ алгебраическіе преобразованія количественныхъ символовъ, вытекающія изъ трехъ основныхъ законовъ. Таковы, напримѣръ, символы дифференцированія, или производныхъ:

$$\frac{d}{dx}\ ,\ \frac{d}{dy}\ ,\ Dx\ ,\ Dy$$

такіе символы въ преобразованіяхъ ничѣмъ не отличаются отъ количественныхъ, разница только въ томъ, что въ послѣднихъ субъектъ дѣйствія есть единица, а въ первыхъ функція отъ x, y, $z, \ldots.$

§ 21. *Обратной функціей*, какой нибудь данной функціи, называется такая, которая уничтожаетъ дѣйствія данной; напримѣръ символы f и φ будутъ обратные, если имѣемъ:

$$f\varphi(x)=x$$

или:

$$\varphi f(x)=x$$

Если вспомнимъ что $x^{-n}.x^n=1$ или $x^{-1}.x^1(1)=1$, то по аналогіи, разсматривая x и x^{-1}, какъ символы дѣйственные, мы можемъ писать обратные функціональные символы въ формѣ f и f^{-1}; слѣдовательно f и f^{-1} суть

такіе функціональные символы, которые даютъ $f^{-1}f(x) = x$ или $ff^{-1}(x) = x$. Поэтому если мы будемъ имѣть двѣ функціи, обратныя одна другой, то всегда, если одну изъ нихъ будемъ обозначать символомъ f, то другую необходимо должны обозначить символомъ f^{-1}.

Возьмемъ, напримѣръ, самую простую функцію x^2, обратная ей, какъ извѣстно, есть $\sqrt{x}$ или $x^{1/2}$ и мы имѣемъ $(\sqrt{x})^2 = x$ или $\sqrt{x^2} = x$.

Если функція $\frac{1+x}{1-x}$ прямая, то обратная ей будетъ $\frac{x-1}{x+1}$; совершивъ надъ этой послѣдней дѣйствіе, означенное въ первой, получимъ x.

Если надъ x совершено дѣйствіе, выраженное символомъ φ, надъ полученнымъ результатомъ совершено опять тоже дѣйствіе φ, т. е. $\varphi\varphi(x)$, то это изображаютъ, по аналогіи съ $xx = x^2$, черезъ $\varphi^2(x)$; если надъ этимъ результатомъ совершено еще разъ тоже дѣйствіе, то это изображаютъ символомъ $\varphi^3(x)$ и т. д.

Бываютъ функціи такого рода, что по совершеніи нѣсколько разъ одного и того же дѣйствія, мы возвратимся опять къ перемѣнному x. Напримѣръ, если:

$$\varphi(x) = 1 - x$$

то:

$$\varphi^2(x) = x$$

Если:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$$

то:

$$\varphi^3(x) = x$$

и т. д.

Если функція $\varphi(x)$ будетъ такого свойства, что $\varphi^n(x) = x$, то написавъ ее въ формѣ $\varphi^{n-1}\varphi(x) = x$, мы видимъ, что $\varphi^{-1} = \varphi^{n-1}$, т. е. въ этомъ случаѣ, обратная функція будетъ та функція, которая получается, совершивъ надъ данною функціею $n-1$ дѣйствіе указанное символомъ φ.

§ 22. Самая простая цѣлая раціональная функція есть x^n, изъ которой составляется болѣе общая, цѣлая раціональная функція вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = f(x) = y$$

эта функція для каждаго числового значенія x даетъ для $f(x)$ или для y только одно значеніе, поэтому она называется функціей *однозначной*.— Вообще всѣ функціи, которыя для каждаго значенія перемѣннаго имѣютъ нѣсколько значеній, какъ мы увидимъ ниже, называются функціями *многозначными*.

Здѣсь представляется два вопроса: одинъ прямой, а другой обратный, именно:

По данной числовой величинѣ x, найти величину функціи $f(x)$ или y? Этотъ вопросъ рѣшенія весьма легокъ и даетъ всегда одно только значенія для y.

Второй вопросъ—обратный, по данному значенію y или $f(x)$, найти значеніе для x? Это одинъ изъ самыхъ трудныхъ вопросовъ алгебраическаго анализа и составляетъ ту его часть, которую называютъ *рѣшеніемъ уравненій всѣхъ степеней*.

Всякая функція, приравненная нулю, называется *уравненіемъ*. Если функція будетъ такого рода, что всѣ части ея между собою сокращаются независимо отъ числоваго значенія x, а только въ силу трехъ основныхъ законовъ, то уравненіе называется *тождествомъ*, напримѣръ:

$$(x-4)(x+4)-(x^2-16)=0$$

Но $x^2-16=0$ будетъ уравненіе, такъ какъ оно будетъ только равно нулю, когда $x=4$ или $x=-4$, другихъ же значеній x имѣть, въ этомъ случаѣ, не можетъ.

Пріемъ съ помощью котораго находятъ ту величину, которая обращаетъ данную функцію въ нуль, называется *рѣшеніемъ уравненія*.

Самая общая форма алгебраическаго уравненія есть:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, ... суть извѣстныя количества изъ всего алгебраическаго матеріала.

Рѣшить это уравненіе значитъ найти такое выраженіе или же такую алгебраическую комбинацію, составленную изъ a_0, a_1, a_2, ..., которая бы, будучи подставлена вмѣсто x, обращала $f(x)$ въ тождество. Здѣсь надобно различать два случая: первый когда a_0, a_1, ... суть буквенныя количества, а второй, когда a_0, a_1, a_2, ... суть числа, какого угодно рода. Въ первомъ случаѣ, требуется найти алгебраическую комбинацію изъ количествъ a_0, a_1, a_2, ..., которая бы, будучи подставлена въ $f(x)$, обратила ее въ нуль, а во второмъ случаѣ требуется найти такое *число* для x, которое бы обратило $f(x)$ въ нуль. Такая алгебраическая комбинація изъ a_0, a_1, a_2, ..., или *число*, называется *корнемъ* уравненія $f(x)=0$.

При буквенномъ значеніи a_0, a_1, ... можно найти для x алгебраическую комбинацію только въ томъ случаѣ, когда степень функціи $f(x)$ не выше четырехъ; для уравненія же высшихъ степеней такой алгебраической

комбинаціи, какъ будетъ показано ниже, не существуетъ, полагая, что комбинація должна быть составлена только изъ всѣхъ прямыхъ и обратныхъ алгебраическихъ дѣйствій.

Для уравненія первой степени:

$$f(x) = a_0x + a_1 = 0$$

комбинація есть:

$$x = -\frac{a_1}{a_0}$$

Если мы положимъ:

$$f(x) = a_0x + a_1 = y$$

то:

$$x = \frac{y - a_1}{a_0}$$

слѣдовательно обратная функція функціи $f(x)$, въ этомъ случаѣ будетъ:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - a_1}{a_0}$$

т. е. $ff^{-1}(x) = x$ или $f^{-1}f(x) = x$.

Для уравненія второй степени:

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

такая комбинація есть:

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a^2_1 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

Если положимъ:

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 = y$$

то обратная функція функціи $f(x)$, въ этомъ случаѣ, будетъ:

$$f^{-1}(x) = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a^2_1 - 4a_0(a_2 - x)}}{2a_0}$$

точно также можно найти комбинаціи для уравненій 3-й и 4-й степеней.

Слѣдовательно рѣшить уравненіе значитъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, и найти обратную функцію данной.

Пусть, напримѣръ, данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = 0$$

если положить $f(x)=y$ и рѣшить уравненіе $f(x)-y=0$, то положивъ, что рѣшеніе его есть:

$$x=\varphi(y)$$

мы будемъ имѣть:

$$f^{-1}(x)=\varphi(x)$$

Такъ какъ для уравненія первой степени существуетъ только одно рѣшеніе, то для функціи:

$$f(x)=a_0x+a_1=y$$

есть только одна обратная, какъ мы выше видѣли, именно:

$$f^{-1}(x)=\frac{x-a_1}{a_0}$$

Для уравненія второй степени существуетъ два рѣшенія, а потому функція:

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2=y$$

имѣетъ двѣ обратныя, именно:

$$f^{-1}(x)=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0(a_2-x)}}{2a_0}$$

и

$$f^{-1}(x)=\frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0(a_2-x)}}{2a_0}$$

Уравненіе третьей степени имѣетъ три рѣшенія, а потому функція:

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=y$$

имѣетъ три обратныя.

Уравненіе четвертой степени имѣетъ четыре рѣшенія, а слѣдовательно функція четвертой степени:

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=y$$

имѣетъ три обратныя и т. д.

Если коэфиціенты a_0, a_1, a_2,... суть *числа*, то всегда можно найти столько чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію $f(x)=0$, сколько въ показателѣ функціи находится единицъ; слѣдовательно $f(x)$ имѣетъ и столько же обратныхъ функцій. Для уравненій пятой степени и высшихъ степеней нѣтъ такой алгебраической комбинаціи, составленной изъ коэфиціентовъ

уравненія, которая-бы была обратной функціи $f(x)$; но если коэфиціенты суть числа, то всегда возможно найти такія числа, которыя удовлетворятъ уравненію какой бы то ни было степени. Что же касается до обратной функціи вообще, то ее всегда возможно представить символомъ и изслѣдовать ея свойства.

Такъ если мы будемъ имѣть уравненіе вида:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = y$$

то рѣшеніе этого уравненія можно представить въ видѣ символа, какъ мы уже условились выше:

$$x = f^{-1}(y)$$

и мы увидимъ ниже, что функція $f^{-1}(y)$ имѣетъ столько значеній, сколько въ показателѣ уравненія единицъ; въ настоящемъ случаѣ она имѣетъ n значеній.

§ 23. Таково происхожденіе алгебраическихъ функцій, за ними слѣдуютъ функціи *трансцендентныя*, какъ прямыя такъ и обратныя, онѣ имѣютъ большую аналогію съ алгебраическими.

Прямыя трансцендентныя функціи суть полиномы безконечно-большой степени или произведенія изъ безконечнаго числа линейныхъ множителей. Подъ первой формой онѣ извѣстны подъ именемъ *безконечныхъ рядовъ*, а подъ второй формой онѣ извѣстны подъ именемъ *безконечныхъ произведеній*. Таковы: sin, cos и т. д.

ГЛАВА IV.

Свойства цѣлой раціональной функціи.

§ 24. Займемся теперь цѣлой раціональной функціей:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

если дадимъ произвольное приращеніе h перемѣнному x, то функція сдѣлается:

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + a_2(x+h)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x+h) + a_n$$

разложимъ каждый ея членъ по формулѣ бинома Ньютона и отберемъ

члены независящіе отъ h, имѣющіе h въ первой степени, имѣющіе h во второй степени и т. д., то найдемъ:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) = {} & a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \\
& + h \left\{na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}\right\} \\
& + \frac{h^2}{1.2} \left\{n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \ldots + 1.2.a_{n-2}\right\} \\
& + \frac{h^3}{1.2.3} \left\{n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4} + \ldots + \right. \\
& \qquad \left. + 1.2.3.a_{n-3}\right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \left\{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.a_0x + (n-1)(n-2)\ldots 2.1.a_1\right\} \\
& + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\, n.(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 3.2.1.a_0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Означимъ коэфиціенты при

$$h \ , \ \frac{h^2}{1.2} \ , \ \frac{h^3}{1.2.3} \ , \ \frac{h^4}{1.2.3.4} \ , \ldots$$

символами:

$$f'(x) \ , \ f''(x) \ , \ f'''(x) \ , \ f''''(x) \ , \ldots\ldots , \ f^{(n)}(x)$$

то рядъ (2) сдѣлается:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots + \\
+ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Если внимательно размотрѣть какимъ образомъ $f'(x)$ получилась изъ $f(x)$, то замѣтимъ слѣдующее: каждый изъ членовъ $f(x)$ помноженъ на степень x, въ которой входитъ x въ этомъ членѣ, а показатель x уменьшенъ на единицу, именно:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-1} \tag{4}$$

послѣдній членъ a_n выброшенъ. Функція $f''(x)$ произошла изъ $f'(x)$ точно такимъ же образомъ, какъ $f'(x)$ произошла изъ $f(x)$, именно:

$$f''(x) = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \ldots\ldots + 2a_{n-2}$$

Функція $f'''(x)$ произошла изъ $f''(x)$ точно такъ, какъ $f''(x)$ изъ $f'(x)$ и т. д.

Эти функціи играютъ весьма важную роль въ анализѣ и называются *производными функціями* функціи $f(x)$ *перваго* порядка, *втораго* порядка, *третьяго* порядка и т. д. Слѣдовательно производная перваго порядка отъ функціи $f(x)$ есть коэфиціентъ у приращенія h въ первой степени въ разложеніи функціи по возрастающимъ степенямъ h.

Пояснимъ сказанное на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1.

$$f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x + 4$$

$$f'(x) = 15x^2 + 14x - 2$$

$$f''(x) = 30x + 14$$

$$f'''(x) = 30$$

Примѣръ 2.

$$f(x) = x^n\ ,\ f'(x) = nx^{n-1}\ ,\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\ ,\ f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ f^{(m)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)^{n-m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1\ ,\ f^{(n+1)}(x) = 0$$

Если $n = 1$, то $f'(x) = x' = 1$.

Примѣръ 3.

$$f(x) = x^3\ ,\ f'(x) = 3x^2\ ,\ f''(x) = 6x\ ,\ f'''(x) = 6\ ,\ f''''(x) = 0$$

Производная отъ x очевидно равна 1. Производная постояннаго A равна нулю. Въ самомъ дѣлѣ, A можно написать въ формѣ Ax^0, слѣдовательно его производная будетъ: $0.Ax^{0-1} = 0$.

§ 25. Если данная функція будетъ произведеніе двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій:

$$f(x) = \varphi(x).\psi(x)$$

то ея производная получится слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ первая производная есть коэфиціентъ у h въ разложеніи $f(x+h)$, то слѣдуетъ только отыскать этотъ коэфиціентъ въ произведеніи $\varphi(x).\psi(x)$ и посмотрѣть законъ его образованія.

Дадимъ приращеніе h перемѣнному x, то будемъ имѣть:

$$f(x+h)=\varphi(x+h).\psi(x+h)$$

Но такъ какъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть цѣлыя раціональныя функціи, то мы будемъ имѣть какъ выше:

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots.$$

$$\psi(x+h)=\psi(x)+h\psi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\psi''(x)+\ldots.$$

Перемножая и отбирая члены независящіе отъ h, содержащіе h въ первой степени, во второй и т. д., найдемъ:

$$f(x+h)=\varphi(x).\psi(x)+h\{\varphi(x)\psi'(x)+\psi(x)\varphi'(x)\}+\frac{h^2}{1.2}\{\ \ldots.\ \}+\ldots.$$

Слѣдовательно, по нашему опредѣленію, производная отъ $\varphi(x).\psi(x)$ будетъ:

$$f'(x)=\varphi(x)\psi'(x)+\psi(x)\varphi'(x) \tag{5}$$

Изъ этого выраженія видимъ, что производная отъ произведенія двухъ функцій равна: *произведенію одного изъ множителей на производную другого сложенному съ произведеніемъ другого множителя на производную перваго.*

Пояснимъ это на примѣрахъ:

Примѣръ 1.

$$f(x)=(x^2+2)(x^3-x^2-1)$$

$$f'(x)=(x^2+2)(3x^2-2x)+(x^3-x^2-1).2x$$

Примѣръ 2.

$$f(x)=x^5=x^3x^2$$

$$f'(x)=3x^2.x^2+2x.x^3=5x^4$$

Легко видѣть, что если:

$$f(x)=\varphi(x).\psi(x).\Phi(x)$$

то:

$$f'(x)=\varphi(x).\psi(x).\Phi'(x)+\varphi(x).\psi'(x).\Phi(x)+\varphi(x).\psi(x).\Phi(x)$$

и т. д.

§ 26. Если функція будетъ частное двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{6}$$

то производная функція найдется слѣдующимъ образомъ. Изъ выраженія (4) мы имѣемъ:

$$\varphi(x) = f(x).\psi(x)$$

откуда по (5):

$$\varphi'(x) = f(x).\psi'(x) + f'(x).\psi(x)$$

подставляя въ это уравненіе вмѣсто $f(x)$ его значеніе изъ (6) и опредѣляя оттуда $f'(x)$, найдемъ:

$$f'(x) = \frac{\varphi'(x).\psi(x) - \psi'(x).\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^2}$$

т. е. производная частнаго двухъ функцій равна: *произведенію производной числителя на знаменатель безъ произведенія производной знаменателя на числитель и все дѣленное на знаменатель въ квадратъ.*

Поясснимъ это правило на примѣрахъ:

Примѣръ 1.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+x+1)-(x^2-1)(3x^2+1)}{(x^3+x+1)^2}$$

Примѣръ 2.

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = \frac{0.x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$$

Слѣдовательно правило для производной при n положительномъ имѣетъ мѣсто и при n отрицательномъ.

Если:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

то очевидно:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ ,\quad f''(x) = -\frac{1.2}{x^3}\ ,\quad f'''(x) = -\frac{1.2.3}{x^4}\ ,\ldots$$

Примѣръ 3.

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

то:

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

§ 27. Если надъ перемѣннымъ x совершено дѣйствіе $\varphi(x)$ и затѣмъ надъ этимъ результатомъ совершено еще дѣйствіе $F\{\varphi(x)\}$, то такое дѣйствіе называется *функціей функціи*, такихъ послѣдовательныхъ дѣйствій можетъ быть нѣсколько. Напримѣръ, выраженіе $(x^2+1)^3$ есть функція функціи: сначала совершено дѣйствіе $\varphi(x)=x^2+1$ и надъ этимъ послѣднимъ совершено еще дѣйствіе возвышенія въ третью степень. Какъ же найти производную такой функціи?

Пусть:

$$f(x)=F\{\varphi(x)\}$$

дадимъ x-су приращеніе h, то найдемъ:

$$f(x+h)=F\{\varphi(x+h)\}$$

но:

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots.$$

или если означимъ:

$$y=\varphi(x)\quad,\quad k=h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\ldots.$$

то найдемъ:

$$f(x+h)=F\{\varphi(x)+k\}=F(y+k)$$

Разлагая по степенямъ приращенія k функцію $F(y+k)$, найдемъ:

$$f(x+h)=F(y)+kF'(y)+\frac{k^2}{1.2}F''(y)+\ldots.$$

подставляя въ это уравненіе вмѣсто k его величину, найдемъ:

$$f(x+h)=F(y)+hF'(y)\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\{\ \ldots.\ \}$$

Слѣдовательно производная функціи $f(x)$ будетъ:

$$f'(x)=F'(y).\varphi'(x)=F'(\varphi(x)).\varphi'(x)$$

т. е. берется производная отъ функціи $F\{\varphi(x)\}$, принимая $\varphi(x)$ за перемѣнное, и полученную, такимъ образомъ, производную помножаютъ на производную $\varphi'(x)$ функціи $\varphi(x)$.

Пояснимъ это правило на нѣсколькихъ примѣрахъ:

Примѣръ 1.

$$f(x)=(x^2+1)^3$$

здѣсь

$$\varphi(x)=x^2+1=y \quad , \quad F(y)=y^3$$

слѣдовательно:

$$F'(y)=3y^2 \quad , \quad \text{а} \quad \varphi'(x)=2x$$

откуда:

$$f'(x)=3y^2.2x=6\,(x^2+1)^2.x$$

Примѣръ 2.

$$f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$$

гдѣ m и n цѣлыя числа. Возвышая въ n степень обѣ части предъидущаго уравненія, найдемъ:

$$\{f(x)\}^n=x^m$$

возьмемъ производную обѣихъ частей, разсматривая первую часть, какъ функцію функціи, то найдемъ:

$$n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)=mx^{m-1}$$

откуда, подставляя вмѣсто $f(x)$ его значеніе, найдемъ:

$$n.x^{(n-1)\frac{m}{n}}.f'(x)=m.x^{m-1}$$

откуда легко получить:

$$f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

Слѣдовательно правило при отысканіи производной x^n, когда n есть число цѣлое прилагается и къ дробному показателю.

Примѣръ 3.

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Примѣръ 4.

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Легко видѣть, что если:

$$f(x) = \varphi(x) \pm \psi(x)$$

то:

$$f'(x) = \varphi'(x) \pm \psi'(x)$$

§ 28. Выше нашли, что:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x)$$

откуда:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{1.2} f''(x) + \frac{h^2}{1.2.3} f'''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n} f^n(x)$$

Если теперь будемъ приращеніе h уменьшать неопредѣленно, то числитель и знаменатель первой части будутъ приближаться къ нулю, а вторая часть будетъ приближаться къ конечной и опредѣленной функціи, именно производной $f'(x)$. Если наконецъ h сдѣлается равнымъ нулю, то будемъ имѣть:

$$\text{пр.}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)_{h=0} = \frac{0}{0} = f'(x)$$

Изъ этого видимъ, *что производная функція $f'(x)$ есть предѣлъ отношенія приращенія функціи къ приращенію перемѣннаго, когда приращеніе этого послѣдняго стремится къ нулю.*

Примѣръ 1. Пусть $f(x) = x^n$, требуется отыскать производную $f'(x)$?

По предъидущему мы имѣемъ:

$$\text{пр.}\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right)_{h=0} = f'(x) = (x^n)'$$

но:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}h + \ldots\ldots + h^{n-1}$$

дѣлая $h = 0$, найдемъ:

$$\text{пр.}\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right)_{h=0} = nx^{n-1} = f'(x)$$

какъ и выше.

Примѣръ 2. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, найти $f'(x)$?

Мы имѣемъ:

$$f'(x) = \text{пр.}\left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}\right)_{h=0}$$

умножая числителя и знаменателя предъидущей дроби на $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, найдемъ:

$$f'(x) = \text{пр.}\left(\frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\right)_{h=0} = \text{пр.}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right)_{h=0}$$

или:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

какъ было найдено и выше.

Разность между двумя послѣдовательными значеніями функціи $f(x)$ означаютъ чрезъ $\Delta f(x)$, а разность h между двумя послѣдовательными значеніями перемѣннаго x означаютъ чрезъ Δx, поэтому пишутъ:

$$\text{пр.}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0} = f'(x)$$

и въ предѣлѣ, когда $\Delta x = 0$, $\Delta f(x)$ и Δx означаютъ чрезъ $\partial f(x)$ и ∂x, поэтому пишутъ:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$$

Слѣдовательно символъ $\dfrac{\partial}{\partial x}$ выражаетъ взятіе производной функціи по перемѣнному x. Напримѣръ:

$$\frac{\partial x^n}{\partial x} = nx^{n-1} \quad , \quad \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \; , \ldots$$

Если данная функція будетъ отъ двухъ и болѣе перемѣнныхъ, то можно брать производную по каждому изъ нихъ, такъ напримѣръ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

суть производныя по x и по y отъ функціи $f(x,y)$.

Примѣръ. Пусть:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

производныя будутъ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{2x(x+y)-(x^2-y^2)}{(x+y)^2} \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{-2y(x+y)-(x^2-y^2)}{(x+y)^2}$$

Дѣйствіе выраженное символомъ $\frac{\partial}{\partial x}$ называется *дифференцированіемъ функцій*, это дѣйствіе прямое, обратное же, когда по данно производной требуется найти начальную функцію называется *интегрированіемъ*, оно обозначается символомъ $\frac{\partial^{-1}}{\partial x}$ или символомъ $\int$, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^{-1}}{\partial x}(x^n)=\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad \frac{\partial^{-1}}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x} \quad , \ldots .$$

Такъ какъ дѣйствія $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial^{-1}}{\partial x}$ суть обратныя одно другому, то вообще имѣемъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{-1}}{\partial x}f(x)=\frac{\partial^{-1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}f(x)=f(x)$$

Замѣтимъ, что прямое дѣйствіе, т. е. дифференцированіе всегда возможно, а обратное, т. е. интегрированіе возможно только въ рѣдкихъ случаяхъ, такъ напримѣръ дѣйствіе:

$$\frac{\partial^{-1}}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

невозможно. — Если будемъ имѣть:

$$z=f(y) \quad , \quad \text{а} \quad y=\varphi(x)$$

т. е.

$$z=f(\varphi(x))$$

то производная отъ z по x выразится символомъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

гдѣ $\frac{\partial f}{\partial y}$ есть производная отъ $f(y)$ по y, а $\frac{\partial y}{\partial x}$ есть производная отъ функціи $\varphi(x)$ по x.

Замѣтимъ еще, что если $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ есть функція отъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$, то символъ:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\cdots$$

будетъ выражать дѣйствіе:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\ldots\right)f=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_3}+\ldots$$

т. е. сумму производныхъ по перемѣннымъ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ Если производныя берутся послѣдовательно, то онѣ обозначаются символами:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \ldots\ldots$$

Примѣръ. Если $f(x)=x^n$, то:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=nx^{n-1} \quad . \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=n(n-1)x^{n-2} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=n(n-1)(n-2)x^{n-3},\ldots$$

Вслѣдствіе такого обозначенія мы будемъ писать:

$$f(x+\partial x)=f(x)+\partial x.\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial x^2}{1.2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial x^3}{1.2.3}.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots+\frac{\partial x^n}{1.2\ldots n}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

Символъ $\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}$ показываетъ, что надобно взять производную отъ $f(x,y)$, сначала по x, а затѣмъ по y.

Примѣръ:

$$f(x,y)=3x^4-2x^2y^2+zx-y^3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=12x^3-4xy^2+z$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-4x^2y-3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x.\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y.\partial x}=-8xy$$

Изъ послѣдняго выраженія видимъ, что производная взятая сначала по одному перемѣнному, а затѣмъ по другому, даетъ результатъ одинъ и тотъ-же, съ какого-бы перемѣннаго не начали. Лагранжъ (Lagrange) обозначилъ производную функцію функціи $f(x)$ символомъ $f'(x)$; Коши (Cauchy) обозначилъ ее символомъ $D_x f(x)$, гдѣ внизу поставленное x показываетъ по какому перемѣнному взята производная, такъ какъ въ составъ функціи могутъ входить и другія перемѣнныя. Буква D напоминаетъ французское слово *dérivée—производная.* Лейбницъ для обозначенія производной ввелъ символъ $\frac{\partial}{\partial x}$, вошедшій во всеобщее употребленіе.

§ 29. Мы видѣли выше, что составное количество:

$$z = x + yi$$

или:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

гдѣ $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, представляетъ точку на плоскости, если x и y будемъ принимать за общину и ординату. Если x и y въ выраженіи $z = x + yi$ свяжемъ какимъ нибудь уравненіемъ $F(x, y) = 0$, то измѣняя x и y такъ, чтобы эти перемѣнныя удовлетворяли уравненію $F(x, y) = 0$ и относя ихъ къ координатнымъ осямъ, мы заставимъ z двигаться или скользить по кривой $F(x, y) = 0$. Такъ, если мы положимъ $y = x$, то $z = x + yi$ будетъ скользить по прямой, равнодѣлящей уголъ между координатными осями; или, если въ выраженіи $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ будемъ измѣнять уголъ φ, а ρ оставимъ постояннымъ, то z будетъ скользить по окружности круга, коего центръ находится въ началѣ координатъ, а радіусъ равенъ ρ. Если положимъ $y^2 = 2px$, то z будетъ скользить по параболѣ. И вообще устанавливая извѣстную зависимость между x и y мы можемъ заставить перемѣнное z скользить по какой угодно кривой линіи.

§ 30. Мы выше видѣли, что какія-бы алгебраическія дѣйствія не совершали надъ составнымъ количествомъ $z = x + yi$, результатъ всегда будетъ также составное количество, поэтому цѣлая раціональная, или вообще алгебраическая функція отъ z будетъ имѣть форму составного количества:

$$f(z) = X + Yi$$

гдѣ X и Y суть функціи отъ x и y:

$$X = \varphi(x, y) \quad , \quad Y = \psi(x, y)$$

Примѣръ. Пусть напримѣръ:

$$f(z) = z^2$$

то будемъ имѣть:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

слѣдовательно:

$$X = x^2 - y^2 \qquad Y = 2xy$$

Символомъ $M.f(z)$ мы будемъ обозначать модуль функціи $f(z)$, т. е. количество:

$$+\sqrt{X^2 + Y^2}$$

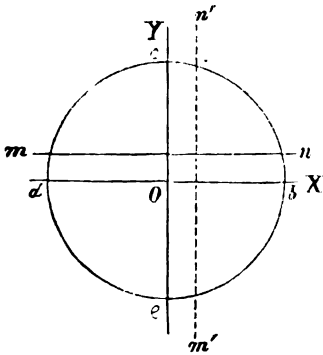
Если теперь условимся X и Y принимать за координаты точки на плоскости, отнесенной къ другимъ координатнымъ осямъ, то функція $f(z)$ будетъ также скользить по кривой, которой форма и характеръ будутъ зависить отъ кривой, по которой скользитъ z. Гауссъ назвалъ вторую кривую *образомъ* первой.

Примѣръ. Пусть:

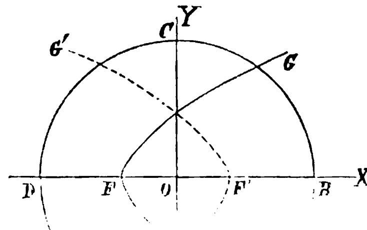
$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = X + Yi$$

Возьмемъ двѣ системы координатныхъ осей: X, Y и x, y, и отнесемъ положеніе z къ системѣ (фиг. 8), а положеніе $f(z)$ къ системѣ (фиг. 9).

Фиг. 8.



Фиг. 9.



Положимъ, что z скользитъ по оси x, слѣдовательно уравненіе этой кривой будетъ $y = 0$. Но:

$$X = x^2 - y^2 \quad , \quad Y = 2xy$$

полагая въ этихъ выраженіяхъ $y = 0$, найдемъ:

$$X = x^2 \quad , \quad Y = 0$$

откуда видимъ, что кривая по которой скользитъ $f(x)$, когда z скользитъ по оси x, будетъ только положительная часть оси X, въ другой системѣ координатъ (фиг. 9). Положимъ, что z скользитъ по кругу, коего радіусъ есть ρ, такъ какъ $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то найдемъ, что:

$$X = x^2 - y^2 = \rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \rho^2\cos 2\varphi \quad , \quad Y = \rho^2\sin 2\varphi$$

откуда найдемъ:

$$X^2 + Y^2 = \rho^4$$

слѣдовательно функція $f(z)$ будетъ скользить по кругу, коего радіусъ есть

ρ^2. Но замѣчательно въ этомъ то, что если z опишетъ полуокружность *bcд*, изъ точки b прійдетъ въ точку *д*, то $f(z)$ опишетъ всю окружнесть $BCDEB$.

Пусть еще z опишетъ прямую mn, параллельную оси x. Слѣдовательно $y=a$, откуда:

$$X = x^2 - a^2 \quad , \quad Y = 2ax$$

исключая x, найдемъ:

$$Y^2 = 4a^2X + 4a^4$$

а это есть уравненіе параболы GFH, которая встрѣчаетъ ось Y въ точкахъ $Y = \pm 2a^2$, а пересѣкаетъ ось X въ точкѣ $X = -a^2$. Если z опишетъ прямую $m'n'$, параллельную оси y, то парабола будетъ $G'F'H'$ (фиг. 9).

Возьмемъ еще примѣръ. Пусть:

$$f(z) = \sqrt{z}$$

Подставляя вмѣсто z выраженіе $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, найдемъ:

$$f(z) = \rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

слѣдовательно:

$$X = \rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2} \quad , \quad Y = \rho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Изъ этихъ выраженій видимъ, что если z опишетъ полуокружность bcd, то $f(z)$ опишетъ четверть окружности BC и придетъ въ точку C, когда z по дугѣ bcd, придетъ въ точку d (фиг. 8). Если z опишетъ полуокружность bed и придетъ въ ту же точку d, то $f(z)$ прійдетъ въ точку E. Изъ этого заключаемъ, что въ то время, когда z приходитъ въ точку d различными путями, по дугѣ bcd и по дугѣ bed, функція $f(z)$ приходитъ въ различныя точки плоскости C и E. Когда z возвратится въ точку исхода b, то $f(z)$ прійдетъ въ точку D различными путями: по дугѣ CD и по дугѣ ED (фиг. 9).

Изъ этого примѣра видимъ, что положеніе точки представляемой $f(z)$ зависитъ отъ дуги описанной z, при переходѣ отъ одной точки въ другую.

ГЛАВА V.

Разложеніе цѣлой раціональной функціи на линейные множители.

§ 31. Покажемъ теперь, что для цѣлой раціональной функціи:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} z + a_n \qquad (1)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть количества дѣйствительныя или составныя, существуетъ всегда такое количество дѣйствительное или составное, которое будучи подставлено въ (1) обращаетъ эту функцію въ нуль. Такое количество называется *корнемъ уравненія* n-й степени:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} z + a_2 = 0 \qquad (2)$$

Для доказательства этого важнаго предложенія мы предпошлемъ ему слѣдующее:

§ 32. *Предложеніе.* Если цѣлая раціональная функція $f(z)$ отъ z обращается въ нуль, при $z=0$, то всегда можно найти такое положительное число r, что для всѣхъ значеній z, коихъ модуль будетъ заключатся между 0 и r, модуль $f(z)$ будетъ меньше произвольно даннаго числа R.

Доказательство. Пусть данная функція будетъ:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} z \qquad (3)$$

которая, очевидно, при $z=0$ обращается въ нуль. Замѣтимъ здѣсь, что нѣкоторые изъ коэфиціентовъ: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ могутъ быть равны нулю.

Пусть ρ будетъ модуль количества z; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ модули количествъ: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Такъ какъ модуль суммы меньше суммы модулей слагаемыхъ (§ 16), то будемъ имѣть:

$$Mf(z) < \alpha_0 \rho^n + \alpha_1 \rho^{n-1} + \alpha_2 \rho^{n-2} + \alpha_3 \rho^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-1} \rho$$

Если изъ модулей $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ выберемъ наибольшій и назовемъ его чрезъ α, то тѣмъ болѣе:

$$Mf(z) < \alpha(\rho^n + \rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \ldots\ldots + \rho^2 + \rho) = \alpha\,\frac{\rho^{n+1} - \rho}{\rho - 1}$$

или:

$$Mf(z) < \alpha\,\frac{\rho - \rho^{n+1}}{1 - \rho}$$

Если положимъ, что $\rho < 1$, то тѣмъ болѣе:

$$M.f(z) < \frac{\alpha\rho}{1-\rho}$$

Слѣдовательно, чтобы $Mf(z)$ былъ меньше числа R, надобно только положить:

$$Mf(z) < \frac{\alpha\rho}{1-\rho} < R$$

или:

$$\rho < \frac{R}{\alpha + R}$$

Слѣдовательно, если положимъ:

$$r = \frac{R}{\alpha + R}$$

то модуль функціи $f(z)$ будетъ меньше R, для всѣхъ значеній z, коихъ модуль заключается между 0 и r.

Слѣдствіе 1. Если функція $f(z)$ и перемѣнное z будутъ величины дѣйствительныя, то наше предложеніе обращается въ слѣдующее:

Если $f(z)$, при $z = 0$, обращается въ нуль, то можно всегда найти такое числовое значеніе r, что для всѣхъ числовыхъ значеній перемѣннаго z, которыя заключаются между 0 и r, числовое значеніе $f(z)$ будетъ меньше произвольно взятаго числа R, какъ-бы оно мало ни было:

Слѣдствіе 2. Если:

$$f(z) = a_{n-\mu} z^{\mu} + a_{n-\mu-1} z^{\mu+1} + a_{n-\mu-2} z^{\mu+2} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_0 z^n \quad (4)$$

есть цѣлая раціональная функція z, расположенная по возрастающимъ степенямъ z, то написавъ ее въ формѣ:

$$f(z) = a_{n-\mu} z^{\mu} (1 + \varepsilon)$$

гдѣ, очевидно:

$$\varepsilon = \frac{a_{n-\mu-1}}{a_{n-\mu}} z + \frac{a_{n-\mu-2}}{a_{n-\mu}} z^2 + \ldots\ldots + \frac{a_1}{a_{n-\mu}} z^{n-\mu-1} + \frac{a_0}{a_{n-\mu}} z^{n-\mu}$$

найдемъ такое положительное число r, что для всѣхъ значеній перемѣннаго z, коихъ модуль будетъ заключатся между 0 и r, модуль ε будетъ постоянно меньше какого нибудь даннаго положительнаго числа R.

Въ самомъ дѣлѣ, ε есть функція обращающаяся въ нуль, при $z=0$, слѣдовательно къ ней надобно только приложить предложеніе § 32.

Слѣдствіе 3. Если $f(z)$ и перемѣнное z суть количества дѣйствительныя, то функція $f(z)$ для всѣхъ числовыхъ значеній z, которыя будутъ меньше нѣкотораго предѣла r, функція $f(z)$ будетъ имѣть постоянно знакъ своего перваго члена.

Слѣдствіе 4. Если:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}z+a_n \tag{5}$$

есть цѣлая раціональная функція расположенная по убывающимъ степенямъ перемѣннаго z, которую если напишемъ въ формѣ:

$$f(z)=a_0z^n(1+\varepsilon) \tag{6}$$

то можно найти такое положительное число r, что для всѣхъ значеній z, коихъ модули больше r, функція ε будетъ постоянно меньше произвольно взятаго положительнаго числа R.

Въ самомъ дѣлѣ, ε имѣетъ форму:

$$\varepsilon=\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{z}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{a_3}{a_0}\cdot\frac{1}{z^3}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{z^n}$$

модуль этой функціи будетъ меньше R для всѣхъ значеній $\frac{1}{z}$, коихъ модули будутъ меньше $\frac{1}{r}$, количество которое можно опредѣлить (§ 32), т. е. для всѣхъ значеній z, коихъ модуль будетъ больше r.

Если функція $f(z)$ и перемѣнное z суть величины дѣйствительныя, то легко видѣть, что для всѣхъ числовыхъ значеній z, которыя будутъ больше извѣстнаго положительнаго числа r, функція $f(z)$ будетъ имѣть знакъ своего перваго члена.

§ 33. *Предложеніе.* Модуль цѣлой раціональной функціи $f(z)$ дѣлается безконечностью вмѣстѣ съ модулемъ перемѣннаго z.

Доказательство. Пусть будетъ:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

или:

$$f(z)=a_0z^n(1+\varepsilon)$$

или:

$$\frac{f(z)}{a_0z^n}=1+\varepsilon$$

откуда (§ 16):

$$M.\frac{f(z)}{a_0 z^n} = \frac{M.f(z)}{\alpha_0 \rho^n} \begin{matrix} < 1+\eta \\ > 1+\eta \end{matrix}$$

гдѣ α_0, ρ, η суть модули количествъ a_0, z и ε.

Если теперь ρ стремится къ безконечности, то η будетъ приближаться къ нулю, слѣдовательно въ предѣлѣ:

$$\text{пр.}\ \frac{M.f(z)}{\alpha_0 \rho^n} = 1$$

а это тогда возможно, когда при $\rho = \infty$ и $Mf(z) = \infty$.

§ 34. *Предложеніе.* Цѣлая раціональная функція $f(z)$ непрерывна.

Доказательство. Мы видѣли выше, что если z получитъ приращеніе h, то будемъ имѣть:

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{h^2}{1.2}f''(z) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(z)$$

откуда:

$$f(z+h) - f(z) = hf'(z) + \frac{h^2}{1.2}f''(z) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(z) + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n}f^{(n)}(z)$$

или:

$$f(z+h) - f(z) = hf'(z)\{1+\varepsilon\}$$

гдѣ ε есть количество, котораго модуль можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины (§ 32). Слѣдовательно, если h такъ измѣняется, что его модуль неопредѣленно убываетъ, то модуль разности:

$$f(z+h) - f(z)$$

будетъ убывать также неопредѣленно. Такая функція $f(z)$ называется непрерывная.

Если перемѣнное z и $f(z)$ суть количества дѣйствительныя, то разность:

$$f(z+h) - f(z)$$

съ неопредѣленнымъ убываніемъ приращенія h, неопредѣленно убываетъ.

§ 35. *Предложеніе.* Если дѣйствительная функція $f(z)$ для двухъ дѣйствительныхъ значеній z_0 и z_1 имѣетъ противные знаки, т. е. если $-f(z_0)$, то $+f(z_1)$, или если $+f(z_0)$, то $-f(z_1)$, то между значеніями z_0 и z_1 будетъ такое значеніе z, одно или нѣсколько, для котораго функція $f(z)$ обращается въ нуль.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы этого не было, то функція $f(z)$ перешла-бы отъ положительнаго значенія къ отрицательному, не переходя черезъ нуль, что по закону непрерывности невозможно.

Основное предложеніе теоріи уравненій.

§ 36. *Предложеніе.* Для всякой цѣлой функціи перемѣннаго z всегда есть, по крайней мѣрѣ, одно значеніе дѣйствительное или составное, которое будучи подставлено въ функцію вмѣсто z, обращаетъ ее въ нуль. Такое значеніе перемѣннаго называется корнемъ уравненія:

$$f(z)=0$$

Доказательство. Пусть данная функція будетъ:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ +a_{n-1}z+a_n=0 \qquad (7)$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, ... суть количества дѣйствительныя или мнимыя. Возьмемъ какое нибудь частное значеніе для $z=z_0=x_0+y_0i$ и подставимъ его въ (7). Результатъ подстановленія очевидно будетъ:

$$f(z)=f(x_0+y_0i)=X_0+Y_0i \qquad (8)$$

Если-бы взятое значеніе было корнемъ уравненія (7), то мы бы имѣли:

$$f(x_0+y_0i)=X_0+Y_0i=0$$

а слѣдовательно $X_0=0$ и $X_0=0$; но вообще это не случается. Поэтому модуль функціи будетъ имѣть извѣстную положительную величину:

$$M.f(x_0+y_0i)=+\sqrt{X^2_0+Y^2_0} \qquad (9)$$

Въ этомъ случаѣ можно дать приращеніе h количеству x_0+y_0i и выбрать его всегда такъ, что модуль для этого значенія будетъ меньше модуля предъидущаго, т. е.:

$$M.f(x_0+y_0i)>M.f(x_0+y_0i+h)=+\sqrt{X^2_1+Y^2_1}$$

или:

$$X^2_0+Y^2_0>X^2_1+Y^2_1$$

Означимъ для краткости $x_0+y_0i=z_0$; разложимъ $f(z_0+h)$ по степе-

нямъ h, то:

$$f(z_0+h)=f(z_0)+hf'(z_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(z_0)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(z_0)+\ldots+$$

$$+\frac{h^m}{1.2..m}f^{(m)}(z_0)+\ldots.+\frac{h^n}{1.2..n}f^{(n)}(z_0)$$

$f(z_0)$ обратится въ нуль не можетъ, такъ какъ z_0, по условію, не есть корень данной функціи, но $f'(z_0)$, $f''(z_0),\ldots$ могутъ обратиться въ нули и положимъ, для большей общности, что функціи $f'(z_0)$, $f''(z_0),\ldots.$, до $f^{(m)}(z_0)$ исключительно, обращаются въ нуль, въ этомъ предположеніи будемъ имѣть:

$$f(z_0+h)=f(z_0)+\frac{h^m}{1.2.3...m}f^{(m)}(z_0)+$$

$$+\frac{h^{m+1}}{1.2.3..m+1}f^{(m+1)}(z_0)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(z)$$

раздѣляя на $f(z_0)$ мы можемъ написать:

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+h^mZ_m+h^{m+1}Z_{m+1}+\ldots\ldots+h^nZ_n$$

гдѣ:

$$Z_m=\frac{1}{1.2.3\ldots m}\,\frac{f^{(m)}(z_0)}{f(z_0)}\quad,\quad Z_{m+1}=\frac{1}{1.2.3\ldots.m+1}\,\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{f(z_0)}\quad,\quad\ldots$$

Если положимъ:

$$h=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)\quad,\quad\text{а}\quad Z_p=B_p(\cos\alpha_p+i\sin\alpha_p)$$

то подставляя найдемъ:

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1&+B_m\rho^m\{\cos(m\omega+\alpha_m)+i\sin(m\omega+\alpha_m)\}\\&+B_{m+1}\rho^{m+1}\{\cos((m+1)\omega+\alpha_{m+1})+i\sin((m+1)\omega+\alpha_{m+1})\}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad(10)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+B_n\rho^n\{\cos(n\omega+\alpha_n)+i\sin(n\omega+\alpha_n)\}\end{aligned}$$

Такъ какъ h есть количество произвольное, то можно аргументъ ω такъ опредѣлить, чтобы $m\omega+\alpha_m=\pi$, откуда:

$$\cos(m\omega+\alpha_m)=-1\qquad\sin(m\omega+\alpha_m)=0$$

слѣдовательно уравненіе (10) сдѣлается:

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 - B_m\rho^m +$$

$$+ B_{m+1}\rho^{m+1}\{\cos((m+1)\omega+\alpha_{m+1}) + i\sin((m+1)\omega+\alpha_{m+1})\} + \ldots \qquad (11)$$

гдѣ ω должно быть опредѣлено изъ условія $m\omega + \alpha_m = \pi$.

Такъ какъ ρ есть количество произвольное, то можно его такъ выбрать, чтобы:

$$B_m\rho^m < 1$$

или:

$$\rho < \frac{1}{\sqrt[m]{B_m}}$$

при этомъ условіи $1 - B_m\rho^m$ будетъ величина положительная, а слѣдовательно будетъ сама своимъ модулемъ.

Если возьмемъ модуль первой части (11) и сумму модулей второй части, то найдемъ (§ 16):

$$\frac{M.f(z_0+h)}{M.f(z_0)} < 1 - B_m\rho^m + B_{m+1}\rho^{m+1} + B_{m+2}\rho^{m+2} + \ldots + B_n\rho^n$$

или:

$$\frac{M.f(z_0+h)}{M.f(z_0)} < 1 - B_m\rho^m\left\{1 - \frac{B_{m+1}}{B_m}\rho - \frac{B_{m+2}}{B_m}\rho^2 - \ldots - \frac{B_n}{B_m}\rho^{n-m}\right\} \qquad (12)$$

Если ρ будетъ убывать неопредѣленно, то по § 33, слѣд. 3, можно дать ρ такое числовое значеніе, что:

$$\frac{B_{m+1}}{B_m}\rho + \frac{B_{m+2}}{B_m}\rho^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{B_n}{B_m}\rho^{n-m} < 1$$

Слѣдовательно количество въ скобкахъ въ (12) будетъ меньше единицы. Но $B_m\rho^m$ меньше единицы, слѣдовательно второй членъ весь меньше единицы, а слѣдовательно и ея вторая часть (12) меньше единицы, т. е. имѣемъ:

$$\frac{Mf(z_0+h)}{Mf(z_0)} < 1$$

откуда:

$$Mf(z_0+h) < M.f(z_0)$$

что и требовалось доказать.

Остается теперь показать, что всегда можно найти такое значеніе для z, для котораго $f(z)=0$.

Мы только что показали, что если $f(z_0)$ не равна нулю, то можемъ найти такое значеніе $z_1 = z_0 + h$, что

$$M.f(z_1) < M.f(z_0)$$

и если $f(z_1)$ не равна нулю, то опять можно найти такое значеніе для $z_2 = z_1 + h_1$, что:

$$M.f(z_2) < M.f(z_1)$$

продолжая такое разсужденіе найдемъ неопредѣленный рядъ значеній перемѣннаго z:

$$z_0 \;,\; z_1 \;,\; z_2 \;,\; z_3 \;,\; z_4 \;,\; z_5 \;,\; z_6 \;, \ldots .$$

для которыхъ модули функціи $f(z)$ будутъ уменьшаться неопредѣленно, но такъ какъ модуль функціи есть величина всегда положительная, то уменьшаясь неопредѣленно, должна наконецъ сдѣлатся равна нулю. Откуда слѣдуетъ, что есть такое значеніе перемѣннаго z, для котораго данная функція обращается въ нуль.

Предложеніе о существованіи корня для каждаго уравненія есть одно изъ самыхъ важныхъ въ анализѣ. Докательство этой теоремы занимало умы величайшихъ математиковъ прошлаго и начала настоящаго столѣтій. Первый, предложившій доказательство существованія корня, былъ французскій геометръ Даламбертъ (d'Alembert, 1746 г.). Другія доказательства были предложены Эйлеромъ (Euler, 1749 г.), Лагранжемъ (Lagrange, 1772 г.), Гауссомъ (Gauss, 1799 г), Лежандромъ (Legendre), Коши (Cauchy, 1821 г.), Морганомъ (Morgan), Гамильтономъ (Hamilton) и мног. другими. Доказательство приведенное нами принадлежитъ Коши.

§ 37. Если $z = x + yi$ есть корень функціи $f(z)$, то:

$$f(x+yi) = \varphi(x,y) + i\,\psi(x,y) = 0$$

откуда:

$$\varphi(x,y) = 0 \quad , \quad \psi(x,y) = 0$$

гдѣ $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ суть дѣйствительныя функціи. Если изъ этихъ двухъ уравненій опредѣлимъ x и y, которыя пусть будутъ: (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots$, то корни даннаго уравненія будутъ:

$$x_0 + y_0 i \quad , \quad x_1 + y_1 i \quad , \quad x_2 + y_2 i \;, \ldots .$$

Примѣръ. Пусть данное уравненіе будетъ

$$f(z) = z^2 + pz + q = 0$$

подставляя вмѣсто z величину $x + yi$, найдемъ:

$$x^2 - y^2 + px + q + i(2xy + py) = 0$$

откуда:

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 + px + q \quad , \quad \psi(x, y) = 2xy + py$$

полагая:

$$x^2 - y^2 + px + q = 0 \quad , \quad (2x + p)y = 0$$

найдемъ изъ второго уравненія (13) $y = 0$ или $2x + p = 0$; первое $y = 0$ даетъ дѣйствительное уравненіе:

$$x^2 + px + q = 0$$

а второе даетъ $x = -\frac{p}{2}$, подставляя въ первое изъ уравненій (13), найдемъ:

$$y^2 = +q - \frac{p^2}{4}$$

откуда:

$$y = \pm\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

а слѣдовательно:

$$z = x + yi = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

подводя i подъ корень найдемъ извѣстную формулу:

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

§ 38. *Предложеніе*. Цѣлая раціональная функція перемѣннаго z n-й степени разлагается на произведеніе n линейныхъ множителей, умноженное на коэфиціентъ у x-а n-й степени.

Доказательство. Пусть данная функція будетъ:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a^n$$

пусть z_1 будетъ корень уравненія $f(z) = 0$. Раздѣлимъ $f(z)$ на $z - z_1$, озна-

чимъ частное чрезъ $f_1(z)$ и остатокъ чрезъ R, то будемъ имѣть:

$$f(z) = (z - z_1) f_1(z) + R$$

если въ этомъ тождествѣ сдѣлаемъ $z = z_1$, то найдемъ:

$$f(z_1) = R$$

Слѣдовательно остатокъ R равенъ данной функціи $f(z)$, въ которую подставленъ корень z_1, но $f(z_1) = 0$, слѣдовательно и $R = 0$, откуда:

$$f(z) = (z - z_1) f_1(z)$$

Легко видѣть, что $f_1(z)$ есть функція $n-1$ степени, коей первый членъ есть $a_0 z^{n-1}$. Такъ какъ $f_1(z)$ есть цѣлая функція отъ z, то она въ свою очередь имѣетъ корень по § 36, который, означивъ чрезъ z_2, найдемъ:

$$f_1(z) = (z - z_2) f_2(z)$$

гдѣ $f_2(z)$ есть цѣлая функція отъ z $n-2$-й степени, въ которой первый членъ есть $a_0 z^{n-2}$. Означивъ чрезъ z_3 корень функціи $f_2(z)$ опять найдемъ:

$$f_2(z) = (z - z_3) f_3(z)$$

Продолжая подобное разсужденіе дойдемъ наконецъ до:

$$f_{n-1}(z) = (z - z_n) a_0$$

откуда, соображаясь со всѣми предидущими уравненіями, найдемъ:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (z - z_n) \qquad (14)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что $f(z)$ обращается въ нуль при n значеніяхъ z, именно при $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$, ... , $z = z_n$.

Поэтому говорятъ, что цѣлая функція n-й степени перемѣннаго z имѣетъ n корней, т. е. функція имѣетъ столько корней, сколько въ ея степени единицъ.

Если въ уравненіи (14) будетъ нѣсколько равныхъ корней, напримѣръ, если $z_1 = z_2 = z_3$, то чтобы послѣднее предложеніе имѣло мѣсто и въ этомъ случаѣ, мы будемъ одинъ корень, повторенный три раза, считать за три корня.

Предложеніе это дано было англійскимъ математикомъ Гарріотомъ (Harriot, 1568—1621).

Слѣдствіе. Если перемножимъ линейные множители въ (14), и расположимъ ихъ по степенямъ z, то найдемъ, что коэфиціенты при z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, z^{n-3}, . . . , z, z^0 будутъ:

$$+a_0$$

$$-a_0(z_1+z_2+z_3+z_4+\ldots\ldots+z_n)$$

$$+a_0(z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+\ldots+z_2z_3+z_2z_4+\ldots\ldots+z_{n-1}z_n)$$

$$-a_0(z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+\ldots+z_2z_3z_4+\ldots\ldots+z_{n-2}z_{n-1}z_n)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a_0.z_1z_2z_3z_4\ldots\ldots\ldots\ldots z_{n-3}z_{n-2}z_{n-1}z_n$$

Сравнивая эти коэфиціенты съ коэфиціентами функціи:

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

найдемъ:

$$a_1=(-1)\,a_0(z_1+z_2+z_3+z_4+\ldots\ldots\ldots+z_n)=(-1)\,a_0\sum_1^n z_r$$

$$a_2=(-1)^2a_0(z_1z_2+z_1z_3+\ldots\ldots\ldots+z_{n-1}z_n)=(-1)^2a_0\sum_1^n z_rz_s$$

$$a_3=(-1)^3a_0(z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+\ldots\ldots+z_{n-2}z_{n-1}z_n)=(-1)^3a_0\sum_1^n z_rz_sz_t \qquad (15)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n=(-1)^n a_0.z_1z_2z_3z_4\ldots\ldots\ldots\ldots z_{n-2}.z_{n-1}z_n$$

Откуда видимъ, что коэфиціентъ a_1 равенъ суммѣ корней уравненія умноженной на $-a_0$; коэфиціентъ a_2 равенъ суммѣ произведеній, различныхъ соединеній по два корня, умноженной на a_0; коэфиціентъ a_3 равенъ суммѣ произведеній, различныхъ соединеній по три корня, умноженной на $-a_0$, и т. д.; наконецъ коэфиціентъ a_n равенъ произведенію всѣхъ корней умноженному на $(-1)^na_0$, т. е. на $\pm a_0$, смотря по тому будетъ-ли степень n число четное или нечетное.

Если $a_0 = 1$, то предъидущія формулы обращаются въ слѣдующія:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(-1)\, a_1 = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + z_n = \sum_1^n z_r \\
&(-1)^2 a_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots\ldots\ldots + z_{n-1} z_n = \sum_1^n z_r z_s \\
&(-1)^3 a_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \ldots\ldots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = \sum_1^n z_r z_s z_t \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(1-1)^n a_n = z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z_{n-2} z_{n-1} z_n
\end{aligned}
\right\} \quad (16)
$$

§ 39. *Предложеніе.* Если $a + bi$ будетъ корень уравненія $f(z) = 0$ съ дѣйствительными коэфиціентами, то корнемъ того же уравненія будетъ и $a - bi$.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, если $a + bi$ есть корень уравненія $f(z) = 0$, то его можно написать въ формѣ (§ 38):

$$f(z) = \{ z - (a + bi) \} f_1(z) \tag{17}$$

гдѣ $f_1(z)$ есть цѣлая функція $n - 1$-й степени.

Такъ какъ, по условію, коэфиціенты $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ суть количества дѣйствительныя, то послѣ перемноженія второй части (17) количество i должно изчезнуть, а это можетъ только тогда случиться, когда во вторую часть, i войдетъ въ четныхъ степеняхъ. Но если во вторую часть, i входитъ въ четныхъ степеняхъ, то вторая часть не измѣняется замѣщеніемъ $+i$ чрезъ $-i$, а такое замѣщеніе даетъ:

$$f(z) = \{ z - (a - bi) \} f_1(z)$$

откуда видимъ, что и $a - bi$ есть корень даннаго уравненія. Такъ какъ $a + bi$ и $a - bi$ суть корни уравненія $f(z) = 0$, то его можно написать въ формѣ:

$$f(z) = \{ z - (a + bi) \} \{ z - (a - bi) \} f_1(z)$$

откуда:

$$f(z) = \{ (z - a)^2 + b^2 \} f_1(z)$$

т. е. уравненіе $f(z) = 0$ съ дѣйствительными коэфиціентами можетъ имѣть множители формы: $(z - a)^2 + b^2$.

Слѣдствіе. Цѣлая функція $f(z)$ n-й степени не можетъ имѣть больше n корней.

Допустимъ, что кромѣ корней $z_1, z_2, z, \ldots, z_n$ есть еще корень z'. Если $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ суть корни уравненія $f(z)=0$, то имѣемъ (§ 38):

$$f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots\ldots\ldots(z-z_n)$$

обѣ части этого уравненія должны обращаться въ нуль при $z=z'$, т. е.:

$$f(z') = a_0(z'-z_1)(z'-z_2)(z'-z_3)\ldots\ldots(z'-z_n)=0$$

но такъ какъ z' есть число отличное отъ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, то ни одинъ изъ множителей $z'-z_1, z'-z_2, \ldots\ldots, z'-z_n$ не равенъ нулю, слѣдовательно, чтобы $f(z')=0$ необходимо чтобы $a_0=0$, что показываетъ, что степень функціи $f(z)$ понизилась до $n-1$. Разсуждая подобнымъ образомъ надъ этой послѣдней функціей и слѣдующими найдемъ, что $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0\ldots$, $a_n=0$.

§ 40. *Предложеніе.* Всякая раціональная функція обращается столько же разъ въ безконечность, сколько и въ нуль.

Доказательство. Пусть данная функція будетъ цѣлая:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$$

она, какъ было выше доказано обращается въ нуль n разъ. Если ее напишемъ въ формѣ:

$$f(x) = x^n\left(a_0 + a_1\frac{1}{x} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + a_n\frac{1}{x_n}\right)$$

и будемъ увеличивать x неопредѣленно, то:

$$f(\infty) = a_0(\infty)^n$$

что выражаетъ наше предложеніе. Пусть данная функція будетъ дробная:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$$

и пусть степень числителя будетъ n, а степень знаменателя m. Числитель обращается въ нуль n разъ, а знаменатель обращается въ безконечность m разъ, слѣдовательно функція $f(x)$ обращается въ нуль $n+m$ разъ. Числитель функціи $f(x)$ обращается въ безконечность n разъ, а знаменатель въ нуль m разъ, слѣдовательно $f(x)$ обращается въ безконечность $n+m$ разъ.

Нѣкоторыя свойства полинома и его геометрическое представленіе.

§ 41. Пусть:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{18}$$

будетъ цѣлый раціональный полиномъ съ дѣйствительными коэфиціентами. Если дѣйствительное перемѣнное x будетъ возрастать или убывать, то полиномъ (18) въ свою очередь будетъ возрастать или убывать, убывать или возрастать. Вопросъ, когда полиномъ (18) съ возрастаніемъ перемѣннаго возрастаетъ, а съ убываніемъ убываетъ, или съ возрастаніемъ перемѣннаго убываетъ, а съ убываніемъ возрастаетъ, рѣшается слѣдующими предложеніями:

Предложеніе. Если производная функція отъ полинома (18), для извѣстнаго значенія перемѣннаго, будетъ положительная величина, то начиная съ этого значенія перемѣннаго, съ его возрастаніемъ возрастаетъ и полиномъ, а съ его убываніемъ и полиномъ убываетъ; если же производная для извѣстнаго значенія перемѣннаго будетъ величина отрицательная, то начиная съ этого значенія перемѣннаго съ его возрастаніемъ полиномъ убываетъ, а съ его убываніемъ полиномъ возрастаетъ.

Доказательство. Пусть для значенія x_1 функція $f'(x_1)$ будетъ величина положительная. Дадимъ x_1 приращеніе h, то:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1+h) - f(x_1) &= +hf'(x_1) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_1) + \ldots.\\ f(x_1-h) - f(x_1) &= -hf'(x_1) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_1) + \ldots.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

такъ какъ h есть количество произвольное, то мы можемъ его взять настолько малымъ, что первый членъ вторыхъ частей (19) превзойдетъ сумму всѣхъ остальныхъ (§ 32), и такъ какъ $f'(x_1)$ есть величина положительная, то будемъ имѣть:

$$f(x_1+h) > f(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_1-h) < f(x_1) \tag{20}$$

слѣдовательно $f(x)$ возрастаетъ и убываетъ вмѣстѣ съ перемѣннымъ x. Если-же $f'(x_1)$ есть величина отрицательная, то мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1+h) - f(x_1) &= -hf'(x_1) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_1) + \ldots\\ f(x_1-h) - f(x_1) &= +hf'(x_1) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_1) + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

откуда, давая приращенію h весьма малое значеніе, найдемъ:

$$f(x_1+h)<f(x_1) \quad , \quad \text{a} \quad f(x_1-h)>f(x_1) \tag{22}$$

слѣдовательно $f(x)$ съ возрастаніемъ перемѣннаго убываетъ, а съ убываніемъ возрастаетъ.

Слѣдствіе. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если полиномъ $f(x)$, возрастая, начнетъ убывать, то производная $f'(x)$ въ этотъ моментъ должна перемѣнить знакъ: изъ величины положительной должна сдѣлаться отрицательной, а это только тогда случится, когда $f'(x)$ обратится въ нуль (§ 35); точно также она обращается въ нуль, когда $f(x)$ убывая, начнетъ возрастать.

Примѣръ. Пусть:

$$f(x)=x^3-3x^2+2x-1$$

то:

$$f'(x)=3x^2-6x+2$$

при $x=1$, $f'(1)=-1$, слѣдовательно, начиная съ единицы, $f(x)$ возрастаетъ съ убываніемъ x^a и убываетъ съ его возрастаніемъ. При $x=2$, $f'(2)=2$, слѣдовательно $f(x)$ начиная съ $x=2$ возрастаетъ съ возрастаніемъ x^a и убываетъ съ его убываніемъ.

Наибольшее и наименьшее значеніе полинома.

§ 42. Если полиномъ $f(x)$ возрастая начинаетъ убывать, то его числовое значеніе, при которомъ возрастаніе переходитъ въ убываніе, называется *наибольшимъ* (maximum); если же полиномъ убывая начнетъ возрастать, то его числовое значеніе, при которомъ убываніе переходитъ въ возрастаніе, называется *наименьшимъ* (minimum). Если x_1 есть числовое значеніе перемѣннаго при которомъ $f(x_1)$ имѣетъ наибольшее значеніе, то мы должны имѣть:

$$f(x_1+h)<f(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_1-h)<f(x_1) \tag{23}$$

а если $f(x_1)$ имѣетъ при этомъ значеніи перемѣннаго наименьшее значеніе, то:

$$f(x_1+h)>f(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_1-h)>f(x_1) \tag{24}$$

Но имѣемъ:

$$f(x_1+h)-f(x_1)=+hf'(x_1)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_1)+\ \dots$$

$$f(x_1-h)-f(x_1)=-hf'(x_1)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_1)+\ \dots$$

слѣдовательно, чтобы условія (21) или (22) были оба удовлетворены необходимо, чтобы:

$$f'(x_1) = 0$$

если при этомъ $f''(x_1)$ будетъ величина отрицательная, то будутъ удовлетворены условія (23), слѣдовательно $f(x_1)$ будетъ *maximum*, если же $f''(x_1)$ будетъ величина положительная, то будутъ удовлетворены условія (24), слѣдовательно $f(x_1)$ будетъ *minimum*.

Примѣръ 1. Пусть данная функція будетъ:

$$f(x) = 2x^2 + x - 6$$

откуда:

$$f'(x) = 4x + 1$$

приравнивая нулю и опредѣляя x найдемъ $x_1 = -\frac{1}{4}$. Но такъ какъ

$$f''\left(-\frac{1}{4}\right) = 4$$

то:

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{49}{5}$$

будетъ minimum.

Примѣръ 2. Пусть данная функція будетъ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14$$

откуда:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0$$

или:

$$\frac{1}{6} f'(x = x^2 - x - 6 = 0$$

откуда:

$$x = -2 \quad \text{и} \quad x = 3$$

Но такъ какъ $f''(x) = 2x - 1$ даетъ:

$$\frac{1}{6} f''(-2) = -5 \quad , \quad \frac{1}{6} f''(3) = 5$$

то:

$f(-4) = 58$ будетъ maximum, а

$f(3) = -67$ будетъ minimum.

Геометрическое представленіе полинома и геометрическое значеніе производной.

§ 42. Покажемъ теперь какъ можно представить геометрически полиномъ:

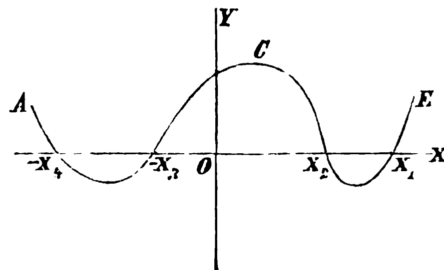
$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (23)$$

Если положимъ $y = f(x)$ и примемъ x за абсциссу, а y за ординату, то уравненіе:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (24)$$

будетъ представлять кривую, которая пересѣкаетъ ось x въ тѣхъ точкахъ,

Фиг. 10.



которыхъ абсциссы равны дѣйствительнымъ корнямъ уравненія $f(x) = 0$. Пусть $-x_4$, $-x_3$, x_2, x_1 суть дѣйствительные корни уравненія $f(x) = 0$, то кривая $y = f(x)$ будетъ имѣть форму $ABCDE$ (фиг. 10).

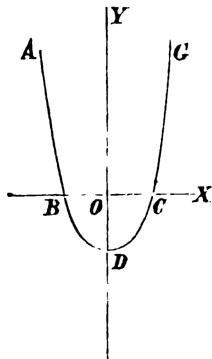
Примѣръ 1. Пусть данный полиномъ будетъ:

$$f(x) = 2x^2 + x - 6$$

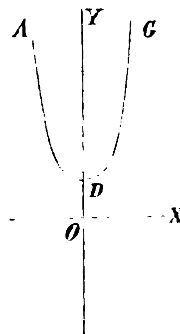
Давая x рядъ значеній:

$$\ldots .\ -4\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \ldots$$

Фиг. 11.



Фиг. 12.



и подставляя ихъ въ $f(x)$ вмѣсто x, найдемъ соотвѣтствующія значенія

функціи:

$$22\ ,\ 9\ ,\ 0\ ,\ -5\ ,\ -6\ ,\ -3\ ,\ 4\ ,\ 15\ ,\ 30$$

Взявъ двѣ координатныя оси и откладывая на оси абсциссъ всѣ x и соотвѣтствующія имъ значенія $y=f(x)$ на ординатахъ увидимъ, что графически нашъ полиномъ представится кривой $ABDCG$ (фиг. 11).

Примѣръ 2. Пусть данный полиномъ будетъ:

$$f(x)=2x^2+x+2$$

Давая x тотъ же рядъ значеній, какъ и выше:

$$\ldots -4\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ldots$$

и подставляя въ $f(x)$ вмѣсто x, найдемъ соотвѣтствующія значенія для $y=f(x)$·

$$30\ ,\ 17\ ,\ 8\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ 23\ ,\ 38$$

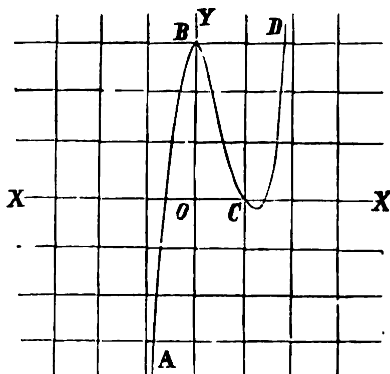
Отлагая на координатныхъ осяхъ соотвѣтствующія значенія x и y видимъ, что кривая будетъ имѣть видъ ADG (фиг. 12). Рѣшая уравненіе $f(x)=$ $=2x^2+x+2=0$, найдемъ его корни:

$$x_1=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{и} \quad x_2=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Примѣръ 3. Пусть данный полиномъ будетъ:

$$f(x)=10x^3-17x^2+x+6 \tag{25}$$

Фиг. 13.



слѣдовательно кривая:

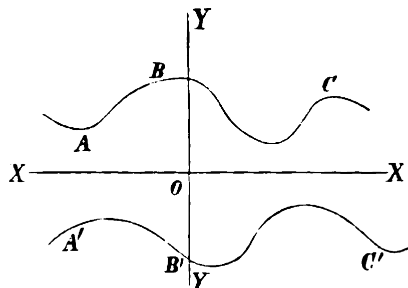
$$y=10x^3-17x^2+x+6 \tag{26}$$

будетъ пересѣкать ось x въ точкахъ: $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}2$, такъ какъ эти значенія суть корни даннаго полинома (25). Кривая эта имѣетъ форму $ABCD$ (фиг. 13).

Изъ формы кривой видно, что она имѣетъ maximum въ точкѣ B и minimum въ точкѣ C.

§ 43. Если уравненіе $f(x) = 0$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней, то кривая $y = f(x)$ не пересѣкаетъ ось абсциссъ, а имѣетъ форму волно-

Фиг. 14.



образной кривой, идущей сверху оси x, какъ кривая ABC (фиг. 14), или снизу оси x, какъ кривая $A'B'C'$.

Геометрическое значеніе производной.

§ 44. Пусть APB (фиг. 15) будетъ кривая:

$$y = f(x)$$

пусть P будетъ точка на кривой, соотвѣтствующая абсциссѣ $x = OM$. Возьмемъ другую точку Q на кривой, соотвѣтствующую абсциссѣ $ON = x + h$, гдѣ h приращеніе x. Слѣдовательно:

$$OM = x \quad , \quad MN = h \quad , \quad ON = x + h$$

$$PM = y = f(x) \quad , \quad QN = y + \Delta y = f(x+h)$$

гдѣ Δy есть приращеніе функціи $f(x)$, соотвѣтствующее приращенію h абсциссы x. Но мы видѣли выше, что:

$$f(x+h) = y + \Delta y = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots.$$

или:

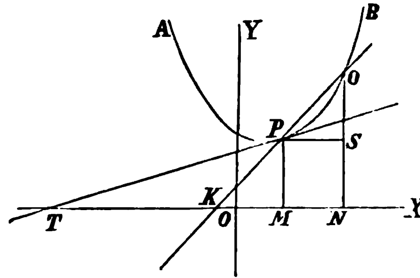
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \frac{\Delta x}{1.2} f''(x) + \ldots$$

откуда:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{QS}{MN} = \frac{QS}{PS} = \operatorname{tg}(QPS) = \operatorname{tg}(PKN)$$

Если теперь h начнетъ неопредѣленно убывать, то точка Q будетъ неопредѣленно приближаться къ точкѣ P, а сѣкущая PQ будетъ приближаться

Фиг. 15.



съ касательной PT въ точкѣ P и когда точка Q совпадетъ съ P, то сѣкущая PQ сдѣлается касательной PT, а $\angle PRN$ сдѣлается угломъ $\angle PTM$. Но:

$$\text{пр.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x) = \operatorname{tg} \varphi$$

если чрезъ φ означимъ уголъ PTM.

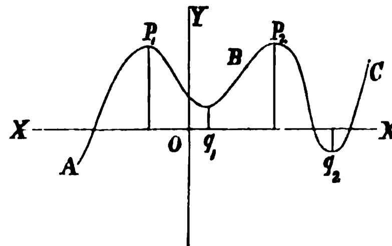
Изъ этого видимъ, что производная функція $f'(x)$ представляетъ тригонометрическій тангенсъ угла, который касательная къ кривой $y = f(x)$ въ точкѣ (x, y) составляетъ съ осью абсциссъ.

§ 45. Изъ построенія функціи:

$$y = f(x)$$

можно видѣть, что кривая ABC (фиг. 16) можетъ имѣть нѣсколько наи-

Фиг. 16.



большихъ значеній, какъ напримѣръ p_1 и p_2, а нѣсколько наименьшихъ, какъ q_1 и q_2.

Замѣтимъ, что въ точкахъ p_1, p_2, q_1, q_2 наибольшаго или наименьшаго значенія функціи $f(x)$, производная функція $f'(x)$ равна нулю, а слѣдовательно въ этихъ точкахъ касательныя параллельны оси x, такъ какъ $f'(x)$ выражаетъ тригонометрическій тангенсъ угла, который касательная къ кривой составляетъ съ осью абсциссъ.

Если функція имѣетъ нѣсколько maximum'овъ и нѣсколько minimum'овъ, то наибольшее изъ maximum'овъ называется *maximum maximorum,* а наименьшее изъ minimum'овъ *minimum minimorum*. Очевидно, что двухъ maximum'овъ или двухъ minimum'овъ подъ рядъ функція имѣть не можетъ.

Выдѣленіе равныхъ корней.

§ 46. Если уравненіе $f(z)=0$ имѣетъ m корней равныхъ количеству z_1, то его можно написать въ формѣ:

$$f(z)=(z-z_1)^m.f_1(z)$$

гдѣ $f_1(z)$ будетъ функція $n-m$ степени. Если тоже уравненіе будетъ имѣть p корней равныхъ количеству z_2 и q корней равныхъ количеству z_3, то его можно написать въ формѣ:

$$f(z)=(z-z_1)^m.(z-z_2)^p.(z-z_3)^q.f_1(z)$$

гдѣ $f_1(z)$ будетъ функція $n-m-p-q$ степени.

Если одинъ корень входитъ въ уравненіе два раза, то мы его будемъ называть *двойнымъ*; если онъ входитъ три раза—*тройнымъ*; если онъ входитъ четыре раза—*четвернымъ* и т. д.

§ 47. *Предложеніе*. Если уравненіе:

$$f(z)=0 \tag{27}$$

имѣетъ m-й краткости корень, то этотъ корень будетъ и корнемъ уравненій:

$$f'(z)=0 \quad , \quad f''(z)=0 \quad , \quad f'''(z)=0 \ , \ \ldots\ldots , \ f^{m-1}(z)=0 \tag{28}$$

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, если въ формулѣ:

$$f(z+h)=f(z)+hf'(z)+\frac{h^2}{1.2}(z)+\ldots+\frac{h^m}{1.2..m}f^m(z)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.n}f^n(z)$$

вставимъ вмѣсто z величину z_1 и положимъ $z_1+h=z$, то найдемъ:

$$f(z)=f(z_1)+(z-z_1)f'(z_1)+\frac{(z-z_1)^2}{1.2}f''(z_1)+\ldots+$$

$$+\frac{(z-z_1)^m}{1.2..m}f^m(z_1)+\ldots+\frac{(z-z_1)^n}{1.2..n}f^n(z_1) \qquad (29)$$

Если теперь положимъ, что z_1 есть корень m-й краткости уравненія (27), то мы должны имѣть:

$$f(z)=(z-z_1)^m.f_1(z)$$

чтобы и уравненіе (29) имѣло эту форму необходимо, чтобы не только $f(z_1)=0$, но и функціи производныя, до m-й исключительно, также равнялись нулю, т. е.:

$$f'(z_1)=0 \quad , \quad f''(z_1)=0 \quad , \quad f'''(z_1)=0 \quad ,\ldots\ldots, \quad f^{m-1}(z_1)=0$$

Изъ этого заключаемъ, что двойной корень уравненія (27) будетъ корнемъ и первой производной; тройной корень будетъ корнемъ первой и второй производныхъ, и т. д.

Такъ какъ мы имѣемъ:

$$f'(z)=f'(z_1)+\frac{z-z_1}{1}f''(z_1)+\frac{z-z_1}{1.2}f'''(z)+\ldots+\frac{(z-z_1)^{m-1}}{1.2\ldots m-1}f^m(z_1)+\ldots$$

то мы заключаемъ, что корень m-й кратности $f(z)$ будетъ корнемъ $m-1$-й кратности $f'(z)$, $m-2$-й кратности функціи $f''(z)$ и т. д., т. е. кратность корня въ послѣдовательныхъ производныхъ понижается отъ одной производной къ другой на единицу.

§ 48. Съ помощью этого предложенія можно выдѣлить кратные корни изъ даннаго уравненія простымъ дѣленіемъ многочленовъ. Означимъ чрезъ X_1 произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей $f(z)$, входящихъ только разъ; чрезъ X_2 произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей $f(z)$, входящихъ каждый два раза; и т. д. X_m всѣ множители, которые входятъ m разъ. При такомъ условіи функція $f(z)$ будетъ имѣть форму:

$$f(z)=X_1.X^2_2.X^3_3\ldots\ldots X^{m-1}_{m-1}.X^m_m \qquad (30)$$

Производная этой функціи, очевидно, будетъ имѣть форму:

$$f'(z)=X_2.X^2_3.X^3_4\ldots\ldots\ldots X^{m-2}_{m-1}.X^{m-1}_m.\varphi_1(z) \qquad (31)$$

гдѣ $\varphi_1(z)$ не содержитъ корней функціи $f(z)$.

Общій наибольшій дѣлитель между функціями (30) и (31), очевидно, есть:

$$f_1(z) = X_2 X^2_3 X^3_4 \;.\;.\;.\;.\; X^{m-2}_{m-1} X^{m-1}_m \tag{32}$$

Если съ этой послѣдней функціей поступимъ, какъ съ начальной и означимъ чрезъ $f_2(z)$ общій наибольшій дѣлитель между $f_1(z)$ и $f_1'(z)$, то найдемъ:

$$f_2(z) = X_3 X^2_4 X^3_5 \;.\;.\;.\;.\; X^{m-3}_{m-1} X^{m-2}_m \tag{33}$$

поступая подобнымъ образомъ и далѣе, найдемъ:

$$f_3(z) = X_4 X^2_5 X^3_6 \;.\;.\;.\;.\; X^{m-4}_{m-1} X^{m-3}_m \tag{34}$$

. . . .

. . . .

$$f_{m-3}(z) = X_{m-2} X^2_{m-1} X^3_m$$

$$f_{m-2}(z) = X_{m-1} X^2_m$$

$$f_{m-1}(z) = X_m$$

Изъ этихъ выраженій найдемъ:

$$\frac{f}{f_1} = \Phi_1 = X_1 X_2 X_3 X_4 \;.\;.\;.\; X_{m-1} X_m$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \Phi_2 = X_2 X_3 X_4 \;.\;.\;.\;.\; X_{m-1} X_m$$

$$\frac{f_2}{f_3} = \Phi_3 = X_3 X_4 X_5 \;.\;.\;.\;.\; X_{m-1} X_m$$

$$\frac{f_3}{f_4} = \Phi_4 = X_4 X_5 X_6 \;.\;.\;.\;.\; X_{m-1} X_m$$

. . . .

. . . .

$$\frac{f_{m-3}}{f_{m-2}} = \Phi_{m-2} = X_{m-2} X_{m-1} X_m$$

$$\frac{f_{m-2}}{f_{m-1}} = \Phi_{m-1} = X_{m-1} X_m$$

$$\frac{f_{m-1}}{1} = \Phi_m = X_m$$

а изъ этихъ послѣднихъ уравненій легко найти:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=X_1 \quad , \quad \frac{\Phi_2}{\Phi_3}=X_2 \quad , \quad \frac{\Phi_3}{\Phi_4}=X_3 \;,\ldots, \frac{\Phi_{m-2}}{\Phi_{m-1}}=X_{m-2} \quad , \quad \frac{\Phi_{m-1}}{\Phi_m}=X_{m-1}$$

$$f_{m-1}=\Phi_m=X_m$$

Такимъ образомъ мы выдѣлили множители X_1, X_2, $X_3 \ldots X_{m-1}$, X_m, которые входили одинъ, два, три и т. д. раза. Приравнивая эти множители нулю мы получимъ систему уравненій:

$$X_1=0 \quad , \quad X_2=0 \quad , \quad X_3=0 \;, \ldots, \; X_{m-1}=0 \quad , \quad X_m=0$$

которыя будутъ имѣть только неравные корни; индексъ же при Φ покажетъ какой кратности были корни, содержащіеся въ соотвѣтствующемъ множителѣ X.

Изъ этого процесса видимъ, что изъ даннаго уравненія всегда можно выдѣлить равные корни простымъ дѣленіемъ.

Пояснимъ сказанное на примѣрахъ.

Примѣръ 1.

$$f(x)=x^6-x^5-4x^4+2x^3+5x^2-x-2=0$$
$$f'(x)=6x^5-5x^4-16x^3+6x^2+10x-1$$
$$f_1=x^3+x^2-x-1$$
$$f_2=x+1$$
$$f_3=1$$

$$\frac{f}{f_1}=\Phi_1=(x-2)(x-1)(x+1)=x^3-2x^2-x+2$$
$$\frac{f_1}{f_2}=\Phi_2=(x-1)(x+1)=x^2-1$$
$$\frac{f_2}{f_3}=\Phi_3=x+1$$

далѣе:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=x-2=X_1$$
$$\frac{\Phi_2}{\Phi_3}=x-1=X_2$$
$$\frac{\Phi_3}{1}=x+1=X_3$$

Изъ написанныхъ выраженій, очевидно, слѣдуетъ, что корни даннаго уравненія суть: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$, изъ коихъ первый простой, второй двойной, а третій тройной. Слѣдовательно:

$$f(x) = (x-2)(x-1)^2(x+1)^3$$

Примѣръ 2.

$$f(x) = x^8 + x^7 - 8x^6 - 6x^5 + 21x^4 + 9x^3 - 22x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$f'(x) = 8x^7 + 7x^6 - 48x^5 - 30x^4 + 84x^3 + 27x^2 - 44x - 4$$

$$f_1 = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$$

$$f_2 = x - 1$$

$$f_3 = 1$$

$$\Phi_1 = x^4 - 5x^2 + 4 \quad , \quad \Phi_2 = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad , \quad \Phi_3 = x - 1$$

и

$$X_1 = x - 2 \quad , \quad X_2 = x^2 + 3x + 2 \quad , \quad X_3 = x - 1$$

Слѣдовательно:

$$f(x) = (x-2)(x^2+3x+2)^2(x-1)^3 = (x-2)(x+1)^2(x+2)^2(x-1)^3$$

Очевидно корни даннаго уравненія $f(x) = 0$ будутъ: 2, —1, —1, —2, —2, 1, 1, 1.

ГЛАВА VI.

Преобразованіе уравненій.

§ 49. Не зная корней уравненія, можно его преобразовать въ другое, коего корни имѣютъ извѣстную связь съ корнями даннаго уравненія. Такое преобразованіе выгодно въ томъ отношеніи, что данному уравненію можно дать такую форму, въ которой его удобнѣе изслѣдовать.

Задача. Преобразовать уравненіе:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

въ другое, коего-бы корни были въ λ разъ больше корней даннаго?

Рѣшеніе. Если x есть корень даннаго, а y корень искомаго уравненія, то мы должны имѣть $y=\lambda x$. Опредѣляя $x=\frac{y}{\lambda}$ и вставляя въ уравненіе (1), найдемъ:

$$a_0y^n+\lambda a_1y^{n-1}+\lambda^2a_2y^{n-2}+\ldots\ldots+\lambda^{n-1}a_{n-1}y+\lambda^na_n=0 \qquad (2)$$

корни этого уравненія, каждый, въ λ разъ болѣе корней уравненія (1).

Изъ формы уравненія (2) видно, что для такого преобразованія надобно помножить всѣ коэфиціенты уравненія (1) на λ въ степени равной индексу въ коэфиціентѣ.

Примѣръ 1. Найти уравненіе, коего бы корни были въ два раза больше корней уравненія:

$$3x^4-4x^3+4x^2-2x+1=0$$

Отвѣтъ.

$$3x^4-8x^3+16x^2-16x+16=0.$$

Примѣръ 2. Найти уравненіе, коего корни въ три раза болѣе корней уравненія:

$$7x^3-5x^2+6x+2=0$$

Отвѣтъ.

$$7x^3-15x^2+54x+54=0.$$

Задача. Преобразовать уравненіе (1) въ другое, коего-бы корни имѣли противные знаки съ корнями даннаго уравненія (1)?

Рѣшеніе. Надобно только въ уравненіи (2) положить $\lambda=-1$, что даетъ:

$$a_0y^n+(-1)a_1y^{n-1}+(-1)^2a_2y^n+(-1)^3a_3y^{n-3}+\ldots\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}a_{n-1}y+(-1)^na_n=0 \qquad (3)$$

или:

$$a_0y^n-a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}-a_3y^{n-3}+\ldots\ldots\mp a_{n-1}y\pm a_n=0 \qquad (4)$$

смотря по тому будетъ-ли n число четное или нечетное.

Изъ формы уравненія (3) видимъ, что для этого преобразованія надобно только перемѣнить знаки у членовъ стоящихъ на четныхъ мѣстахъ.

Примѣръ 1. Найти уравненіе, коего корни имѣютъ противные знаки къ корнями уравненія:

$$x^5+7x^4+7x^3-8x^2+x+1=0$$

Отвѣтъ:

$$x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 8x^2 + x - 1 = 0$$

Примѣръ 2. Тотъ же вопросъ требуется рѣшить и для уравненія:

$$3x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3 = 0$$

Отвѣтъ:

$$3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

Задача. Преобразовать уравненіе (1) въ другое, въ которомъ коэфиціентъ y перваго члена былъ бы равенъ единицѣ?

Рѣшеніе. Если въ уравненіи (2) сдѣлаемъ $\lambda = a_0$, то это уравненіе приметъ форму:

$$a_0y^n + a_0a_1y^{n-1} + a_0^2a_2y^{n-2} + \;.\;.\;.\;.\;.\; + a_0^{n-1}a_{n-1}y + a_0^na_n = 0$$

откуда сокращая на a_0, найдемъ искомое уравненіе:

$$y^n + a_1y^{n-4} + a_0a_2y^{n-2} + a_0^2a_3y^{n-3} + \;.\;.\;.\; + a_0^{n-2}a_{n-1}y + a_0^{n-1}a_n = 0 \qquad (5)$$

слѣдовательно надобно только, для этого преобразованія, коэфиціенты, начиная съ третьяго, помножить на a_0, a_0^2, a_0^3, . . . , a_0^{n-1}.

Примѣръ. Дано уравненіе:

$$3x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 1 = 0$$

Отвѣтъ:

$$y^5 - 2y^4 + 3y^3 + 36y^2 - 27y + 81 = 0.$$

§ 50. Мы видѣли выше, что если:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \;.\;.\;.\;.\; + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (6)$$

то:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \;.\;.\;.\; + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}f^{n-1} + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x) \qquad (7)$$

или:

$$f(x+h) = f(h) + f'(h).x + \frac{f''(h)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(h)}{1.2\ldots n-1}x^{n-1} + \frac{f^n(h)}{1.2\ldots n}x^n \qquad (8)$$

такъ какъ

$$f(x+h)=f(h+x)$$

а

$$f(h)\quad,\quad f'(h)\quad,\quad f''(h)\quad,\;\ldots\ldots,\quad f^{n-1}(h)\quad,\quad f^{n}(h)$$

суть производныя функціи (6), въ которыя вмѣсто x подставлено h;

$$\frac{f^{n}(h)}{1\,2.3\ldots n}=a_0\quad,\quad\frac{1.2.3\ldots n-1}{f^{n-1}(h)}=na_0h+a_1\quad,\quad\frac{1.2.3\ldots n-2}{f^{n-2}(h)}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{1.2}a_0h^2+(n-1)a_1h+a_2 \qquad (9)$$

Очевидно корни уравненія:

$$f(x+h)=0$$

меньше или больше корней даннаго (6) уравненія количествомъ h, смотря потому будетъ-ли h количество положительное или отрицательное.

Задача. Преобразовать уравненіе:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\;\ldots\;+a_{n-1}x+a^n=0 \qquad (10)$$

въ другое, котораго-бы корни были меньше или больше корней даннаго?

Рѣшеніе. Положимъ $x=y+h$ и подставимъ это выраженіе въ (10), то найдемъ:

$$f(y+h)=a_0y^n+(na_0h+a_1)y^{n-1}+\left\{\frac{n(n-1)}{1.2}a_0h^2+(n-1)a_1h+a_2\right\}y^{n-2}+$$

$$+\;\ldots\ldots\;+f'(h).y+f(h)=0 \qquad (11)$$

корни этого уравненія будутъ больше или меньше корней уравненія (10), смотря потому будетъ-ли h количество отрицательное или положительное.

Примѣръ 1. Найти уравненіе, коего корни меньше четырмя едииницами корней уравненія:

$$x^4-5x^3+7x^2-17x+11=0$$

Отвѣтъ. Если вмѣсто x поставимъ $y+4$, то искомое уравненіе будетъ:

$$y^4+11y^3+43y^2+55y-9=0$$

Примѣръ 2. Найти уравненіе, коего корни больше двумя единицами корней уравненія:

$$4x^5-2x^3+7x-3=0$$

Отвѣтъ. Подставляя вмѣсто x величину $y-2$, найдемъ:

$$4y^5-40y^4+158y^3-308y^2+303y-129=0$$

§ 51. Съ помощью такого преобразованія можно выбросить изъ уравненія (10) одинъ изъ его членовъ, что часто облегчаетъ рѣшеніе уравненія.

Если въ преобразованномъ уравненіи (11) положимъ $na_0h+a_1=0$, то въ немъ недостаетъ второго члена; если:

$$\frac{n(n-1)}{1.2}a_0h^2+(n-1)a_1h+a_2=0$$

то въ преобразованномъ уравненіи (11) недостанетъ третьяго члена. Очевидно, для этого надобно рѣшить уравненіе второй степени относительно h, а слѣдовательно мы будемъ имѣть два такихъ преобразованія. Удаленіе четвертаго члена изъ уравненія (11) требуетъ, очевидно, рѣшенія уравненія 3-ей степени относительно h и т. д. Чтобы выбросить послѣдній членъ надобно рѣшить данное уравненіе $f(h)=0$.

Примѣръ 1. Выбросить изъ уравненія:

$$x^3-6x^2+4x-7=0$$

второй членъ?

Отвѣтъ. Уравненіе $na_0h+a_1=0$, въ этомъ случаѣ будетъ $3h-6=0$, откуда $h=2$. Слѣдовательно надобно корни даннаго уравненія уменьшить на два. Искомое уравненіе будетъ:

$$y^3-8y-15=0$$

Примѣръ 2. Выбросить изъ уравненія:

$$x^4-4x^3-18x^2-3x+2=0$$

третій членъ?

Отвѣтъ. Уравненіе:

$$\frac{n(n-1)}{1.2}a_0h^2+(n-1)a_1h+a_2=0$$

въ этомъ случаѣ сдѣлается:

$$6h^2-12h-18=0$$

откуда:

$$h=3 \quad \text{и} \quad h=-1$$

Слѣдовательно такое преобразованіе можно сдѣлать двумя способами: уменьшая корни даннаго уравненія на 3 или увеличивая ихъ на 1. Въ первомъ случаѣ искомое уравненіе будетъ:

$$y^4+8y^3-111y-196=0$$

а во второмъ:

$$y^4-8y^3-17y-8=0$$

Если бы корни квадратнаго уравненія были мнимые, то такого преобразованія сдѣлать нельзя.

§ 52. Во многихъ случаяхъ изслѣдованій гораздо удобнѣе писать полиномъ $f(x)$ съ коэфиціентами, сопровождаемыми биномальными коэфиціентами, именно:

$$f(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}+\ldots+na_{n-1}x+a_n=0 \qquad (12)$$

Какой бы ни былъ данный полиномъ, его всегда можно написать въ этой формѣ. Для краткости мы будемъ употреблять слѣдующее символическое изображеніе такихъ полиномовъ:

$$f_n(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+na_{n-1}x+a_n$$

$$f_{n-1}(x)=a_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_2x^{n-3}+\ldots\ldots+(n-1)a_{n-2}x+a_{n-1}$$

. . . .

. . . .

$$f_4(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4 \qquad (13)$$

$$f_3(x)=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$$

$$f_2(x)=a_0x^2+2a_1x+a_2$$

$$f_1(x)=a_0x+a_1$$

$$f_0(x)=a_0$$

иногда мы будемъ, для простоты, писать просто: f_n, f_{n-1}, $\ldots f_3, f_2, f_1$. Такое обозначеніе удобно потому, что производная отъ полинома $f_n(x)$ всегда равна полиному $f_{n-1}(x)$, умноженному на n, т. е. мы всегда имѣемъ:

$$f_n'(x)=nf_{n-1}(x) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f_n}{\partial x}=nf_{n-1}$$

т. е. какъ будто-бы дифференцированіе совершается по индексу n, какъ по степени x^n.

При такой формѣ полинома $f(x)$ полиномъ $f(y+h)$ будетъ имѣть форму:

$$f(y+h)=f_0(h).y^n+nf_1(h).y^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}f_2(h).y^{n-2}+\ldots+nf_{n-1}(h)y+f_n(h)$$

гдѣ:

$$f_0(h)=a_0\quad,\quad f_1(h)=a_0h+a_1\quad,\quad f_2(h)=a_0h^2+2a_1h+a_2\;,$$

$$f_3(h)=a_0h^3+3a_1h^2+3a_2h+a_3 \quad \text{и т. д.} \tag{14}$$

§ 53. *Кубическое уравненіе.* Приложимъ сказанное выше къ кубическому уравненію:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \tag{15}$$

Если положимъ $x=y+h$, то найдемъ:

$$a_0y^3+3(a_0h+a_1)y^2+3(a_0h^2+2a_1h+a_2)y+a_0h^3+3a_1h^2+3a_2h+a_3=0 \tag{16}$$

Если желаемъ выбросить въ уравненіи (15) второй членъ, то h должно удовлетворять уравненію $a_0h+a_1=0$, откуда $h=-\frac{a_1}{a_0}$. Слѣдовательно $a_0x+a_1=a_0y$.

Подставляя это значеніе h въ уравненіе (16), найдемъ:

$$a_0^3y^3+3a_0(a_0a_2-a_1^2)y+a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3=0 \tag{17}$$

коэфиціенты $a_0a_2-a_1^2$ и $a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3$ имѣютъ весьма важное значеніе въ теоріи кубическихъ уравненій, а поэтому они означаются особенными буквами H и G:

$$a_0a_2-a_1^2=H\quad,\quad a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3=G \tag{18}$$

слѣдовательно уравненіе (17) будетъ имѣть форму:

$$a_0^3y^3+3a_0Hy+G=0 \tag{19}$$

полагая еще $a_0y=a_0x+a_1=z$, оно сдѣлается:

$$z^3+3Hz+G=0 \tag{20}$$

въ этой формѣ, какъ увидимъ ниже, рѣшается кубическое уравненіе.

Такъ какъ $z = a_0 y = a_0 x + a_1$, то данное кубическое уравненіе (15) тождественно съ уравненіемъ:

$$(a_0 x + a_1)^3 + 3H(a_0 x + a_1) + G = 0 \qquad (21)$$

Если x_1, x_2, x_3 суть корни уравненія (15), то корни уравненія (20) будутъ:

$$\left(x_1 + \frac{a_1}{a_0}\right), \left(x_2 + \frac{a_1}{a_0}\right), x_3 + \frac{a_1}{a_0};$$

но $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3a_1}{a_0}$ слѣдовательно корни уравненія (20) будутъ:

$$\frac{a_0}{3}(2x_1 - x_2 - x_3), \quad \frac{a_0}{3}(2x_2 - x_3 - x_1), \quad \frac{a_0}{3}(2x_3 - x_1 - x_2) \qquad (22)$$

Сумма ихъ равна нулю, сумма произведеній по два равна $3H$, а произведеніе всѣхъ трехъ:

$$a_0^3(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_3 - x_1)(2x_3 - x_1 - x_2) = -27G.$$

Если-бы требовалось выбросить изъ уравненія (15) 2-й и 3-й члены вмѣстѣ, то необходимо, чтобы:

$$a_0 h + a_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2 = 0$$

слѣдовательно h должно удовлетворять обоимъ условіямъ; исключая h изъ этихъ уравненій, найдемъ слѣдующее уравненіе между коэфиціентами $a_0 a_2 - a_1^2 = H = 0$.

Примѣръ. Выбросить изъ уравненія:

$$x^3 + 6x^2 + 12x - 19 = 0$$

второй членъ?

Отвѣтъ. h должно удовлетворить уравненіе $a_0 h + a_1 = 0$ или $h + 2 = 0$, $h = -2$, откуда найдемъ:

$$y^3 - 27 = 0$$

слѣдовательно вмѣстѣ со вторымъ членомъ уничтожается и третій, т. е. -2 удовлетворяетъ и уравненію $a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2 = 0$.

§ 54. *Биквадратное уравненіе.* Если уравненіе:

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0 \qquad (23)$$

преобразуемъ подстановленіемъ $x = y + h$ и опредѣлимъ h изъ уравне-

нія $a_0h+a_1=0$, то найдемъ:

$$a_0^4y^4+6a_0^2Hy^2+4a_0Gy+(a_0^3a_4-4a_0^2a_1a_3+6a_0a_1^2a_2-3a_1^4)=0 \quad (24)$$

послѣдній членъ въ этомъ уравненіи можно написать въ формѣ:

$$a_0^3a_4-4a_0^2a_1a_3+6a_0a_1^2a_2-3a_1^4=a_0^2(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)-3(a_0a_2-a_1^2)^2 \quad (25)$$

Во второй части этого тождества функція коэффиціентовъ $a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2$ имѣетъ весьма важное значеніе въ теоріи уравненій 4-й степени, а поэтому ее означаютъ особенной буквой J_1:

$$J_1=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2 \quad (26)$$

слѣдовательно послѣдній членъ уравненія (24) или тождество (25) будетъ:

$$a_0^3a_4-4a_0^2a_1a_3+6a_0a_1^2a_2-3a_1^4=a_0^2J_1-3H^2 \quad (27)$$

а уравненіе (24) сдѣлается:

$$a_0^4y^4+6a_0^2Hy^2+4a_0Gy+a_0^2J_1-3H^2=0 \quad (28)$$

Если положимъ $a_0y=z$, то найдемъ:

$$z^4+6Hz^2+4Gz+a_0^2J_1-3H^2=0 \quad (29)$$

Такъ какъ $z=a_0y=a_0x+a_1$, то уравненіе (23) тождественно съ уравненіемъ:

$$(a_0x+a_1)^4+6H(a_0x+a_1)^2+4G(a_0x+a_1)+a_0^2J_1-3H^2=0 \quad (30)$$

Если корни уравненія (23) суть x_1, x_2, x_3, x_4, то корни уравненія (29), очевидно будутъ, замѣчая что $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{4a_1}{a_0}$

$$\frac{a_0}{4}(3x_1-x_2-x_3-x_4)\quad,\quad \frac{a_0}{4}(3x_2-x_1-x_3-x_4)$$

$$\frac{a_0}{4}(3x_3-x_4-x_2-x_1)\quad,\quad \frac{a_0}{4}(3x_4-x_1-x_2-x_3)$$

Сумма этихъ корней равна нулю; сумма произведеній по два равна $\frac{6H}{a_0^2}$, сумма произведеніи по три равна $-\frac{4G}{a_0^3}$, а произведеніе всѣхъ:

$$a_0^4(3x_1-x_2-x_3-x_4)(3x_2-x_3-x_4-x_1)(3x_3-x_4-x_1-x_2)(3x_4-x_1-x_2-x_3)=$$
$$=256(a_0^2J_1-3H^2) \quad (31)$$

Есть еще одна функція, составленная изъ коэфиціентовъ уравненія 4-й степени, которая имѣетъ также большее значеніе въ теоріи этого уравненія, именно:

$$a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a^2_3 - a^2_1a_4 - a^3_2 = J_2 \qquad (32)$$

поэтому и ее означаютъ особеннымъ символомъ J_2. Мы ниже увидимъ, что между функціями H, G, J_1, J_2 существуетъ слѣдующая зависимость:

$$G^2 + 4H^3 = a^2_0(HJ_1 - a_0J_2) \qquad (33)$$

§ 55. *Задача.* Преобразовать данное уравненіе въ другое, котораго корни были-бы обратны корнямъ даннаго уравненія?

Рѣшеніе. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (34)$$

Чтобы корни даннаго уравненія были обратны корнямъ искомаго, надобно положить $x = \frac{1}{y}$. Подставляя это значеніе въ уравненіе (34) найдемъ послѣ приведенія:

$$a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \ldots + a_1y + a_0 = 0 \qquad (35)$$

Случается часто, что уравненіе (35) тождественно съ даннымъ (34), т. е. уравненіе не измѣняется, если въ немъ замѣстить x чрезъ $\frac{1}{x}$. Уравненія имѣющія это свойство называются *взаимными.* Слѣдовательно, если уравненіе $f(x) = 0$ есть взаимное, то мы должны имѣть:

$$f(x) = \lambda x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

гдѣ λ есть множитель назависимый отъ x.

Для опредѣленія λ положимъ $x = 1$, или $x = -1$, то:

$$f(1) = \lambda f(1) \quad \text{и} \quad f(-1) = \lambda(-1)^n f(-1)$$

Если $+1$ и -1 не удовлетворяютъ уравненію $f(x) = 0$, то очевидно $\lambda = 1$, если степень уравненія есть четная, т. е. если $n = 2\mu$. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, мы имѣемъ:

$$f(x) = x^{2\mu} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

откуда легко видѣть, что форма уравненія $f(x)=0$ будетъ:

$$a_0x^{2\mu}+a_1x^{2\mu-1}+a_2x^{2\mu-2}+\ldots+a_{\mu-1}x^{\mu+1}+a_\mu x^\mu+a_{\mu-1}x^{\mu-1}+$$
$$+\ \ldots\ +a_1x+a_0=0 \qquad (36)$$

т. е. коэфиціенты у членовъ равноотстоящихъ отъ концовъ равны.

Уравненіе (36) можно написать въ формѣ:

$$a_0\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)+a_1\left(x^{\mu-1}+\frac{1}{x^{\mu-1}}\right)+\ldots+a_{\mu-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_\mu=0 \qquad (37)$$

Положимъ:

$$x+\frac{1}{x}=y \qquad x^m+\frac{1}{x^m}=U_m$$

Умножая y на U_{m-1}, найдемъ:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)=x^m+\frac{1}{x^m}+x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}$$

или:

$$yU_{m-1}=U_m+U_{m-2}$$

откуда:

$$U_m=yU_{m-1}-U_{m-2} \qquad (38)$$

Очевидно, что $U_0=2$, а $U_1=y$. Давая числу m значенія $m=2,3,4,5,\ldots$ найдемъ изъ (38) рядъ уравненій:

$$\begin{aligned}
U_2&=y^2-2\\
U_3&=y^3-3y\\
U_4&=y^4-4y^2+2\\
U_5&=y^5-5y^3+5y\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (39)$$

Соображаясь съ этимъ, уравненіе (37) можно написать въ формѣ:

$$a_0U_\mu+a_1U_{\mu-1}+a_2U_{\mu-2}+\ \ldots\ldots\ +a_{\mu-1}U_1+a_\mu=0 \qquad (40)$$

степень его на половину ниже степени даннаго. Пусть его корни будутъ:

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ y_\mu$$

такъ какъ $y = x + \frac{1}{x}$, то будемъ имѣть систему уравненій второй степени:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad , \quad x + \frac{1}{x} y_2 \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad x + \frac{1}{x} = y_\mu$$

или:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - y_2 x + 1 = 0 \quad , \ldots , \quad x^2 - y_\mu x + 1 = 0 \quad (41)$$

Такимъ образомъ рѣшеніе уравненія (36) сводится на рѣшеніе системы квадратныхъ уравненій, если предварительно рѣшено уравненіе (40) μ степени.

Примѣръ 1. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

оно взаимное. Раздѣляя всѣ его члены на x^2, найдемъ:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

откуда соображаясь съ (39), найдемъ:

$$y^2 + y - 1 = 0$$

рѣшая будемъ имѣть:

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

а за тѣмъ остается рѣшить два уравненія:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - y_2 x + 1 = 0$$

Примѣръ 2. Найти уравненіе, котораго корни суть обратны корнямъ уравненія:

$$x^4 - 3x_3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$$

Отвѣтъ.

$$2y^4 - 5y^3 - 7y^2 + 3y - 1 = 0$$

Примѣръ 3. Рѣшить взаимное уравненіе $x^8 - 2x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1 = 0$?

Отвѣтъ.

$$x^4 + \frac{1}{x^4} - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 = 0$$

Но

$$U_4 = y^4 - 4y^2 + 2 \quad , \quad U_2 = y^2 - 2$$

Слѣдовательно:

$$y^4 - 6y^2 + 9 = 0 \quad \text{или} \quad (y^2 - 3)^2 = 0$$

откуда:

$$y^2 = 3 \quad , \quad \text{а} \quad y = \pm\sqrt{3}.$$

§ 56. Всѣ предъидущія преобразованія заключаются въ слѣдующей общей зависимости:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть произвольныя количества.

Откуда:

$$x = \frac{-\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha} \tag{42}$$

подставляя это выраженіе въ уравненіе $f(x) = 0$, найдемъ:

$$f\left(\frac{-\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha}\right) = 0 \tag{43}$$

Такъ какъ въ выраженіи (42) входятъ три произвольныя постоянныя, отношеніе трехъ къ четвертому, то можно этими тремя произвольными постоянными такъ располагать, чтобы уравненіе (43) сдѣлалось проще.

Примѣръ. Пусть данное уравненіе будетъ кубическое:

$$f(x) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 \tag{44}$$

Если въ него подставимъ вмѣсто x его выраженіе (42) чрезъ y, то найдемъ послѣ всѣхъ приведеній:

$$A_0 y^3 + 3A_1 y^2 + 3A_2 y + A_3 = 0 \tag{45}$$

гдѣ:

$$A_0 = a\delta^3 - 3a_1\delta^2\gamma + 3a_2\delta\gamma^2 - a_3\gamma^3$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \delta\{-a_0\beta\delta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) - a_2\alpha\gamma\} + \gamma\{a_1\beta\delta - a_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_3\alpha\gamma\} \\ A_2 &= -\beta\{-a_0\beta\delta + \alpha_1(\alpha\delta + \beta\gamma) - a\alpha_2\gamma\} - \alpha\{\alpha_1\beta\delta - a_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_3\alpha\gamma\} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$A_3 = -a_0\beta^3 + 3a_1\beta^2\alpha - 3a_2\beta\alpha^2 + a_3\alpha^3$$

Таковы коэфиціенты въ преобразованномъ уравненіи (45). Такъ какъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

суть величины произвольныя, то ихъ можно такъ опредѣлить, чтобы:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0$$

такимъ образомъ уравненіе (45) сдѣлается:

$$A_0 y^3 + A_3 = 0 \tag{47}$$

Въ выраженіи (42) величины α, β, γ, δ не должны удовлетворять уравненіе $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, въ противномъ случаѣ будемъ имѣть $x = \frac{\alpha}{\gamma}$. Если эта зависимость между α, β, γ, δ не существуетъ, то въ выраженіяхъ (46) для A_1 и A_2 коэфиціенты при δ, γ и при $-\delta$, $-\gamma$ должны быть равны нулю, въ противномъ случаѣ, исключая эти коэфиціенты изъ уравненій $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$, мы бы нашли $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, что противорѣчило-бы предположенію. Итакъ необходимо чтобы:

$$a_0\beta\delta - a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2\alpha\gamma = 0$$

$$a_1\beta\delta - a_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_3\alpha\gamma = 0$$

раздѣляя обѣ части этихъ уравненій на $\alpha\gamma$, найдемъ:

$$a_0\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\gamma} - a_1\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\gamma}\right) + a_2 = 0$$

$$a_1\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\gamma} - a_2\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\gamma}\right) + a_3 = 0$$

откуда найдемъ:

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\gamma} = \frac{a_1a_3 - a_2^2}{a_0a_2 - a_1^2}, \quad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a_0a_3 - a_1a_2}{a_0a_2 - a_1^2}$$

или вводя обозначенія $a_0a_2 - a_1^2 = H$, $a_1a_3 - a_2^2 = H_2$, $a_0a_3 - a_1a_3 = 2H_1$ найдемъ:

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\gamma} = \frac{H_2}{H}, \quad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\gamma} = \frac{2H_1}{H}$$

Изъ этихъ выраженій видно, что $\frac{\beta}{\alpha}$ и $\frac{\delta}{\gamma}$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$Ht^2 - 2H_1t + H_2 = 0 \tag{48}$$

Очевидно можно положить $\alpha = \gamma = -1$; въ этомъ предположеніи корнями

уравненія (48) будутъ β и δ, а A_0 и A_3 будутъ выраженія, полученныя вставляя въ данное уравненіе (44), $-\beta$ и $-\delta$, именно:

$$A_0 = f(\delta) \quad , \quad A_3 = -f(\beta)$$

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$f(\delta)\, y^3 - f(\beta) = 0$$

Соображаясь съ (42) найдемъ:

$$x = \frac{\beta - \delta \sqrt[3]{\dfrac{f(\beta)}{f(\delta)}}}{1 - \sqrt[3]{\dfrac{f(\beta)}{f(\delta)}}}$$

§ 57. *Задача.* Преобразовать данное уравненіе въ другое, котораго-бы корни были равны квадратамъ корней даннаго?

Рѣшеніе. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \;.\;.\;.\;. + a_{n-1} x + a_n = 0$$

чтобы корни искомаго уравненія были равны квадратамъ корней даннаго, надобно положить $y = x^2$, откуда $x = \sqrt{y}$. Подставляя въ данное уравненіе вмѣсто x его выраженіе, получимъ:

$$a_0 y^{\frac{n}{2}} + a_1 y^{\frac{n-1}{2}} + a_2 y^{\frac{n-2}{2}} + \;.\;.\;.\;.\;.\;. + a_{n-1} y^{\frac{1}{2}} + a_n = 0$$

откуда:

$$a_0 y^{\frac{n}{2}} + a_2 y^{\frac{n-2}{2}} + a_4 y^{\frac{n-4}{2}} + \;.\;.\;. = -\left(a_1 y^{\frac{n-1}{2}} + a_3 y^{\frac{n-3}{2}} + \;.\;.\;.\right)$$

возвышая въ квадратъ обѣ части этого уравненія и дѣлая приведеніе, найдемъ:

$$a_0^2 y^n + (2a_0 a_2 - a_1^2)\, y^{n-1} + (2a_0 a_4 + a_2^2 - 2a_1 a_3)\, y^{n-2} + \ldots = 0$$

ГЛАВА VII.

Опредѣлители.

§ 58. Во всемъ слѣдующемъ необходимо знать свойства функцій, которыя извѣстны въ Анализѣ подъ именемъ *опредѣлителей*. Свойства этихъ функцій замѣчательны въ томъ отношеніи, что съ помощью ихъ совершаются преобразованія и доказываются различныя предложенія чрезвычайно просто, поэтому въ настоящей главѣ мы изложимъ самыя главныя свойства опредѣлителей и нѣкоторыя ихъ приложенія.

§ 59. Возьмемъ произведеніе изъ n множителей $a_1\ b_2\ c_3\ d_4 \ldots l_n$ и, оставляя алфавитяый порядокъ буквъ, будемъ перемѣщать индексы, отъ такого перемѣщенія получимъ $1.2.3\ldots(n-1).n$ такихъ произведеній, каждое изъ n множителей, во всѣ эти произведенія войдутъ n^2 множителей, такъ какъ каждая изъ буквъ, отъ перемѣщенія индексовъ, получитъ n значеній: $a_1,\ a_2,\ldots a_n;\ b_1,\ b_2,\ldots b_n$ и т. д. Если каждому изъ произведеній, полученныхъ отъ перемѣщенія индексовъ дадимъ поперемѣнно знаки, то $+$, то $-$, и возьмемъ алгебраическую сумму, то эта сумма называется *опредѣлителемъ n-го порядка.* Эта функція—опредѣлитель состоитъ изъ $1.2.3\ldots n$ *членовъ*, въ каждомъ числѣ n буквъ съ различными индексами, которые называются *элементами* опредѣлителя, число элементовъ равно n^2.

Опредѣлителя или функцію такъ составленную означаютъ символамы:

$$(a_1b_2c_3\ldots l_n)\quad,\quad \Sigma \pm a_1b_1c_1\ldots\ldots l_n \qquad (1)$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & . & . & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & . & . & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & . & . & l_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & d_n & . & . & l_n \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Первое обозначеніе самое простое, второе напоминаетъ образованіе опредѣлителя и законъ знаковъ, а третье, самое удобное для изслѣдованій, и поэтому вошло во всеобщее употребленіе. Въ послѣднемъ символѣ горизонтальные ряды элементовъ называются *горизонталями*, а вертикальные ряды—*колоннами*. Членъ опредѣлителя, который состоитъ изъ элементовъ, находящихся на діагонали квадрата (2) $a_1b_2c_3\ldots l_n$ называется *главнымъ членомъ*, изъ него образуется опредѣлитель; другой діагональный членъ состоитъ изъ тѣхъ же элементовъ, только индексы ихъ идутъ въ обратномъ порядкѣ, именно: $a_nb_{n-1}c_{n-2}\ldots k_2l_1$.

Вмѣсто буквъ часто, и даже въ большей части случаевъ, употребляютъ одну букву съ двойнымъ индексомъ a_{ik}, первый индексъ соотвѣтствуетъ различнымъ буквамъ, а второй соотвѣтствуетъ индексамъ при буквахъ; при такомъ способѣ обозначенія элементовъ, опредѣлитель образуется изъ произведенія:

$$a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_{nn}$$

перемѣщеніемъ вторыхъ индексовъ, оставляя первые безъ измѣненія. Символы, представляющіе опредѣлителя, будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_{nn}) \\ \Sigma \pm a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \cdot \cdot \cdot \cdot a_{nn}) \end{array}\right. \quad (3)$$

и

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1k} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2k} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3k} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & . & . & a_{ik} & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nk} & . & . & a_{nn} \end{array} \quad (4)$$

Діагональные члены будутъ:

$$a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \cdot \cdot a_{nn} \quad \text{и} \quad a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2} \cdot \cdot \cdot a_{n1} \quad (5)$$

Элементы въ горизонталяхъ иногда отдѣляются другъ отъ друга запятыми; тоже самое замѣтимъ объ индексахъ, безразлично пишутъ $a_{i,k}$ и a_{ik}.

Такой способъ изображенія опредѣлителей тѣмъ удобенъ, что индексы у элемента показываютъ, первый—въ какой горизонтали, а второй—въ какой колоннѣ находится элементъ. Напримѣръ элементъ a_{ik} находится въ i-й горизонтали и въ k-й колоннѣ (4). Элементы a_{ik} и a_{ki} называются *сопряженными*.

Примѣръ 1. Опредѣлитель составленный изъ произведенія a_1b_2 есть:

$$(a_1b) = \Sigma \pm a_1b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \quad (6)$$

это предѣлитель втораго порядка, въ немъ два члена и четыре элемента.

Примѣръ 2. Опредѣлитель составленный изъ произведенія $a_1b_2c_3$ есть:

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

и изображается символами:

$$(a_1b_2c_3) \quad , \quad \Sigma \pm a_1b_2c_3$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

это опредѣлитель третьяго порядка; онъ состоитъ изъ шести членовъ и девяти элементовъ.

Примѣръ 3. Опредѣлитель составленный изъ произведенія $a_1b_2c_3d_4$ есть:

$$\begin{aligned} & a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 + a_1b_3c_4d_2 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_4c_2d_3 - a_1b_4c_3d_2 \\ & + a_2b_1c_4d_3 - a_2b_1c_3d_4 + a_2b_3c_1d_4 - a_2b_3c_4d_1 + a_2b_4c_3d_1 - a_2b_4c_1d_3 \\ & + a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 + a_3b_2c_4d_1 - a_3b_2c_1d_4 + a_3b_4c_1d_2 - a_3b_4c_2d_1 \\ & + a_4b_1c_3d_2 - a_4b_1c_2d_3 + a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 + a_4b_3c_2d_1 - a_4b_3c_1d_2 \end{aligned} \tag{8}$$

и изображается символами:

$$(a_1b_2c_3d_4) \quad , \quad \Sigma \pm a_1b_2c_3d_4$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{9}$$

это есть опредѣлитель четвертаго порядка; онъ состоитъ изъ 24-хъ членовъ и 16-ти элементовъ.

§ 60. Обративъ вниманіе на составъ опредѣлителей различныхъ порядковъ въ развернутой формѣ видно почему Коши назвалъ опредѣлитель терминомъ *знакомѣняющая функція* (fonction alternée). Названіе *опредѣлитель* — *déterminant* впервые было дано Гауссомъ въ началѣ настоящаго столѣтія.

Первая идея опредѣлителей, насколько извѣстно, принадлежитъ Лейбницу, который говоритъ объ этой функціи въ своемъ письмѣ къ Лопиталю (l'Hopital) въ 1639 г. Но дальнѣйшее развитіе эта мысль получила только благодаря женевскому математику Крамеру, въ 1750 г., указавшему законы образованія опредѣлителей и нѣкоторыя ихъ свойства. Крамеръ называлъ опредѣлитель *результатомъ*. Особенно много обязана теорія опредѣлителей своимъ развитіемъ Якоби (Jacobi), написавшимъ первый трактатъ по этому предмету подъ: „De formatione et proprietatibus determinantium", 1841 г. Съ этого времени опредѣлители сдѣлались предметомъ изслѣдованій многихъ математиковъ, приложившихъ ихъ съ успѣхомъ къ вопросамъ анализа, теоріи уравненій, теоріи чиселъ, геометріи и т. д.

Опредѣлитель есть, какъ увидимъ ниже, результатъ исключенія n неизвѣстныхъ изъ n линейныхъ однородныхъ уравненій, или же онъ есть общій знаменатель у неизвѣстныхъ, опредѣленныхъ изъ системы n линейныхъ уравненій. Вслѣдствіе чего эта функція и была названа Крамеромъ *результатомъ*. Такъ напр., опредѣлитель 2-го порядка $a_1b_2-a_2b_1$ есть результатъ исключенія неизвѣстныхъ изъ двухъ уравненій $a_1x+b_1y=0$ и $a_2x+b_2y=0$, или же общій знаменатель у неизвѣстныхъ, опредѣленныхъ изъ уравненій $a_1x+b_1y+c=0$ и $a_2x+b_2y+c=0$. Опредѣлитель 3-го порядка есть результатъ исключенія неизвѣстныхъ изъ трехъ уравненій $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$ и $a_3x+b_3y+c_3z=0$, или же общій знаменатель у неизвѣстныхъ опредѣленныхъ изъ системы уравненій $a_1x+b_1y+c_1z+d=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d=0$ и $a_3x+b_3y+c_3z+d=0$.

Способъ обозначенія опредѣлителей двумя вертикальными чертами, между которыми располагаются его члены, былъ предложенъ въ первый разъ Коши въ 1815 г. Съ этого времени символъ этотъ вошелъ во всеобщее употребленіе.

§ 61. Мы видимъ, что опредѣлитель образуется изъ произведенія $a_1b_2c_3d_4\ .\ .\ .\ l_n$ перемѣщая индексы и давая полученнымъ произведеніямъ знаки попеременно, то $+$, то $-$. Такъ какъ при перемѣщеніи индексовъ не наблюдается никакого порядка, то спрашивается при различныхъ способахъ перемѣщенія индексовъ въ членѣ $a_1b_2c_3\ .\ .\ .\ l_n$ не получатся-ли одни и тѣ же члены, но съ различными знаками?

Въ какомъ-бы порядкѣ не перемѣщались индексы въ произведеніи $a_1b_2c_3\ .\ .\ .\ l_n$ при образованіи изъ него опредѣлителя, слѣдуя указанному правилу для знаковъ, всегда получится одинъ и тотъ-же опредѣлитель какому-бы порядку не слѣдовали при перемѣщеніи индексовъ, начиная съ главнаго члена.

Условимся называть, въ какомъ нибудь перемѣщеніи, *безпорядкомъ индексовъ*, если меньшему индексу предшествуетъ большій слѣва направо.

Возьмемъ, напримѣръ, перемѣщеніе $a_4b_3c_5d_2e_1$, въ немъ восемь безпорядковъ:

$$a_4b_3\ ,\ a_4d_2\ ,\ a_4c_1\ ,\ b_3d_2\ ,\ b_3c_1\ ,\ c_5d_2\ ,\ c_5e_1\ ,\ d_2e_1$$

Въ главномъ діагональномъ членѣ, очевидно, нѣтъ ни одного безпорядка, а въ другомъ діагональномъ:

$$a_n b_{n-1} c_{n-2} \ldots\ldots k_2 l_n$$

ихъ очевидно числомъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Въ членѣ:

$$a_n b_1 c_2 d_3 \ldots\ldots\ldots l_{n-1}$$

безпорядковъ числомъ $n-1$.

Члены опредѣлителя, полученные перемѣщеніемъ индексовъ изъ главнаго члена, дѣлятся на два класса: одинъ классъ имѣетъ четное число безпорядковъ, а другой нечетное; будемъ ихъ называть членами 1-го и 2-го порядковъ.

Слѣдующее предложеніе даетъ возможность опредѣлить характеръ членовъ сопровождаемыхъ знакомъ $+$ и знакомъ $-$.

Предложеніе. Если въ какомъ нибудь членѣ опредѣлителя переставимъ два, какіе нибудь, индекса, оставивъ остальные на своихъ мѣстахъ, то число *безпорядковъ* въ полученномъ членѣ увеличится или уменьшится *нечетнымъ числомъ.*

Доказательство. Пусть:

$$A_k B_g C \tag{10}$$

будетъ рядъ индексовъ въ одномъ изъ членовъ опредѣлителя, гдѣ A есть одна группа индексовъ, B другая и C третья, а k и g суть два индекса. Если перемѣстимъ индексы k и g, то получимъ рядъ индексовъ:

$$A_g B_k C \tag{11}$$

въ членѣ происшедшемъ изъ члена (10) перемѣщеніемъ индексовъ k и g.

Очевидно, что число безпорядковъ въ группахъ (10) и (11), существующее отъ вліянія группъ индексовъ A и C, остается тоже. Пусть это число будетъ N. Такъ какъ индексы k и g не равны, то можно предположить $k > g$. Положимъ, что всѣхъ индексовъ въ группѣ B есть β, очевидно, что измѣненіе числа безпорядковъ въ группѣ (10) произошло только отъ перемѣщенія индексовъ k и g. Если изъ числа β индексовъ

въ группѣ B есть β_1 индексовъ большихъ индекса g, то $\beta-\beta_1$ будетъ число индексовъ въ группѣ B меньшихъ g. Если число индексовъ въ группѣ B большихъ k есть β_2, то меньшихъ k будетъ $\beta-\beta_2$. Слѣдователвно, число безпорядковъ въ группѣ (10) будетъ равно числу $\beta-\beta_2$ сложенному съ единицей, т. е. съ безпорядкомъ изъ индексовъ k и g и сложенному съ числомъ β_1 и N, слѣдовательно, число всѣхъ безпорядковъ будетъ:

$$N+\beta-\beta_2+\beta_1+1$$

Если перемѣстимъ индексы k и g, то подобное разсужденіе дастъ въ членѣ (11) число безпорядковъ:

$$N+\beta-\beta_1+\beta_2$$

разность этихъ чиселъ:

$$2\,(\beta_1-\beta_2)+1$$

есть число нечетное.

Слѣдствіе 1. Изъ этого предложенія непосредственно слѣдуетъ, что изъ числа 1 . 2 . 3 . . . . n членовъ опредѣлителя, происходящаго изъ главнаго члена $a_1b_2c_3\ldots l_n$, въ которомъ нѣтъ ни одного безпорядка, половина будетъ съ четнымъ, а половина съ нечетнымъ числомъ безпорядковъ, т. е. половина членовъ будетъ принадлежать 1-му классу, а половина 2-му. Такъ какъ первый членъ, или главный, есть положительный, то изъ этого слѣдуетъ, что члены съ четнымъ числомъ безпорядковъ будутъ положительные, а съ нечетнымъ числомъ безпорядковъ будутъ отрицательные.

Слѣдствіе 2. Если за главный членъ опредѣлителя возьмемъ какой нибудь изъ его членовъ съ четнымъ числомъ безпорядковъ и изъ него произведемъ опредѣлителя, по тому же закону, то найдемъ тотъ же опредѣлитель, очевидно, который происходитъ изъ главнаго члена.

Если же за главный членъ возьмемъ какой нибудь изъ членовъ опредѣлителя съ нечетнымъ числомъ безпорядковъ, и взявъ его со знакомъ $+$ произведемъ изъ него опредѣлителя, то, очевидно, мы найдемъ тотъ-же опредѣлитель, только всѣ его члены будутъ имѣть противные знаки съ опредѣлителемъ, происшедшимъ изъ главнаго члена. Изъ этого также видимъ, что порядокъ перемѣщенія индексовъ не имѣетъ значенія: опредѣлитель получается изъ главнаго члена всегда одинъ и тотъ же.

Примѣръ 1. Въ опредѣлителѣ, происшедшемъ изъ члена $a_1b_2c_3d_4e_5$, какой знакъ имѣетъ членъ $a_3b_4c_2d_5e_1$?

Рѣшеніе. Въ этомъ членѣ есть слѣдующіе безпорядки: 31, 32, 41, 42, 21, 51, всего шесть, число четное, слѣдовательно, этотъ членъ имѣетъ знакъ $+$.

Примѣръ 2. Какой знакъ имѣетъ членъ $a_3b_7c_6d_5e_1f_4g_2$ въ опредѣлителѣ $(a_1b_2c_3d_4e_5f_6g_7)$?

Рѣшеніе. Въ этомъ членѣ есть слѣдующіе безпорядки:

31 , 32 , 71 , 72 , 74 , 75 , 76 , 61 , 62 , 64 , 65 , 51 , 52 , 54 , 42

числомъ 15, слѣдовательно число нечетное, данный членъ долженъ имѣть знакъ —.

Если опредѣлитель образуется изъ члена съ четнымъ числомъ безпорядковъ, то онъ имѣетъ одинаковый знакъ съ опредѣлителемъ, происходящимъ изъ главнаго члена; если же онъ образуется изъ члена съ нечетнымъ числомъ безпорядковъ, то онъ имѣетъ противный съ нимъ знакъ.

Примѣръ. Такъ напримѣръ:

$$(a_1b_2c_3d_4) \equiv -(a_1b_3c_2d_4).$$

Свойства опредѣлителей.

§ 62. *Свойство 1.* Въ каждомъ опредѣлителѣ можно поставить горизонтали на мѣсто колоннъ, а колонны на мѣсто горизонталей, отъ этого опредѣлитель не измѣнится.

Доказательство. Отъ такого замѣщенія діагональный членъ или главный, изъ котораго происходитъ опредѣлитель, не измѣняется, а слѣдовательно опредѣлитель остается тотъ-же. Напримѣръ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

Опредѣлитель, происшедшій изъ члена составленнаго изъ элементовъ 2-й діагонали будетъ имѣть знакъ + или —, смотря потому будетъ ли число $\frac{n(n-1)}{2}$ четное или нечетное. Напримѣръ имѣемъ:

$$(a_6\,b_5\,c_4\,d_3\,e_2\,f_1) \equiv -(a_1\,b_2\,c_3\,d_4\,e_5\,f_6)$$

~~*Слѣдствіе*~~ Свойство 2. Если перемѣстимъ двѣ горизонтали или двѣ колонны въ опредѣлителѣ, то опредѣлитель измѣнитъ знакъ.

Доказательство. Перемѣщеніемъ двухъ горизонталей или двухъ колоннъ перемѣщаются два индекса въ діагональномъ членѣ, слѣдовательно опредѣлитель измѣнитъ знакъ.

Примѣръ.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

Свойство 3. Если въ опредѣлителѣ двѣ горизонтали или двѣ колонны тождественны, то опредѣлитель тождественно равенъ нулю.

Доказательство. Если тождественные горизонтали или колонны перемѣстимъ, то опредѣлитель долженъ измѣнить знакъ (свой. 2), но такое перемѣщеніе опредѣлителя не измѣняетъ, слѣдовательно онъ равенъ самъ себѣ съ противнымъ знакомъ, а такое свойство имѣетъ только нуль.

Свойство 4. Если каждый элементъ горизонтали или колонны помножимъ на какое нибудь число, то опредѣлитель будетъ умноженъ на тоже число.

Доказательство. Это слѣдуетъ изъ того, что въ каждый членъ опредѣлителя входитъ одинъ, и только одинъ, изъ элементовъ каждой горизонтали и каждой колонны.

Слѣдствіе 1. Если элементы одной горизонтали или колонны отличаются только общимъ множителемъ отъ элементовъ другой горизонтали или колонны, то опредѣлитель тождественно равенъ нулю.

Слѣдствіе 2. Если во всѣхъ элементахъ одной колонны или горизонтали перемѣнимъ знаки, то опредѣлитель перемѣнитъ также знакъ.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 3. Показать что:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Если означимъ этотъ опредѣлитель чрезъ Δ, то найдемъ:

$$abc.\Delta = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

откуда раздѣляя на abc найдемъ предложенное тождество.

Примѣръ 4. Точно также найдемъ:

$$\begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ cda & b & b^2 & b^3 \\ dba & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 5. Показать что:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \equiv (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$

Примѣръ 6. Показать что:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix} \equiv -(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$$

Свойство 5. Если въ опредѣлителѣ элементы первой горизонтали или первой колонны равны нулю, исключая перваго, то такой опредѣлитель равенъ опредѣлителю, который получится, если въ данномъ опредѣлителѣ выбросимъ первую горизонталь и первую колонну и полученный, такимъ образомъ, опредѣлитель помножимъ на первый элементъ выброшенной горизонтали или колонны.

Доказательство. Пусть данный опредѣлитель будетъ 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Онъ произошелъ изъ діагональнаго члена $a_1 b_2 c_3 d_4$, въ которомъ при перемѣщенія индексовъ, каждый разъ когда элементъ a получитъ индексъ отличный отъ единицы, онъ равенъ нулю, а слѣдовательно и членъ опредѣлителя, въ который онъ входитъ, равенъ нулю, такъ что только остаются тѣ члены опредѣлителя, которые происходятъ отъ перемѣщенія индексовъ только въ произведеніи $b_2 c_3 d_4$, а эти члены составляютъ опредѣлителя 3-го порядка $(b_2 c_3 d_4)$. Слѣдовательно имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Слѣдствіе 1. Произвольно выбранный элементъ a_{ik} можно перенести на первое мѣсто главной діагонали, причемъ опредѣлитель получаетъ множитель $(-1)^{i+k}$. Въ самомъ дѣлѣ i-ю горизонталь $i-1$ перемѣщеніями перенесемъ на мѣсто первой горизонтали, при этомъ опредѣлитель получитъ множителя $(-1)^{i-1}$, затѣмъ k-ю колонну $k-1$ перемѣщеніями перенесемъ на первое мѣсто, очевидно что такое перемѣщеніе перенесетъ $a_{i,k}$ на первое мѣсто главной діагонали, а опредѣлитель получитъ множителя $(-1)^{i+k-2} = (-1)^{i+k}$.

Если теперь предположимъ, что всѣ элементы i-й горизонтали, исключая $a_{i,k}$ равны нулю, то по предъидущему (св. 5) опредѣлитель будетъ равенъ опредѣлителю, полученному, выбрасывая первую горизонталь и первую колонну и умножая его на $(-1)^{i+k} a_{ik}$. Что сказано о горизонтали, то относится и къ колоннѣ.

Примѣръ 1.

Пусть, напримѣръ, данный опредѣлитель будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Если третью горизонталь перенесемъ на первое мѣсто, то будемъ имѣть:

$$(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & b_3 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Если за этимъ вторую колонну перенесемъ на первое мѣсто, то найдемъ:

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

откуда имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = (-1)^3 b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Слѣдствіе 2. Съ помощью этого свойства каждый опредѣлитель можно написать въ формѣ опредѣлителя высшаго порядка. Пусть, напримѣръ, будетъ данъ опредѣлитель третьяго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

его можно написать въ слѣдующей формѣ 4-го порядка (слѣд. 1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & a_1 & b_1 & c_1 \\ \beta & a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

гдѣ α, β, γ суть количества совершенно произвольныя.

Каждое количество a_1 можно написать въ формѣ опредѣлителя 2-го, 3-го и т. д. порядка. Такъ напримѣръ:

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 & 0 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & a_1 \end{vmatrix} = \text{и т. д.}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a_1 & b_1 \\ \beta & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \text{и т. д.}$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ суть количества совершенно произвольныя.

Слѣдствіе 3. Если въ опредѣлителѣ всѣ элементы, стоящіе по правую сторону главной діагонали, равны нулю, то опредѣлитель равенъ діагональному члену.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ такой опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4$$

это вытекаетъ изъ свойства 5-го.

Свойство 6. Если каждый элементъ какой нибудь колонны или горизонтали состоитъ изъ суммы двухъ элементовъ, то опредѣлитель равенъ суммѣ двухъ опредѣлителей, изъ коихъ въ одномъ колонна, или горизонталь, состоящая изъ суммы элементовъ, замѣщена элементами одного ряда слагаемыхъ, а въ другомъ—элементами другаго ряда слагаемыхъ.

Доказательство. Такъ какъ въ каждый членъ опредѣлителя входитъ одинъ, и только одинъ, изъ элементовъ каждой колонны и каждой горизонтали, то каждый членъ опредѣлителя разобьется на сумму двухъ членовъ, изъ коихъ въ одинъ будетъ входить одно изъ слагаемыхъ какъ элементъ, а въ другой другое слагаемое какъ элементъ, откуда и вытекаетъ настоящее свойство. Пусть напримѣръ будетъ данъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ b_1+\beta_1 & b_2 & c_2 \\ c_1+\gamma_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \beta_1 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Легко видѣть, что:

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойство 7. Если къ элементамъ колонны или горизонтали прибавимъ соотвѣтствующіе элементы другой колонны или горизонтали, умноженные каждый на произвольный множитель, то опредѣлитель отъ этого не измѣнится.

Доказательство. Полученный такимъ образомъ опредѣлитель равенъ суммѣ двухъ опредѣлителей: даннаго и другаго, въ которомъ будутъ тождественны двѣ колонны или двѣ горизонтали, слѣдовательно этотъ 2-й опредѣлитель равенъ нулю.

Примѣръ. Пусть будетъ данъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

помножимъ элементы 2-й колонны на λ и прибавимъ ихъ къ 1-й колоннѣ, то найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

послѣдній опредѣлитель равенъ нулю (св. 3), слѣдовательно:

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 1. Показать что опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \alpha & 1 \\ \gamma+\alpha & \beta & 1 \\ \alpha+\beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

равенъ нулю?

Если придадимъ къ первой колоннѣ вторую, то найдемъ:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha & 1 \\ \alpha+\beta+\gamma & \beta & 1 \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & 1 \end{vmatrix} \equiv (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \gamma & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

такъ какъ послѣдній опредѣлитель имѣетъ двѣ колонны тождественныя.

Примѣръ 2. Найти числовое значеніе опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

Если изъ второй колонны вычтемъ первую, а изъ третьей первую, умноженную на три, то найдемъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

§ 63. Такъ какъ каждый членъ опредѣлителя содержитъ только по одному элементу изъ каждой горизонтали и каждой колонны, то изъ этого слѣдуетъ, что опредѣлитель есть линейная функція элементовъ какой нибудь горизонтали или колонны. Пусть данный опредѣлитель будетъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1k} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2k} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & a_{ik} & . & a_{ik} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & . & a_{nk} & . & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что мы его можемъ написать, какъ линейную функцію элементовъ i-й горизонтали или k-й колонны, т. е.:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad (13)$$

или:

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \qquad (14)$$

гдѣ A_{ik} суть коэфиціенты у элементовъ a_{ik}.

Легко опредѣлить коэфиціенты у элементовъ слѣдующимъ образомъ: Положимъ въ опредѣлителѣ (12) всѣ элементы i-й горизонтали равными нулю, исключая элемента a_{ik}, который положимъ равнымъ единицѣ, при такомъ условіи уравненіе (13) сдѣлается:

$$A_{ik} = \Delta$$

гдѣ Δ уже будетъ тотъ опредѣлитель, который получится изъ (12), выбросивъ въ немъ i-ю горизонталь и k-ю колонну и умноживъ его на $(-1)^{i+k}$ (свойство 5, слѣд. 1), т. е.:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdot & \cdot & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdot & \cdot & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdot & \cdot & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdot & \cdot & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

Этотъ опредѣлитель называется *миноромъ* опредѣлителя Δ, соотвѣтствующимъ элементу a_{ik}.

Примѣръ 1. Опредѣлитель 4-го порядка, разложенный по 2-й горизонтали, будетъ имѣть форму:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Тотъ-же опредѣлитель, разложенный по третьей колоннѣ, будетъ имѣть форму:

$$c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 2. Найти выраженіе опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

разлагая по 1-й колоннѣ, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix} = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

Примѣръ 3. Найти числовую величину опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

разлагая по 1-й колоннѣ найдемъ:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3(48-3)-7(16-12)+5(2-24)=-3$$

Примѣръ 4. Найти выраженіе опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{vmatrix} - \alpha\begin{vmatrix} -\alpha & \gamma \\ \beta & -1 \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ \beta & -\gamma \end{vmatrix} = 1+\gamma^2+\alpha^2+\beta^2$$

§ 64. Если въ опредѣлителѣ Δ тѣ горизонтали и тѣ колонны, въ которыхъ находятся элементы a_{ik} и a_{rs} выбросимъ, то остальные элементы, сдвинувъ колонны и горизонтали, образуютъ опредѣлителя, который называется *вторымъ миноромъ*.

Примѣръ 1. Пусть данный опредѣлитель будетъ.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \Delta$$

выбрасывая колонны и горизонтали, въ которыхъ находится b_2 и c_3 будемъ

имѣть второй миноръ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Если въ опредѣлителѣ Δ выбросимъ колонны и горизонтали, въ которыхъ находятся a_{ik}, a_{rs}, a_{tp}, то остальныя колонны и горизонтали образуютъ опредѣлителя, который называется *третьимъ миноромъ*.

§ 65. Если миноры, соотвѣтствующіе i-й горизонтали и т. д.

$$A_{i1} \quad A_{i2} \quad A_{i3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A_{in}$$

умножимъ на элементы какой нибудь горизонтали, напримѣръ на элементы:

$$a_{j1} \quad a_{j2} \quad a_{j3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a_{jn}$$

и произведеніе сложимъ, то получимъ сумму:

$$a_{j1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{j3}A_{i3} + \quad . \; . \; . \; . \quad + a_{jn}A_{in} \qquad (16)$$

которая тождественно равна нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, эта сумма есть ничто иное, какъ опредѣлитель, въ которомъ i-я горизонталь равна j-й, а такой опредѣлитель тождественно равенъ нулю (свойство 3). Точно также:

$$a_{1s}A_{1k} + a_{2s}A_{2k} + a_{3s}A_{3k} + \quad . \; . \; . \; . \quad + a_{ns}A_{nk} \equiv 0 \qquad (17)$$

Умноженіе опредѣлителей.

§ 66. Возьмемъ два опредѣлителя втораго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

и составимъ изъ нихъ опредѣлитель также втораго порядка, слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \qquad (19)$$

Легко видѣть, что этотъ опредѣлитель есть произведеніе двухъ первыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (свойства 4 и 6):

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 \\ b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & b_1\beta_2 \\ b_2\beta_1 & b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

откуда, замѣчая что первый и послѣдній изъ опредѣлителей второй части равны нулю (свойство 3), найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \alpha_2\beta_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Изъ этого видимъ, что опредѣлитель (19), составленный изъ опредѣлителей (18), есть ихъ произведеніе. Слѣдовательно:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_1\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \qquad (20)$$

Возьмемъ еще два опредѣлителя третьяго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (21)$$

и составимъ изъ нихъ опредѣлитель 3-го порядка, слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (22)$$

Легко показать, что, такимъ образомъ составленный опредѣлитель есть произведеніе двухъ первыхъ (21).

Этотъ опредѣлитель разложится (по свойство 6) на сумму 27-ми опредѣлителей, изъ нихъ 21 равны нулю (свойство 3), а остальные шесть

опредѣлителей суть:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 & b_1\beta_3 \\ c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 & b_2\beta_3 \\ c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 & c_1\gamma_3 \\ b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 & c_2\gamma_3 \\ b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 \\ b_2\beta_1 & c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 \\ b_3\beta_1 & c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1\gamma_1 & b_1\beta_2 & a_1\alpha_3 \\ c_2\gamma_1 & b_2\beta_2 & a_2\alpha_3 \\ c_3\gamma_1 & b_3\beta_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}$$

Эти опредѣлители могутъ быть написаны въ формѣ (свойство 4 и 6):

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \alpha_1\beta_2\gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha_3\beta_1\gamma_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} -$$

$$- \alpha_2\beta_1\gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha_3\beta_1\gamma_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \alpha_3\beta_2\gamma_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если опредѣлитель поставимъ общимъ множителемъ, то найдемъ:

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

а это произведеніе, очевидно, равно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

Такой способъ доказательства можно приложить и къ перемноженію двухъ опредѣлителей 4-го порядка и т. д.

Изъ такого способа мы выводимъ слѣдующее правило:

Надобно каждый элементъ первой горизонтали 1-го опредѣлителя умножить на каждый соотвѣтствующій элементъ первой горизонтали 2-го опредѣлителя и сложить произведенія—это будетъ первый элементъ про-

изведенія; помножить каждый элементъ 2-й горизонтали 1-го опредѣлителя на каждый соотвѣтствующій элементъ 1-й горизонтали 2-го опредѣлителя и сложить произведенія—это будетъ второй элементъ колонны произведенія; продолжая, такимъ образомъ, помноженіе горизонталей 1-го опредѣлителя на 1-ю горизонталь 2-го, мы будемъ имѣть n элементовъ 1-й колонны. За этимъ 2-я колонна произведенія получается, помножая всѣ горизонтали 1-го опредѣлителя на 2-ю горизонталь 2-го, получимъ 3-ю колонну произведенія, и такимъ образомъ будемъ поступать пока не исчерпаемъ всѣхъ горизонталей 2-го опредѣлителя.

Слѣдствіе. Такъ какъ колонны можно поставить на мѣсто горизонталей, а горизонтали на мѣсто колоннъ (свойство 1), то изъ этого вытекаетъ что для перемноженія двухъ опредѣлителей можно составлять элементы опредѣлителя произведенія изъ колоннъ, такъ какъ мы ихъ составляли изъ горизонталей или въ одномъ изъ нихъ брать горизонтали, а въ другомъ колонны; такимъ образомъ можно дать произведенію четыре различныя формы.

Примѣръ 1.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\beta_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2 & a_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2 & b_1\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2 & a_1\beta_1+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\alpha_2 & a_2\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1 & a_1\alpha_2+a_1\beta_2 \\ b_1\alpha_1+b_2\beta_1 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} \qquad (24)$$

Примѣръ 2. Найти произведеніе опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1-bi & c_1-di \\ -c_1-di & a_1+b_1i \end{vmatrix}$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$. Произведеніе можно написать въ формѣ:

$$\begin{vmatrix} D-Ci & B-Ai \\ -B-Ai & D+Ci \end{vmatrix}$$

гдѣ:

$$A \equiv bc_1-b_1c+ad_1-a_1d \qquad B \equiv ca_1-c_1a+bd_1-b_1d$$

$$C \equiv ab_1-a_1b+cd_1-c_1d \qquad D \equiv aa_1+bq_1+cc_1+dd_1$$

откуда вытекаетъ предложеніе Эйлера:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2_1+b^2_1+c^2_1+d^2_1)=(aa_1+bb_1+cc_1+dd_1)^2+$$
$$+(bc_1-b_1c+ad_1-a_1d)^2+(ca_1-c_1a+bd_1-b_1d)^2+(ab_1-a_1b+cd_1-c_1d)^2$$

Примѣръ 3.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2_1+b^2_1 & a_1a_2+b_1b_2 \\ a_2a_1+b_2b_1 & a^2_2+b^2_2 \end{vmatrix}$$

§ 67. Если бы было дано помножить два опредѣлителя не одного порядка, то надобно опредѣлителя низшаго порядка представить въ формѣ опредѣлителя одного порядка съ даннымъ высшаго порядка, какъ было показано выше (свойство 5, слѣд. 2), а затѣмъ перемножить по правилу выше показанному.

Примѣръ. Если бы было дано помножить опредѣлителя 2-го порядка на опредѣлителя 3-го порядка, напримѣръ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{на} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

то мы можемъ первый изъ нихъ написать въ формѣ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Если бы тотъ же опредѣлитель 2-го порядка требовалось помножить на опредѣлителя 4-го порядка, то мы должны опредѣлитель 2-го порядка написать въ формѣ 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

и т. д.

§ 68. Система элементовъ, образующихъ опредѣлитель, составляетъ квадратъ, если же система состоитъ изъ колоннъ и горизонталей, въ которыхъ число элементовъ больше въ горизонтали, чѣмъ въ колоннѣ или обратно, то элементы образуютъ прямоугольникъ. Изъ такой системы опредѣлитель составленъ быть не можетъ; но процессомъ подобнымъ перемноженію опредѣлителей (§ 66) изъ двухъ такихъ системъ, можно составить опредѣлителя, коего свойства мы теперь и покажемъ.

1. Число колоннъ больше числа горизонталей. Возьмемъ, напримѣръ, двѣ системы:

$$(m)\quad \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{matrix} \quad (n) \tag{25}$$

и надъ этими системами совершимъ дѣйствіе перемноженія опредѣлителей, то получимъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1+d_1\delta_1 & a_1\beta_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2+d_1\delta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1+d_2\delta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2+d_2\delta_2 \end{vmatrix} \tag{26}$$

разлагая этотъ опредѣлитель на сумму опредѣлителей (свойство 6) легко найдемъ:

$$(a_1b_2)(\alpha_1\beta_2)+(a_1c_2)(\alpha_1\gamma_2)+(a_1d_2)(\alpha_1\delta_2)+(b_1c_2)(\beta_1\gamma_2)+(b_1d_2)(\beta_1\delta_2)+(c_1d_2)(\gamma_1\delta_2)$$

т. е. опредѣлитель (26) есть сумма произведеній всѣхъ опредѣлителей одной системы на соотвѣтствующихъ опредѣлителей другой системы, взявъ всѣ возможныя сочетанія по двѣ колонны.

Это правило легко распространить и на общій случай какого угодно числа элементовъ въ системахъ.

2. Число горизонталей больше числа колоннъ. Возьмемъ, напримѣръ, двѣ системы:

$$(m)\quad \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix} \quad (n) \tag{27}$$

Составимъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3 \end{vmatrix} \tag{28}$$

Если и здѣсь разложимъ на сумму опредѣлителей (свойство 6), то увидимъ, что въ каждомъ опредѣлителѣ, составляющемъ сумму произведеній, двѣ колонны будутъ равны, слѣдовательно всѣ опредѣлители тождественно равны нулю, а слѣдовательно тождественно равенъ нулю и составленный опредѣлитель (28).

Тоже легко можемъ распространить и на общій случай.

Примѣръ 1. Даны двѣ системы элементовъ:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

показать что:

$$\begin{vmatrix} 3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & x^2_1+x^2_2+x^2_3 \end{vmatrix} = (x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2$$

Примѣръ 2. Даны двѣ системы элементовъ:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & a_1 & b_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_2 & -2a_1 & a_0 \\ b_2 & -2b_1 & b_0 \end{matrix}$$

показать что:

$$4(a_0a_2-a^2_1)(b_0b_2-a^2_1)-(a_0b_2+b_0a_2-2a_1b_1)^2 \equiv$$

$$\equiv 4(a_1b_2-a_2b_1)(a_0b_1-b_0a_1)-(a_0b_2-b_0a_2)^2$$

Примѣръ 3. Составить опредѣлителя изъ двухъ системъ:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

и показать что:

$$(a_0^2+a^2_1+a^2_2)(b_0^2+b^2_1+b^2_2)=$$

$$\equiv (a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_0-a_0b_2)^2+(a_0b_1-b_0a_1)^2$$

Примѣръ 4. Составить опредѣлитель изъ двухъ системъ:

$$\begin{matrix} a^2_1 & a_1 & 1 \\ a^2_2 & a_2 & 1 \\ a^2_3 & a_3 & 1 \\ a^2_4 & a_4 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -2b_1 & b^2_1 \\ 1 & -2b_2 & b^2_2 \\ 1 & -2b_3 & b^2_3 \\ 1 & -2b_4 & b^2_4 \end{matrix}$$

легко найти что:

$$\begin{vmatrix} (a_1-b_1)^2 & (a_1-b_2)^2 & (a_1-b_3)^2 & (a_1-b_4)^2 \\ (a_2-b_1)^2 & (a_2-b_2)^2 & (a_2-b_3)^2 & (a_2-b_4)^2 \\ (a_3-b_1)^2 & (a_3-b_2)^2 & (a_3-b_3)^2 & (a_3-b_4)^2 \\ (a_4-b_1)^2 & (a_4-b_2)^2 & (\alpha_4-b_3)^2 & (a_4-b_4)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Взаимные опредѣлители.

§ 69. Мы выше видѣли, что каждому элементу a_{ik} опредѣлителя n-го порядка соотвѣтствуетъ миноръ A_{ik}, слѣдовательно такихъ миноровъ есть столько, сколько и элементовъ въ опредѣлителѣ, т. е. n^2. Изъ этихъ миноровъ можно составить, взявъ ихъ за элементы, опредѣлителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & . & . & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & . & . & A_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{vmatrix} \qquad (29)$$

который называется *взаимнымъ опредѣлителемъ* даннаго опредѣлителя. Если означимъ данный чрезъ Δ, то взаимный означается символомъ Δ'.

§ 70. *Предложеніе.* Взаимный опредѣлитель опредѣлителя n-го порядка равенъ своему начальному, возвышенному въ $n-1$-ю степень.

Доказательство. Для простоты доказательства возьмемъ опредѣлителя 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Составимъ его взаимный:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

перемножимъ эти два опредѣлителя, по выше данному правилу, горизон-

тали одного на горизонтали другаго. Замѣчая при этомъ, что если въ элементахъ произведенія, которые имѣютъ всѣ форму:

$$a_i A_k + b_i B_k + c_i C_k + d_i D_k$$

индексы i и k неравны, то эта сумма равна нулю (17), если же индексы равны, то она равна Δ. Замѣтивъ это, будемъ имѣть произведеніе:

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta \Delta'$$

Но по предъидущему (св. 5, слѣд. 3) видно, что опредѣлитель первой части равенъ произведенію діагональныхъ элементовъ, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\Delta^4 = \Delta \Delta'$$

откуда:

$$\Delta' = \Delta^3 \qquad (30)$$

что и требовалось доказать. Очевидно это разсужденіе можно приложить дословно къ опредѣлителю n-го порядка и мы будемъ имѣть:

$$\Delta' = \Delta^{n-1} \qquad (31)$$

§ 71. Взаимный опредѣлитель Δ' имѣетъ свои миноры различныхъ порядковъ, которые изъ него образуются точно также, какъ изъ опредѣлителя начальнаго Δ образуются его миноры.

Примѣръ. Такъ напримѣръ, если:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

то миноры перваго порядка опредѣлителя Δ' суть:

$$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}, \quad \text{и т. д.}$$

Миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_2 & D_2 \\ A_4 & D_4 \end{vmatrix}, \quad \text{и т. д.}$$

§ 72. Если составимъ миноръ, какого нибудь порядка, опредѣлителя Δ, вычеркнувъ изъ него, какъ показано въ § 64, нѣсколько колоннъ и горизонталей, а изъ взаимнаго опредѣлителя Δ' составимъ миноръ изъ элементовъ, соотвѣтствующихъ элементамъ опредѣлителя Δ, стоящихъ на пересѣченіи выброшенныхъ колоннъ и горизонталей, то такіе два опредѣлителя называются *дополнительными минорами* опредѣлителей Δ и Δ'.

Примѣръ. Если:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 \end{vmatrix}$$

Опредѣлители:

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & e_1 \\ a_3 & d_3 & e_3 \\ a_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_4 & C_4 \end{vmatrix}$$

суть дополнительные миноры. Опредѣлители:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

суть также дополнительные миноры. Точно также:

$$a_1 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 & F_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 & D_5 & E_5 \end{vmatrix}$$

суть дополнительные миноры.

§ 73. *Предложеніе.* Миноръ m-го порядка взаимнаго опредѣлителя Δ' равенъ дополнительному минору начальнаго опредѣлителя Δ, умноженному на m—1 степень опредѣлителя Δ.

Доказательство. Возьмемъ для простоты опредѣлителя 4-го порядка и его взаимный.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

пусть требуется выразить первый миноръ взаимнаго Δ', соотвѣтствующій элементу A_1, этотъ миноръ есть:

$$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

Помножимъ опредѣлитель Δ на предъидущій, представленный въ видѣ опредѣлителя 4-го порядка (свойство 5), то будемъ имѣть (§ 67):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & \Delta & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & \Delta & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

откуда:

$$\Delta \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = a_1 \Delta^3$$

или:

$$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = a_1 \Delta^2$$

что и выражаетъ предложенную теорему.

Возьмемъ еще 2-й миноръ опредѣлителя $\triangle'$, именно:

$$\begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

Помножимъ этотъ опредѣлитель, представленный въ формѣ 4-го порядка, на $\triangle$, то будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & \triangle & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & \triangle \end{vmatrix}$$

откуда:

$$\cdot \triangle \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \triangle^2$$

или:

$$\begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \triangle$$

что и выражаетъ предложенную теорему.

§ 74. *Предложеніе.* Опредѣлитель n-го порядка:

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots . t_n = (a_1 b_2 c_3 \ldots . t_n) \tag{32}$$

можетъ быть представленъ какъ сумма изъ:

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots . (n-m+1)}{1 . 2 . 3 \ldots . m} \tag{33}$$

произведеній миноровъ m-го и $n-m$-го порядковъ.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлитель (32) можетъ быть образованъ изъ главнаго члена $a_1 b_2 c_3 \ldots t_n$ слѣдующимъ образомъ: составимъ изъ произведенія $a_1 b_2 c_3 \ldots . t_n$ различныя сочетанія по m элементовъ, число ихъ будетъ (33). Пусть одно изъ такихъ сочетаній будетъ:

$$a_1 b_2 c_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad l_m$$

Составимъ изъ него опредѣлителя $(a_1 b_2 c_3 \ldots l_m)$; тоже сдѣлаемъ и съ остальными сочетаніями по m элементовъ, такимъ образомъ получимъ опре-

дѣлителей m-го порядка числомъ (33). Въ каждомъ изъ нихъ число членовъ будетъ $1.2.3\ldots.m$. Каждому изъ такихъ опредѣлителей принадлежитъ опредѣлитель $n-m$-го порядка, составленный изъ остальныхъ $n-m$ элементовъ, такъ, напр., опредѣлителю $(a_1b_2c_3\ldots l_n)$ принадлежитъ опредѣлитель $(p_{m+1}q_{m+2}\ldots t_n)$, который имѣетъ $1.2.3\ldots.(n-m)$ членовъ, и въ произведеніи двухъ такихъ опредѣлителей число членовъ будетъ:

$$1.2.3\ldots\ldots m.1.2.3\ldots\ldots(n-m)$$

но такъ какъ такихъ произведеній есть числомъ (33), то всѣхъ членовъ въ суммѣ всѣхъ такихъ произведеній будетъ, очевидно:

$$1.2.3\ldots\ldots n$$

т. е. всѣ члены опредѣлителя $(a_1b_2c_3\ldots.t_n)$.

Знакъ каждаго изъ такихъ произведеній опредѣляется числомъ безпорядковъ въ членѣ, происшедшемъ отъ перемноженія первыхъ членовъ опредѣлителей, составляющихъ каждое произведеніе.

Примѣръ 1. Пусть будетъ данъ опредѣлитель 4-го порядка $(a_1b_2c_3d_4)$. Онъ состоитъ изъ суммы произведеній опредѣлителей:

$$(a_1b_2)(c_3d_4)\quad(a_1b_3)(c_2d_4)\quad(a_1b_4)(c_2d_3)\quad(a_2b_3)(c_1d_4)\quad(a_2b_4)(c_1d_3)\quad(a_3b_4)(c_1d_2)$$

знаки этихъ опредѣлителей будутъ $+ - + + - +$, т. е. имѣемъ:

$$(a_1b_2c_3d_4)=$$
$$=(a_1b_2)(c_3d_4)-(a_1b_3)(c_2d_4)+(a_1b_4)(c_2b_3)+(a_2b_3)(c_1d_4)-(a_2b_4)(c_1d_3)+(a_3b_4)(c_1d_3)$$

Примѣръ 2. Точно также найдемъ:

$$(a_1b_2c_3d_4e_5)=(a_1b_2)(c_3d_4e_5)-(a_1b_3)(c_2d_4e_5)+$$
$$+(a_1b_4)(c_2d_3e_5)-(a_1b_5)(c_2d_3e_4)+(a_2b_3)(c_1d_4e_5)-(a_2b_4)(c_1d_3e_5)+$$
$$+(a_2b_5)(c_1d_3e_4)+(a_3b_4)(c_1d_2e_5)-(a_3b_5)(c_1d_2e_4)+(a_4b_5)(c_1d_2e_3)$$

Примѣръ 3. Легко видѣть изъ предъидущаго, что опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & c_5 \end{vmatrix}$$

равенъ:

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 4.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_2 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 5. Легко видѣть также что

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \lambda & \lambda' \\ h & b & f & \mu & \mu' \\ g & f & c & \nu & \nu' \\ \lambda & \mu & \nu & 0 & 0 \\ \lambda' & \mu' & \nu' & 0 & 0 \end{vmatrix} = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\alpha\gamma + 2h\alpha\beta$$

гдѣ:

$$\alpha = \mu\nu' - \mu'\nu$$

$$\beta = \nu\lambda' - \nu'\lambda$$

$$\gamma = \lambda\mu' - \lambda'\mu$$

Симметрическіе опредѣлители и ихъ свойства.

§ 75. *Опредѣленіе.* Если въ опредѣлителѣ k-й элементъ въ i-й горизонтали равенъ всегда i-му элементу въ k-й колоннѣ, т. е. если имѣемъ всегда для всѣхъ индексовъ:

$$a_{ik} = a_{ki} \tag{34}$$

то опредѣлитель называется *симметрическимъ*.

Примѣръ. Опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$$

есть симметрическій 3-го порядка.

Очевидно, въ симметрическомъ опредѣлителѣ k-я колонна тождественна съ i-й горизонталью, такъ въ предъидущемъ примѣрѣ вторая колонна тождественна со 2-й горизонталью.

Изъ этого видимъ, что если въ симметрическомъ опредѣлителѣ выбросимъ k-ю колонну и i-ю горизонталь, то получимъ миноръ, который равенъ минору, полученному, если выбросимъ k-ю горизонталь и i-ю колонну, т. е. будемъ имѣть всегда:

$$A_{ik} = A_{ki}$$

откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Взаимный опредѣлитель симметрическаго опредѣлителя есть самъ симметрическій опредѣлитель.

Примѣръ 1. Квадратъ какого нибудь опредѣлителя есть симметрическій опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2_1 + b^2_1 + c^2_1 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a^2_2 + b^2_2 + c^2_2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a^2_3 + b^2_3 + c^2_3 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 2.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

Рѣшимъ еще нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 3.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = a^2a^2_1 + b^2b^2_1 + c^2c^2_1 - 2aa_1bb_1 - 2aa_1cc_1 - 2bb_1cc_1 =$$

$$= (aa_1 + bb_1 - cc_1)^2 - 4aa_1bb_1 =$$

$$= -(\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1})(-\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1})(\sqrt{aa_1}-\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1})(\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}-\sqrt{cc_1})$$

Примѣръ 4.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc = (a+b-c)^2-4ab$$

$$= -(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$$

§ 76. Если въ опредѣлителѣ элементъ, стоящій въ k-й колоннѣ и i-й горизонтали всегда равенъ элементу, стоящему въ i-й колоннѣ и въ k-й горизонтали, взятому съ противнымъ знакомъ, т. е. если мы всегда имѣемъ:

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

то опредѣлитель называется *косымъ симметрическимъ*. Чтобы предъидущее условіе было удовлетворено для всѣхъ элементовъ, необходимо, чтобы

$$a_{ii} = 0$$

т. е. чтобы всѣ элементы главной діагонали были равны нулю.

Примѣръ.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad-be+cf)^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & c \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad+be+cf)^2$$

§ 77. *Предложеніе.* Взаимный опредѣлитель симметрическаго опредѣлителя есть также симметрическій опредѣлитель.

Доказательство. Въ симметрическомъ опредѣлителѣ горизонтали тождественны колоннамъ, слѣдовательно, миноръ относительно элемента a_{ik} будетъ равенъ минору относительно элемента a_{ki}, т. е. $A_{ik} = A_{ki}$; эти два минора отличаются только тѣмъ, что колонны одного суть горизонтали другаго и обратно.

Примѣръ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & g & f \\ c & f & e \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} g & f \\ f & e \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} b & f \\ c & e \end{vmatrix} \qquad C_1 = \begin{vmatrix} b & g \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} b & c \\ f & e \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ c & e \end{vmatrix} \qquad C_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b & c \\ g & f \end{vmatrix} \qquad B_3 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & f \end{vmatrix} \qquad C_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & g \end{vmatrix}$$

откуда видимъ, что:

$$A_2 = B_1 \qquad A_3 = C_1 \qquad B_3 = C_2$$

слѣдовательно, взаимный опредѣлитель Δ' есть симметрическій.

§ 78: *Предложеніе.* Взаимный опредѣлитель косаго симметрическаго опредѣлителя будетъ симметрическій, если данный опредѣлитель будетъ нечетнаго порядка и будетъ косой симметрическій, если данный опредѣлитель будетъ четнаго порядка.

Доказательство. Если данный опредѣлитель будетъ нечетнаго порядка, то его первые миноры будутъ опредѣлители четнаго порядка. Первые миноры, относительно сопряженныхъ элементовъ, будутъ отличаться только тѣмъ, что колонны одного равны горизонталямъ другаго, съ противными знаками. Перемѣняя знаки въ колоннахъ или горизонталяхъ одного изъ нихъ, опредѣлитель не измѣняется, такъ какъ онъ четнаго порядка, но колонны одного дѣлаются равными горизонталямъ другаго, слѣдовательно, эти миноры равны, а потому взаимный опредѣлитель будетъ симметрическій.

Если данный косой симметрическій опредѣлитель будетъ четнаго порядка, то сопряженные его миноры будутъ нечетнаго порядка, а слѣдовательно, разсуждая какъ выше, увидимъ, что они будутъ равны, но съ противными знаками, слѣдовательно, взаимный опредѣлитель косаго симметрическаго опредѣлителя четнаго порядка будетъ самъ косой симметрическій опредѣлитель.

Примѣръ 1. Пусть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

будетъ косой симметрическій опредѣлитель 3-го порядка. Его взаимный будетъ:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} c^2 & bc & ac \\ bc & b^2 & ab \\ ac & ab & a^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} c & c & c \\ b & b & b \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$$

какъ видно симметрическій и тождественно равенъ нулю.

Примѣръ 2. Пусть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

косой симметрическій опредѣлитель 1-го порядка. Элементы его взаимнаго будутъ:

$$A_1 = 0 \quad B_1 = -af^2 - cdf + bef \quad C_1 = -aef + b^2e - cde \quad D_1 = -afd + bde + cd^2$$

$$A_2 = af^2 + cdf - bef \quad B_2 = 0 \quad C_2 = -aef + bce - c^2d \quad D_2 = -abf + b^2e - bcd$$

$$A_3 = aef - b^2e + cde \quad B_3 = aef - bce + c^2d \quad C_3 = 0 \quad D_3 = -a^2f - acd + abe$$

$$A_4 = afd - bde + cd^2 \quad B_4 = abf - b^2e + bcd \quad C_4 = a^2f + acd - abe \quad D_4 = 0$$

откуда видно, что опредѣлитель составленный изъ этихъ элементовъ есть косой симметрическій.

§ 79. *Предложеніе.* Косой симметрическій опредѣлитель нечетнаго порядка всегда равенъ нулю, а четнаго порядка всегда составляетъ полный квадратъ.

Доказательство. 1. Пусть будетъ Δ косой симметрическій опредѣлитель нечетнаго порядка. Такой опредѣлитель не измѣнится, если въ немъ замѣнимъ колонны горизонталями и перемѣнимъ знаки во всѣхъ колоннахъ, но такъ какъ опредѣлитель нечетнаго порядка, то такая операція измѣняетъ

знакъ опредѣлителя, слѣдовательно чтобы условіе $\Delta = -\Delta$ было удовлетворено необходимо чтобы $\Delta = 0$.

Примѣръ. Пусть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Пусть опредѣлитель Δ будетъ четнаго порядка. Мы выше видѣли, что его взаимный Δ' будетъ также косой симметрическій опредѣлитель (§ 78). Положимъ, что опредѣлитель Δ четвертаго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & g \\ -c & -f & -g & 0 \end{vmatrix} = (ag - bf + cd)^2$$

Его взаимный:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

гдѣ:

$$A_1 = B_2 = C_3 = D_4 = 0 \quad B_1 = -A_2 \quad C_1 = -A_3 \quad D_1 = -A_4$$
$$C_3 = -B_3 \quad D_2 = -B_4 \quad D_3 = -C_4$$

Мы выше видѣли (§ 73), что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{vmatrix} . \Delta = g^2 . \Delta$$

или:

$$R_1 B_2 - A_2 B_1 = g^2 . \Delta$$

Но $A_1 = 0$, $B_1 = -A_2$, слѣдовательно:

$$A^2_2 = g^2 . \Delta$$

откуда:

$$\Delta = \frac{A^2_2}{g^2}$$

откуда видимъ, что Δ есть полный квадратъ.

Если-бы данный опредѣлитель былъ 6-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ -a & 0 & f & g & h & k \\ -b & -f & 0 & p & q & r \\ -c & -g & -p & 0 & s & t \\ -d & -h & -q & -s & 0 & u \\ -e & -k & -r & -t & -u & 0 \end{vmatrix}$$

Его взаимный также косой симметрическій:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 \end{vmatrix}$$

гдѣ:

$$A_1 = B_2 = C_3 = D_4 = E_5 = F_6 \qquad B_1 = -A_2 \;, \quad C_1 = -A_2 \;, \ldots$$

Но мы выше видѣли (§ 73), что:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{vmatrix} \cdot \Delta = u^2 . \Delta$$

Но первая часть есть полный квадратъ, такъ какъ это есть косой симметрическій опредѣлитель четнаго порядка, слѣдовательно и опредѣлитель Δ шестого порядка есть полный квадратъ. Точно также, и такимъ же образомъ, можно показать и для опредѣлителей высшихъ четныхъ порядковъ.

§ 80. *Предложеніе.* Квадратъ опредѣлителя четнаго порядка всегда можно выразить въ видѣ косого симметрическаго опредѣлителя.

Доказательство. Пріемъ для доказательства на слѣдующихъ двухъ частныхъ примѣрахъ распространяется легко и вообще. Мы имѣемъ (§ 66):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & -a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1b_1 - b_1a_1 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & a_2b_2 - a_2b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ -(a_1b_2 - a_2b_1) & 0 \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ -b_3 & a_3 & -d_3 & c_3 \\ -b_4 & a_4 & -d_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

второй множитель есть ничто иное, какъ первый, въ которомъ переставлены двѣ колонны 1-я и 2-я, 3-я и 4-я и перемѣнены въ двухъ колоннахъ знаки, отъ этого опредѣлитель не измѣнится (свойство 2).

Перемножая найдемъ:

$$\begin{vmatrix} 0 & -(a_1b_2)-(c_1d_2) & -(a_1b_3)-(c_1d_3) & -(a_1b_4)-(c_1d_4) \\ (a_1b_2)+(c_1d_2) & 0 & -(a_2b_3)-(c_2d_3) & -(a_2b_4)-(c_2d_4) \\ (a_1b_3)+(c_1d_3) & (a_2b_3)+(c_2d_3) & 0 & -(a_3b_4)-(c_3d_4) \\ (a_1b_4)+(c_1d_4) & (a_2b_4)+(c_2d_4) & (a_3b_4)+(c_3d_4) & 0 \end{vmatrix}$$

очевидно опредѣлитель косой симметрическій. Символы (a_1b_2) обозначаютъ опредѣлителей $a_1b_2 - a_2b_1$, какъ было условлено въ § 59.

Рѣшеніе системы линейныхъ уравненій.

§ 81. Пусть будетъ дана система n линейныхъ уравненій:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{ki}x_i + \ldots\ldots + a_{kn}x_n = u_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{ni}x_i + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = u_n \end{array} \qquad (32)$$

Составимъ изъ коэфиціентовъ у неизвѣстныхъ $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ опредѣлителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} \quad (33)$$

Составимъ всѣ первые миноры этого опредѣлителя A_{11}, A_{12}, . . .

Если предъидущія уравненія помножимъ, начиная съ перваго, послѣдовательно на A_{1i}, A_{2i}, A_{3i}, . . . A_{ni} и послѣ этого ихъ сложимъ, то найдемъ:

$$\Delta x_i = u_1 A_{1i} + u_2 A_{2i} + u_3 A_{3i} + \quad . \quad . \quad . \quad + u_n A_{ni} \quad (34)$$

такъ какъ коэфиціенты у остальныхъ неизвѣстныхъ будутъ имѣть форму:

$$a_{1s} A_{1i} + a_{2s} A_{2i} + a_{3s} A_{3i} + \quad . \quad . \quad . \quad + a_{ns} A_{ni} = 0 \quad (35)$$

слѣдовательно, тождественно равны нулю (§ 65).

Что же касается второй части уравненія (34), то она есть ничто иное, какъ опредѣлитель Δ, въ которомъ элементы i-й колонны замѣщены элементами u_1, u_2, u_3, . . . u_n. Слѣдовательно, уравненіе (34) можно написать въ формѣ:

$$\Delta x_i = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} \ . \ . \ . \ u_i \ . \ . \ . \ . \ a_{nn} \quad (36)$$

или еще:

$$(a_{11} a_{22} a_{33} \dots . a_{nn})\, x_i = (a_{11} a_{22} a_{33} \dots u_i \dots a_{nn})$$

откуда:

$$x_i = \frac{(a_{11} a_{22} a_{33} \dots u_i \dots a_{nn})}{(a_{11} a_{22} a_{33} \dots \dots a_{nn})} \quad (37)$$

давая индексу i всѣ значенія 1, 2, 3, 4,...., n получимъ изъ (36) или (37) выраженія для всѣхъ неизвѣстныхъ.

§ 82. Введеніе въ алгебру символа i и количествъ ai, $a+bi$ изъ него составленныхъ, дало большую общность изслѣдованіямъ и повело къ замѣчательнымъ обобщеніямъ предложеній. Но эти символы подлежатъ тремъ основнымъ законамъ алгебры: *перемѣстительному*, *распредѣлительному* и *повторительному*, слѣдовательно въ своихъ комбинаціяхъ не отличаются отъ дѣйствительныхъ количествъ. Но въ алгебру введены и такіе количественные символы, которые не подлежатъ основнымъ законамъ, а имѣютъ свои законы. Съ помощію такихъ количествъ часто упрощаются весьма

сложныя доказательства предложеній. Изъ такихъ символовъ мы введемъ символы:

$$t_1 \ , \ t_2 \ , \ t_3 \ , \ldots , \ t_n \tag{38}$$

неудовлетворяющіе перемѣстительному закону, а имѣющіе слѣдующее свойство:

$$t_\lambda t_\mu = - t_\mu t_\lambda \tag{39}$$

т. е. когда количества t_λ и t_μ въ произведеніи $t_\lambda t_\mu$ перемѣщаются, то произведеніе мѣняетъ знакъ. Откуда слѣдуетъ, полагая $\lambda = \mu$:

$$t^2_\lambda = - t^2_\lambda$$

а это уравненіе существуетъ только тогда, когда

$$t^2_\lambda = 0 \tag{40}$$

Такой законъ символа t_λ, какъ видно въ системѣ такихъ символовъ степеней не существуетъ.

Воспользуемся свойствами символовъ t_λ для доказательства правила перемноженія двухъ опредѣлителей, которое было нами выведено эмпирически. Доказательство обыкновенное для двухъ опредѣлителей n-го порядка весьма сложно, а символы t_λ значительно его упрощаютъ.

Доказательство правила перемноженія двухъ опредѣлителей.

§ 83. Возьмемъ произведеніе символовъ:

$$t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3 \ldots . \, t_r \,.\, t_{r+1} \ldots . \, t_{r+m} \,.\, t_{r+m+1} \ldots t_n \tag{41}$$

если въ немъ переставимъ два символа стоящіе рядомъ, то на основаніи закона (1) все произведеніе измѣнитъ знакъ.

Точно также, если въ произведеніи (40) символовъ переставимъ два какіе нибудь символа, то произведеніе тоже измѣнитъ знакъ. Въ самомъ дѣлѣ, перенесемъ символъ t_{r+m+1}, послѣдовательнымъ перестановленіемъ двухъ символовъ, передъ символомъ t_{r+1}; при этомъ очевидно мы сдѣлаемъ m перестановленій, и произведеніе (40) приметъ видъ:

$$(-1)^m t_1 \,.\, t_2 \ldots . \, t_r \,.\, t_{r+m+1}\, t_{r+1} \ldots t_{r+m} \,.\, t_{r+m+2} \ldots . \, t_n \tag{42}$$

Теперь въ произведеніи (42) тоже послѣдовательнымъ перемѣщеніемъ двухъ

символовъ, перенесемъ символъ t_r за символъ t_{r+m}, при этомъ, очевидно, нужно сдѣлать $m+1$ перестановленій, и произведеніе (42) обратится въ слѣдующее:

$$(-1)^{2m+1} t_1 \,.\, t_2 \,.\,.\,.\,.\, t_{r-1} \,.\, t_{r+m+1} \,.\, t_{r+1} \,.\,.\,.\,.\,.\, t_{r+m} \,.\, t_r \,.\, t_{r+m+2} \,.\,.\,.\,.\, t_n \qquad (43)$$

Сравнивая произведенія (41) и (43) находимъ, что переставивъ два символа t_r и t_{r+m+1} само произведеніе измѣнило знакъ $2m+1$ разъ, т. е. *нечетное* число разъ; слѣдовательно, при перестановкѣ двухъ символовъ произведенія оно мѣняетъ знакъ.

Отсюда видимъ, что всякое произведеніе изъ n символовъ (38) будетъ равно произведенію (41) со знакомъ (+) или (—), смотря по тому, будетъ-ли въ немъ безпорядковъ число четное или нечетное. При этомъ замѣтимъ, что па основаніи закона (39), если въ произведеніе n символовъ войдутъ два равныхъ символа, то такое произведеніе обращается въ нуль.

Составимъ теперь слѣдующіе линейные символы:

$$\alpha = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + a_n t_n$$

$$\beta = b_1 t_1 + b_2 t_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + b_n t_n$$

гдѣ a_i, b_k суть количества обыкновенныя. Перемножимъ α на β, руководствуясь при этомъ вышеприведенными законами (39) и (40); то:

$$\alpha\beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, t_1 t_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, t_1 t_3 + \;.\;.\;.\;. \qquad (44)$$

Очевидно, что перемножая β на α получится то-же произведеніе (44) только съ противнымъ знакомъ, слѣдовательно:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha \qquad (45)$$

Ясно, что члены, стоящіе въ скобкахъ во второй части выраженія (44), представляютъ собою всевозможныхъ опредѣлителей втораго порядка, составленныхъ изъ элементовъ a и b:

Если теперь помножимъ произведеніе $\alpha\beta$ на символъ:

$$\gamma = c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + \;.\;.\;.\;.\; + c_n t_n$$

то точно также получимъ сумму произведеній символовъ t по три на соотвѣтствующіе всевозможные опредѣлители третьяго порядка, составленные изъ элементовъ a, b и c.

Перейдемъ теперь къ болѣе общимъ разысканіямъ и возьмемъ слѣдующіе n символовъ:

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 = a_{1,1}t_1 + a_{1,2}t_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{1,n}t_n \\
\alpha_2 = a_{2,1}t_1 + a_{2,2}t_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{2,n}t_n \\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\alpha_n = a_{n,1}t_1 + a_{n,2}t_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{n,n}t_n
\end{array}$$

Перемножая ихъ между собою получимъ произведеніе слѣдующаго вида:

$$\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\;.\; \alpha_n = \sum (a_{1r_1} \,.\, a_{2r_2} \,.\, a_{3r_3} \;.\;.\;.\;.\; a_{nr_n} \,.\, t_{r1} \,.\, t_{r2} \;.\;.\;.\;.\; t_{rn}) \qquad (46)$$

Тѣ члены написанной суммы, въ которые войдутъ два одинаковые символа t, обратятся въ нули, и подъ знакомъ Σ останутся только члены, содержащіе различные символы t.

Далѣе изъ предъидущаго извѣстно, что

$$t_{r_1} \,.\, t_{r_2} \,.\, t_{r_3} \;.\;.\;.\;.\; t_{r_n} = \pm t_1 \;t_2\; t_3 \;.\;.\;.\;.\; t_n$$

гдѣ (+) берется когда индексы: $r_1\; r_2\; r_3 \;.\;.\;.\;.\; r_n$ даютъ *четное* число безпорядковъ, и (—) когда *нечетное*. Тогда, если въ выраженіи (46), возьмемъ произведеніе: $t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3 \;.\;.\;.\;.\; t_n$ общимъ множителемъ, получимъ:

$$\alpha_1 \,.\, \alpha_2 \,.\, \alpha_3 \;.\;.\;.\;.\; \alpha_n = t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3 \;.\;.\;.\; t_n \,.\, \sum \pm a_{1,r_1} \,.\, a_{2,r_2} \;.\;.\;.\;.\; a_{n,rn}$$

Но:

$$\sum \pm a_{1,r1} \,.\, a_{2,2_2} \,.\, a_{3,2_3} \;.\;.\;.\; a_{n,2_n} = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & . & a_{2,n} \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & . & a_{3,n} \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & . & a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

откуда:

$$\alpha_1 \,.\, \alpha_2 \,.\, \alpha_3 \;.\;.\;.\;.\; \alpha_n = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & . & a_{2,n} \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & . & a_{n,n}
\end{vmatrix} t_1\, t_2 \,.\, t_3 \;.\;.\;.\;.\; t_n \qquad (47)$$

Такъ выражается опредѣлитель n-го порядка произведеніемъ линейныхъ множителей.

На основаніи доказаннаго, произведеніе изъ символовъ:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = a_{1,1}\, t_1 + a_{2,1}\, t_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + a_{n,1}\, t_n \\ \alpha_2 = a_{1,2}\, t_1 + a_{2,2}\, t_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + a_{n,2}\, t_n \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \alpha_n = a_{1,n}\, t_1 + a_{2,n}\, t_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + a_{n,n}\, t_n \end{array} \qquad (48)$$

напишется такъ:

$$\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \, . \, . \, . \, . \, \alpha_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . \; . \; . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . \; . \; . & a_{2,n} \\ . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . \; . \; . & a_{n,n} \end{vmatrix} t_1 t_2 \, . \, . \, . \, t_n$$

Но изъ уравненія (45) заключаемъ, что символы: $\alpha_1\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_n$ подлежатъ тѣмъ же законамъ, что и символы t, слѣдовательно, произведеніе изъ n символовъ:

$$\begin{array}{l} \beta_1 = b_{1,1}\, \alpha_1 + b_{1,2}\, \alpha_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + b_{1,n}\, \alpha_n \\ \beta_2 = b_{2,1}\, \alpha_1 + b_{2,2}\, \alpha_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + b_{2,n}\, \alpha_n \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \beta_n = b_{n,1}\, \alpha_1 + b_{n,2}\, \alpha_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + b_{n,n}\, \alpha_n \end{array} \qquad (49)$$

выразится такъ:

$$\beta_1 . \beta_2 . \beta_3 \, . \, . \, . \, \beta_n = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & . \; . & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & . \; . & b_{2,n} \\ . & . & . \; . & . \\ b_{n,1} & b_{n,2} & . \; . & b_{n,n} \end{vmatrix} \alpha_1 . \alpha_2 \, . \, . \, . \, \alpha_n$$

Если въ послѣднее выраженіе вмѣсто произведенія: $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_n$ вста-

вимъ его выраженіе изъ (47), то получимъ:

$$\beta_1.\beta_2..\beta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & . & b_{1,n} \\ b_{2,2} & b_{2,2} & . & b_{2,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{n,1} & b_{n,2} & . & b_{n,n} \end{vmatrix} t_1\ t_2..t_n \qquad (51)$$

Если въ выраженіи (49) вмѣсто $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_n$ подставимъ ихъ значенія изъ (48), тогда изъ выраженія:

$$\beta_k = b_{k,1}\alpha_1 + b_{k,2}\alpha_2 + \ldots . b_{k,2}\alpha_2 \ldots + b_{k,n}\alpha_n$$

получимъ слѣдующее:

$$\begin{aligned} \beta_k = b_{k,1}(a_{1,1}t_1 + \ldots . &+ a_{2,1}t_2 + \ldots . + a_{n,1}t_n) + \\ + \ldots \\ + \ldots \\ + b_{k,2}(a_{1,2}t_1 + \ldots . &+ a_{2,2}t_2 + \ldots . + a_{n,2}t_n) + \\ + \ldots \\ + \ldots \\ + b_{k,n}(a_{1,n}t_1 + \ldots . &+ a_{2,n}t_2 + \ldots . + a_{n,n}t_n) \end{aligned}$$

или же:

$$\begin{aligned} \beta_k = (a_{1,1}b_{k,1} + a_{1,2}b_{k,2} + \ldots . + a_{1,n}b_{k,n})\,t_1 + \\ + \ldots \\ + \ldots \\ + (a_{2,1}b_{k,1} + a_{2,2}b_{k,2} + \ldots . + a_{2,k}b_{k,n})\,t_2 + \\ + \ldots \end{aligned}$$

Означимъ коэфиціенты при $t_1 . t_2, . t_2 .. t_n$ черезъ $C_{k,1}, . C_{k,2}, C_{k,2}, .. C_{k,n}$, тогда послѣднее выраженіе напишется такъ:

$$\beta_k = C_{k,1}t_1 + C_{k,2}t_2 + \ldots . + C_{k,2}t_2 + \ldots + C_{k,n}t_n$$

Давая индексу k всѣ значенія отъ 1-цы до n включительно, получимъ:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= C_{1,1}t_1 + C_{1,2}t_2 + \ldots . + C_{1,n}t_n \\ \beta_2 &= C_{2,1}t_1 + C_{2,2}t_2 + \ldots . + C_{2,n}t_n \\ &\ldots \\ &\ldots \\ \beta_n &= C_{n,1}t_1 + C_{n,2}t_2 + \ldots . + C_{n,n}t_n \end{aligned}$$

Перемножая послѣднія выраженія получимъ:

$$\beta_1.\beta_2.\beta_3\ldots\beta_n = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & . & . & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & . & . & C_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ C_{n,1} & C_{n,2} & . & . & C_{n,n} \end{vmatrix} t_1.t_2\ldots t_n \qquad (52)$$

Сравнивая выраженія (51) и (52) находимъ слѣдующее:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & . & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & . & b_{2,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{n,1} & b_{n,2} & . & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & . & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & . & C_{2,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ C_{n,1} & C_{n,2} & . & C_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (53)$$

гдѣ:

$$C_{k,r} = a_{r,1}b_{k,1} + a_{r,2}b_{k,2} + \ldots\ldots + a_{r,n}b_{k,n} \qquad (54)$$

Найденное нами выраженіе (53) даетъ произведеніе двухъ опредѣлителей n-го порядка: формула же (54) показываетъ, какъ нужно поступать для того, чтобы по двумъ даннымъ опредѣлителямъ получить ихъ произведеніе.

Доказавъ вполнѣ теорему перемноженія опредѣлителей, на основаніи ея легко доказать слѣдующее:

§ 84. *Предложеніе*: Квадратъ всякого опредѣлителя n-го порядка есть симметрическій опредѣлитель того-же порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что данъ опредѣлитель $\triangle$ n-го порядка:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

откуда:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Производя по извѣстнымъ правиламъ перемноженіе, на самомъ дѣлѣ получимъ:

$$R^2 = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & . & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & . & C_{2,n} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & . & C_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ C_{n,1} & C_{n,2} & C_{n,3} & . & C_{n,n} \end{vmatrix}$$

гдѣ каждый символъ этого новаго опредѣлителя составляется по формулѣ:

$$C_{i,k} = a_{i,1}a_{k,1} + a_{i,2}a_{k,2} + \ldots\ldots + a_{i,n}a_{k,n} \qquad (55)$$

Такъ напримѣръ, чтобы получить символъ $C_{k,i}$ сопряженный взятому, нужно въ (55) положить: $i=k$ и $k=i$, то получимъ:

$$C_{k,i} = a_{k,1}a_{i,1} + a_{k,2}a_{i,2} + \ldots\ldots + a_{k,n}a_{i,n} \qquad (56)$$

Сравнивая выраженія (55) и (56) замѣчаемъ, что вторыя ихъ части совершенно равны, поэтому и первыя тоже; слѣдовательно:

$$C_{i,k} = C_{k,i}$$

а опредѣлитель, въ которомъ сопряженные элементы равны, есть симметрическій, поэтому и опредѣлитель Δ^2 есть симметрическій опредѣлитель, что и требовалось показать.

ГЛАВА VIII.

О сравненіяхъ.

§ 85. Если разность двухъ чиселъ a и b дѣлится на число k, т. е. если мы имѣемъ:

$$a - b = tk \qquad (5)$$

гдѣ t есть цѣлое число, то говорятъ, что числа a и b *сравниваемы* по модулю k, и пишутъ это уравненіе въ символической формѣ:

$$a \equiv b(Mk) \qquad (2)$$

которую называютъ *сравненіемъ*.

Раздѣлимъ a и b на k, пусть остатки отъ дѣленія будутъ r и r_1, а частныя α и β, то:

$$a = \alpha k + r \quad , \quad b = \beta k + r_1$$

откуда:

$$a - b = r - r_1 + (\alpha - \beta)k$$

Но такъ какъ $a-b$ дѣлится на k по условію, то и разность $r-r_1$ должна дѣлиться также на k, но это только тогда возможно, когда $r = r_1$, такъ какъ $r<k$ и $r_1<k$. Изъ этого заключаемъ, что два числа сравниваемыя по извѣстному модулю k, будутъ числа равноостаточныя относительно этого модуля. Обратно, числа равноостаточныя, относительно какого нибудь модуля k, будутъ сравниваемы по этому модулю.

Примѣръ.

$$12 \equiv 2(M5) \quad , \quad 3 \equiv -25(M4)$$

Если число a дѣлится на k, то оно сравниваемо съ нулемъ по модулю k, т. е.

$$a \equiv 0(Mk) \qquad (3)$$

§ 86. Всѣ числа, раздѣленныя на произвольно взятое число k, даютъ въ остаткѣ только слѣдующія числа:

$$0 \; , \; 1 \; , \; 2 \; , \; 3 \; , \; . \; . \; . \; , \; k-1$$

поэтому форма всѣхъ чиселъ относительно числа k, какъ модуля, будетъ слѣдующая:

$$tk \quad , \quad tk+1 \quad , \quad tk+2 \; , \; . \; . \; . \; , \; tk+k-1$$

гдѣ t есть цѣлое число, имѣющее всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Числа, имѣющія форму tk, суть кратныя числа k, числа, имѣющія форму $tk+1$, даютъ въ остаткѣ единицу, имѣющія форму $tk+2$ даютъ въ остаткѣ два и т. д. Такимъ образомъ всѣ числа, относительно числа k, дѣлятся на k классовъ. Числа принадлежащія одному классу сравниваемы по модулю k, а находящіяся въ различныхъ классахъ не сравниваемы по тому же модулю.

Разсмотримъ форму и нѣкоторыя свойства чиселъ относительно чиселъ: 2, 4, 6, 8, взявъ эти послѣднія за модули.

1. По модулю 2:
Числа четныя $2n$.
Числа нечетныя $2n+1$.

2. По модулю 4:
Числа четныя $4n$, $4n+2$.
Числа нечетныя $4n+1$, $4n+3=4m-1$.

3. По модулю 8: (12)
Числа четныя $8n$, $8n+2$, $8n+4$, $8n+6$.
Числа нечетныя $8n+1$, $8n+3$, $8n+5=8m-3$, $8n+7=8m-1$.

4. По модулю 6:
Числа четныя $6n$, $6n+2$, $6n+4$.
Числа нечетныя $6n+1$, $6n+3$, $6n+5=6m-1$ и т. д.

Легко вывесть, соображаясь съ предъидущимъ, слѣдующія предложенія:

Предложенія:

1. Произведеніе, въ которомъ одинъ изъ множителей есть четное число, есть число четное.

2. Произведеніе нечетныхъ множителей есть число нечетное.

3. Квадратъ нечетнаго числа имѣетъ форму $8m+1$:

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1=8m+1$$

4. Квадратъ удвоеннаго нечетнаго числа имѣетъ форму $32n+4$.

5. Квадратъ числа кратнаго 4 есть число кратное 16-ти.

6. Произведеніе чиселъ формы $4n+1$ или формы $4n-1$ имѣетъ форму $4n+1$.

7. Произведеніе чиселъ формы $4n+1$ и $4n-1$ имѣетъ форму $4n-1$.

8. Всякое составное число формы $4n+1$ должно имѣть четное число (0, 2, 4,...) множителей формы $4m-1$.

9. Всякое составное число формы $4n-1$ должно имѣть нечетное число (1, 3, 5,...) множителей формы $4m-1$.

10. Всякое нечетное число недѣлящееся на 3 имѣетъ одну изъ формъ $6n+1$, $6n-1$.

11. Всякое составное число формы $6n+1$ имѣетъ всегда четное число множителя формы $6m-1$.

12. Всякое составное число формы $6n+1$ имѣетъ нечетное число множителей формы $6m-1$ и т. д.

§ 87. Всякое число сравниваемо со своимъ остаткомъ относительно k т. е., если $a=r+tk$, то:

$$a \equiv r(Mk) \tag{4}$$

При дѣленіи a на k остатокъ r всегда можно сдѣлать меньше $\frac{1}{2}k$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$a=r+kt$$

если $r>\frac{1}{2}k$, то въ этомъ случаѣ $r_1=k-r<\frac{1}{2}k$, прибавляя ко второй части предъидущаго уравненія, $k-k$, найдемъ:

$$a=r+kt+k-k=r-k+k(t+1)=k(t+1)-r_1$$

гдѣ $r_1<\frac{1}{2}k$.

Примѣръ. Если модуль $k=6$, то:

$$17=6.2+5 \quad \text{и} \quad 17=3.6-1$$

въ первомъ случаѣ остатокъ 5 больше $\frac{1}{2}6=3$ и во второмъ остатокъ 1 меньше 3.

Такой остатокъ будемъ называть *наименьшимъ* остаткомъ даннаго числа по модулю k.

§ 88. *Свойство сравненій.* Вспомнивъ, что сравненіе

$$a \equiv b(Mk) \tag{5}$$

есть ничто иное, какъ уравненіе

$$a=b+kt$$

гдѣ t есть цѣлое число, можно показать, что сравненіе имѣетъ почти всѣ тѣ же свойства, что и уравненіе.

Свойство 1. Если a и k суть два произвольныя числа, то мы всегда имѣемъ:

$$a \equiv a(Mk)$$

Свойство 2. Если a сравниваемъ съ b, а b съ c по модулю k, то a сравниваемъ съ c по тому же модулю, т. е. если:

$$a \equiv b(Mk) \quad , \quad \text{а} \quad b \equiv c(Mk)$$

т. е.

$$a \equiv c(Mk)$$

Изъ первыхъ двухъ сравненій мы имѣемъ:

$$a = b + tk \quad , \quad b = c + t_1 k$$

складывая и сокращая, найдемъ:

$$a = c + (t + t_1)k$$

или:

$$a \equiv c(Mk)$$

Свойство 3. Если

$$a \equiv b(Mk) \quad , \quad \text{а} \quad c \equiv d(Mk)$$

то

$$a \pm c \equiv (b \pm d)(Mk)$$

это легко видѣть написавъ данныя сравненія въ видѣ уравненій.

Свойство 4. Если

$$a \equiv b(Mk) \quad \text{и} \quad c \equiv d(Mk)$$

то

$$ac \equiv bd\,(Mk)$$

Въ самомъ дѣлѣ, сравненія, выраженныя уравненіями, будутъ:

$$a = b + kt \quad , \quad c = d + kt_1$$

перемножая найдемъ:

$$ac = bd + ku$$

гдѣ u есть цѣлое число, слѣдовательно:

$$ac \equiv bd(Mk)$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если

$$a \equiv b(Mk)$$

то

$$a^n \equiv b^n\,(Mk)$$

Свойство 5. Если обѣ части a и b сравненія (5) суть кратныя одного числа m, т. е. если мы имѣемъ:

$$ma \equiv mb\,(Mk) \tag{6}$$

то сокращеніе обоихъ чиселъ на m только тогда допускается, когда число m будетъ взаимно простое съ модулемъ k.

Въ самомъ дѣлѣ, сравненіе (6) дастъ:

$$ma = mb + kt$$

или

$$m(a-b) = kt$$

если m есть число взаимно простое съ k, то $a-b$ должно дѣлиться на k, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$a \equiv b\,(Mk)$$

Если δ будетъ общій наибольшій дѣлитель чиселъ m и k, то имѣемъ:

$$\frac{m}{\delta}(a-b) = \frac{k}{\delta}\,t$$

но такъ какъ $\frac{m}{\delta}$ и $\frac{k}{\delta}$ суть числа взаимно-простыя, то $a-b$ должно дѣлиться на $\frac{k}{\delta}$, т. е.

$$a \equiv bM\left(\frac{k}{\delta}\right)$$

Свойство 6. Если

$$a \equiv b\,(Mk)$$

и $k = dm$, то можно написать:

$$a \equiv b\,(Mm)$$

Свойство 7. Если

$$a \equiv b(Mk)\ ,\quad a \equiv b(Mm)\ ,\quad a \equiv b(Mn)\ \ldots\ldots,$$

то

$$a \equiv b(Mh)$$

гдѣ h есть наименьшее кратное число модулей k, m, n. . . . Это очевидно.

Свойство 8. Каждую часть сравненія (6)

$$a \equiv b(Mk)$$

можно увеличить или уменьшить кратнымъ числомъ модуля, сравненіе не нарушится, т. е. мы можемъ написать:

$$a + nk \equiv b(Mk) \quad \text{или} \quad a \equiv b + mk(Mk)$$

вмѣсто

$$a \equiv b(Mk)$$

§ 89. *Опредѣленіе.* Мы выше видѣли, что относительно модуля k, числа дѣлятся на k классовъ несравниваемыхъ по модулю k. Если изъ каждаго класса выберемъ по одному числу, то такая группа чиселъ называется полною системою чиселъ несравниваемыхъ по модулю k. Простѣйшую изъ полныхъ системъ составляютъ остатки:

$$0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ . \ . \ . \ k-1 \qquad (7)$$

которую будемъ называть *полною системою.*

§ 90. Теперь рѣшимъ одну изъ очень важныхъ задачъ въ теоріи чиселъ.

Задача. По данному числу n найти число чиселъ меньше его и взаимно-простыхъ съ нимъ?

Рѣшеніе. Это число въ теоріи чиселъ обозначаютъ символомъ $\varphi(n)$, такъ напримѣръ:

$$\varphi(1) = 1 \ , \ \varphi(2) = 1 \ , \ \varphi(3) = 2 \ , \ \varphi(4) = 2 \ , \ \varphi(5) = 4$$

Задача состоитъ въ томъ, чтобы найти выраженіе для функціи $\varphi(n)$. Пусть данное число будетъ:

$$n = p^{\alpha} p_1^{\beta} p_2^{\gamma} \ . \ . \ .$$

p, p_1, p_2, . . . суть простыя числа.

Изъ ряда чиселъ:

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 4 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ n \qquad (8)$$

взаимно-простыя съ n будутъ тѣ, которыя не дѣлятся ни на одинъ изъ простыхъ множителей p, p_1, p_2, . . .

Числа, изъ предъидущаго ряда, дѣлящіяся на p, очевидно будутъ:

$$p, 2p, 3p, \ldots \frac{n}{p}p$$

слѣдовательно ихъ число будетъ $\frac{n}{p}$, откуда число чиселъ, изъ того же ряда, не дѣлящихся на p, будетъ очевидно:

$$n - \frac{n}{p} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{9}$$

Между этими числами, не дѣлящимися на p, есть дѣлящіяся на p_1, если изъ нихъ выбрать эти послѣднія, то получимъ число чиселъ не дѣлящихся ни на p ни на p_1. Число чиселъ изъ n, дѣлящихся на p_1, есть, какъ показано выше, $\frac{n}{p_1}$, а изъ нихъ не дѣлящихся на p есть:

$$\frac{n}{p_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

если изъ (9) вычтемъ это число, то найдемъ:

$$n\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{n}{p_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$$

что дастъ число чиселъ изъ n, не дѣлящихся ни на p ни на p_1. Между этими числами находятся числа дѣлящіяся на p_2, если ихъ выбросимъ, то будемъ имѣть число чиселъ не дѣлящихся ни на p, ни на p_1 ни на p_2. Число чиселъ изъ числа n не дѣлящихся на p_2 есть:

$$n\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

изъ которыхъ, если выбросимъ числа не дѣлящіяся ни на p ни на p_2 которыхъ число есть:

$$n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$$

то найдемъ:

$$n\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

число чиселъ не дѣлящихся на p, p_1, p_2. Продолжимъ подобнымъ обра-

зомъ, найдемъ что число чиселъ меньшихъ числа n, не дѣлящихся на $p, p_1, p_2, p_3, \ldots$ т. е. взаимно простыхъ съ ними будетъ

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots \tag{10}$$

Таково выраженіе искомой функціи $\varphi(n)$.

Этой функціи можно дать еще слѣдующую форму:

$$\varphi(n) = (p-1)p^{\alpha-1}.(p_1-1)p_1^{\beta-1}(p_2-1)p_2^{\gamma-1}\ldots \tag{11}$$

Примѣръ. Пусть данное число $n = 60 = 2^2.3.5$:

$$\varphi(60) = 60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 60\,.\,\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = 16$$

§ 91. Если число n есть произведеніе двухъ взаимно-простыхъ чиселъ m и m_1 т. е. если $n = mm_1$, то:

$$\varphi(n) = \varphi(m)\,.\,\varphi(m_1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что:

$$m = p^{\alpha}p_1^{\beta}\ldots\quad,\quad m_1 = q^{\alpha'}q_1^{\beta'}\ldots$$

гдѣ $p, p_1 \ldots q, q_1 \ldots$ суть простыя числа, то:

$$n = p^{\alpha}p_1^{\beta}\ldots q^{\alpha'}q_1^{\beta'}\ldots$$

Слѣдовательно:

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\ldots$$

или:

$$\varphi(n) = m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots m_1.\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\ldots = \varphi(m).\varphi(m_1)$$

Легко также видѣть, что если $n = mm_1m_2 \ldots$ гдѣ $m, m_1, m_2 \ldots$ суть числа взаимно простыя то:

$$\varphi(n) = \varphi(m)\,.\,\varphi(m_1)\,.\,\varphi(m_2)\ldots \tag{12}$$

§ 92. Предъидущая задача есть только частный случай слѣдующей:

Задача. Дано число m и одинъ изъ ея дѣлителей δ; найти въ ряду:

$$1\;,\;2\;,\;3\;,\;4\;,\;\ldots\;,\;m$$

число чиселъ, имѣющихъ съ числомъ m общаго наибольшаго дѣлителя δ?

Рѣшеніе. Въ ряду:

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ . \ . \ . \ m$$

числа дѣлящіяся на δ суть:

$$\delta \ , \ 2\delta \ , \ 3\delta \ , \ . \ . \ . \ \frac{m}{\delta}.\delta \qquad (13)$$

Чтобы δ былъ общій наибольшій дѣлитель числа $\frac{m}{\delta}.\delta$ и какого нибудь изъ ряда (13), напримѣръ $r\delta$, необходимо, чтобы r было число взаимно простое съ $\frac{m}{\delta}$. Слѣдовательно всѣхъ искомыхъ чиселъ будетъ столько, сколько есть чиселъ меньшихъ отъ $\frac{m}{\delta}$ и взаимно простыхъ съ нимъ. Это число, какъ мы видѣли выше, есть $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$. Если $\delta = 1$, то предъидущая задача есть частный случай настоящей.

Предложеніе. Если $\delta_1, \delta., \delta_2, ..$ суть дѣлители числа $n = p^\alpha p_1^\beta p_2^\gamma ....$ между которыми находится единица и само число n, то:

$$\varphi(\delta) + \varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) + \ . \ . \ \Sigma\varphi(\delta) = n \qquad (14)$$

Доказательство. Замѣтимъ что дѣлители $\delta, \delta_1, \delta_2, \ . \ . \ .$ суть ничто иное какъ члены произведенія:

$$(1+p+p^2+\ldots+p^\alpha)(1+p_1+p^2{}_1+\ldots+p_1^\beta)(1+p_2+p^2{}_2+\ldots+p_2^\gamma)\ldots$$

Какой нибудь изъ членовъ этого произведенія имѣетъ форму $p^{\alpha'} p_1^{\beta'} p_2^{\gamma'} ..$ т. е.:

$$\delta = p^{\alpha'} p_1^{\beta'} p_2^{\gamma'} \ . \ . \ .$$

слѣдовательно (§ 91):

$$\varphi(\delta) = \varphi(p^{\alpha'}).\varphi(p_1^{\beta'}).\varphi(p_2^{\gamma'}) \ . \ . \ .$$

откуда сумма всѣхъ количествъ $\varphi(\delta)$ есть произведеніе многочленовъ:

$$1 + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \ . \ . \ . + \varphi(p^\alpha) = p^\alpha$$

$$1 + \varphi(p_1) + \varphi(p^2{}_1) + \ . \ . \ . + \varphi(p_1^\beta) = p^\beta$$

. . . .

т. е.:

$$\Sigma\varphi(\delta) = p^\alpha p_1^\beta p_2^\gamma \ . \ . \ . = n \qquad (15)$$

Примѣръ. Возьмемъ $n=60$. Всѣ дѣлители числа 60 суть:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ 12\ ,\ 15\ ,\ 20\ ,\ 30\ ,\ 60$$

$$\varphi(1)=1\ \ ,\ \ \varphi(2)=1\ \ ,\ \ \varphi(3)=2\ \ ,\ \ \varphi(4)=2\ \ ,\ \ \varphi(5)=4$$
$$\varphi(6)=2\ \ ,\ \ \varphi(10)=4\ \ ,\ \ \varphi(12)=(4)\ \ ,\ \ \varphi(15)=8$$
$$\varphi(20)=8\ \ ,\ \ \varphi(30)=(8)\ \ ,\ \ \varphi(60)=16$$

откуда:

$$\Sigma\,\varphi(\delta)=60$$

§ 93. Легко показать, что простыхъ чиселъ безконечное множество. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что ихъ есть конечное число, и послѣднее изъ нихъ есть p, слѣдовательно всѣ слѣдующія числа за p будутъ составныя, а слѣдовательно и число:

$$1.2.3.5.7\ldots p+1$$

Эта сумма, какъ число составное, должна дѣлиться на одно изъ простыхъ чиселъ изъ ряда:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ \ldots\ ,\ p$$

но первое слагаемое, очевидно дѣлится на это простое число, слѣдовательно должно на него дѣлиться и другое слагаемое—единица, что невозможно, слѣдовательно невозможно и наше предположеніе. Это предложеніе доказалъ Евклидъ.

§ 94. *Предложеніе Эйлера* и *Ферма.* Если a есть число взаимно простое съ модулемъ k, то:

$$a^{\varphi(k)}\equiv 1(Mk)$$

Доказательство. Подставимъ въ произведеніе ax вмѣсто x послѣдовательно числа a_1, a_2, $a_3\ldots$ меньшія отъ k и взаимно простыя съ нимъ, ихъ число, какъ мы видѣли въ есть $\varphi(k)$, произведенія

$$aa_1\ \ ,\ \ aa_2\ \ ,\ \ aa_3\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ aa_{\varphi(k)}$$

будутъ также числа взаимно простыя съ k. Эти произведенія сравниваемы по модулю k съ числами b_1, b_2, $b_3\ \ldots\ b_{\varphi(k)}$, которыя суть ничто иное, какъ тѣ же числа a_1, a_2, $a_3\ \ldots$ только въ различномъ порядкѣ, слѣдовательно, мы имѣемъ:

$$aa_1\equiv b_1(Mk)$$
$$aa_2=b_2(Mk)$$
$$.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .$$
$$aa_{\varphi(k)}\equiv b_{\varphi(k)}(Mk)$$

откуда, перемножая найдемъ:

$$a^{\varphi(k)}a_1a_2\ .\ .\ .\ a_{\varphi(k)} \equiv b_1b_2\ .\ .\ .\ b_{\varphi(k)}\,(Mk)$$

или

$$a^{\varphi(k)}a_1a_2\ .\ .\ .\ a_{\varphi(k)} \equiv a_1a_2\ .\ .\ .\ a_{\varphi(k)}(Mk)$$

Сокращая обѣ части на $a_1a_2\ldots a_{\varphi(k)}$ (§ 88, св. 5), найдемъ:

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1\,(Mk) \qquad (16)$$

Это предложеніе Эйлера.

Примѣръ. Число 3 есть взаимно-простое съ 10, а $\varphi(10)=4$, слѣдовательно, имѣемъ:

$$3^4 \equiv 1(M10) \text{ или } \frac{81-1}{10} = 8$$

Если k есть число простое p, то $\varphi(p)=p-1$, въ этомъ случаѣ сравненіе (k) сдѣлается:

$$a^{p-1} \equiv 1(Mp) \qquad (17)$$

т. е. если число a не дѣлится на простое число p, то $p-1$ его степень сравниваема съ единицей по модулю p. Это знаменитое предложеніе Ферма, имѣетъ важное значеніе, какъ увидимъ, въ теоріи чиселъ.

Примѣръ. Пусть $p=5$, $a=3$; то

$$3^4 \equiv 1\,(M5)$$

$$\frac{81-1}{5} = 16$$

§ 95. *Опредѣленіе.* Двѣ цѣлыя раціональныя функціи:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots. + a_{n-1}x + a_n$$

$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

съ цѣлыми коэфиціентами сравниваемы по модулю p, т. е.

$$f(x) \equiv \varphi(x)\,(Mp)$$

если коэфиціенты у одинаковыхъ степеней перемѣннаго сравниваемы по тому же модулю, т. е. если для всякаго индекса i имѣемъ:

$$a_i \equiv b_i(Mp)$$

Можно всегда предположить что обѣ функціи одной степени, такъ какъ въ противномъ случаѣ, недостающія степени можно пополнить членами съ коэфиціентами равными нулю или кратными модуля p.

Слѣдовательно сравненіе $f(x) \equiv 0 (Mp)$ показываетъ, что всѣ коэфиціенты функціи $f(x)$ дѣлятся на p.

§ 96. *Предложеніе.* Произведеніе двухъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ можетъ быть сравниваемо съ нулемъ по модулю p, p есть число простое только тогда, когда одинъ изъ множителей сравниваемъ съ нулемъ по тому же модулю.

Доказательство. Положимъ противное, слѣдовательно въ каждомъ изъ множителей $f(x)$ и $\varphi(x)$ найдется по крайней мѣрѣ одинъ коэфиціентъ, который не дѣлится на p. Пусть будетъ, считая съ конца, a_{n-i} первый коэфиціентъ не дѣлящійся на p въ $f(x)$, а b_{n-k} въ $\varphi(x)$, такъ что всѣ коэфиціенты съ большими индексами дѣлятся на p. Легко видѣть, что коэфиціентъ у x^{i+k} въ произведеніи функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ есть

$$a_{n-i}b_{n-k} + a_{n-i+1}b_{n-k-1} + \dots + b_{n-k+1}a_{n-i-1} + \dots$$

гдѣ кромѣ перваго члена всѣ дѣлятся на p, но вся сумма дѣлится на p по условію, слѣдовательно долженъ дѣлиться и первый ея членъ, что невозможно, такъ какъ p есть простое число.

Это предложеніе даетъ возможность доказать слѣдующее весьма важное:

§ 97. *Предложеніе.* Если цѣлая функція:

$$f(x) = x^{m+n} + c_1 x^{m+n-1} + \dots + c_{m+n-1}x + c_{m+n}$$

съ цѣлыми коэфиціентами и съ коэфиціентомъ равнымъ единицѣ у x наивысшей степени не разлагается на произведеніе двухъ цѣлыхъ функцій:

$$\varphi(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$$

$$\psi(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

съ цѣлыми коэфиціентами, то она не разлагается и на произведеніе цѣлыхъ же функцій съ раціональными коэфиціентами.

Доказательство. Положимъ что такое разложеніе имѣетъ мѣсто:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

приведемъ всѣ члены функцій $\varphi(x)$ къ одному знаменателю α, а члены функцій $\psi(x)$ къ одному знаменателю β и умножимъ предъидущія урав-

ненія на $\alpha\beta = c$, полагая вообще:

$$\alpha a_i = \alpha_i \qquad \beta b_i = \beta_i$$

найдемъ:

$$cf(x) = \varphi_1(x) \, . \, \psi_1(x)$$

гдѣ:

$$\varphi_1(x) = \alpha x^m + \alpha . x^{m-1} + \ . \ . \ . + \alpha_{m-1} x + \alpha_m$$

$$\psi_1(x) = \beta x^n + \beta . x^{n-1} + \ . \ . \ . + \beta_{n-1} x + \beta_n$$

суть функціи съ цѣлыми коэфиціентами. На основаніи предъидущаго предложенія каждый простой дѣлитель въ c долженъ дѣлить всѣ коэфиціенты или $\varphi_1(x)$ или $\psi_1(x)$, откуда вытекаетъ уравненіе:

$$f(x) = \varphi_2(x) \, . \, \psi_2(x)$$

гдѣ $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ суть цѣлыя функціи съ цѣлыми коэфиціентами изъ коихъ наивысшій равенъ единицѣ, такъ какъ это произведеніе равно $f(x)$. Такое разложеніе функціи $f(x)$ противорѣчитъ предположенію.

§ 98. Выше мы разсматривали сравненіе:

$$fx = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a^n = 0(Mk) \qquad (18)$$

въ которомъ всѣ коэфиціенты a_0, a_1 ... дѣлятся на k, теперь мы положимъ, что эти коэфиціенты не дѣлятся на k, а требуется отыскать такія числовыя значенія для перемѣннаго x, которыя-бы, будучи подставлены въ $f(x)$, давали въ результатѣ число кратное числа k. Эти числовыя значенія перемѣннаго x называются *корнями значенія* (18).

Если x_1 есть корень сравненія (18), то легко видѣть, что и числа $x_1 + tk$, гдѣ t есть произвольное цѣлое число, суть его корни; всѣ эти числа находятся въ одномъ классѣ съ x_1 (§ 86) относительно модуля k, т. е. сравниваемы по модулю k, ихъ принимаютъ за одинъ корень, а представителемъ класса считаютъ наименьшій вычетъ по модулю k. Слѣдовательно, если x_1 будетъ корень сравненія (18), то будемъ всегда полагать $x_1 < k$, или число, находящееся между $-\frac{k}{2}$ и $\frac{k}{2}$. Слѣдовательно, различными корнями сравненія (1) мы будемъ считать только корни несравниваемые по модулю k.

§ 99. Мы займемся только такими сравненіями, въ которыхъ модуль k есть простое число p.

Пусть такое сравненіе будетъ:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a^{n-1} x + a_n = 0(Mp) \qquad (19)$$

его остальныя свойства суть слѣдующія:

Свойство 1. Если-бы въ сравненіи (1) нашелся коэфиціентъ, который дѣлится на p, то его, по свойству сравненія, можно выбросить, слѣдовательно, всѣ оставшіеся коэфиціенты не дѣлятся на p.

Свойство 2. Всѣ коэфиціенты можно замѣнить наименьшими вычетами по модулю p, такъ что всегда можно положить $a_0, a_1 \ldots a_n < p$.

Свойство 3. Такъ какъ корнями сравненій (18) могутъ быть только числа 1, 2, 3 . . . , $p-1$, а для каждаго изъ такихъ чиселъ, по теоремѣ Ферма мы имѣемъ:

$$x^{p-1} \equiv 1\,(Mp)$$

откуда вообще для всѣхъ чиселъ кратныхъ и некратныхъ числа p:

$$x^p \equiv x(Mp)$$

слѣдовательно, всѣ степени перемѣннаго x въ сравненіи (18), на основаніи этого свойства, можно понизить до $p-1$.

Примѣръ. Пусть будетъ дано сравненіе:

$$3x^6 + 4x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2 \equiv 0(M5)$$

или

$$3x^2 + 4x - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2 \equiv 0(M5)$$

слѣдовательно:

$$2x^4 - x^3 - 4x - 2 \equiv 0(Mp)$$

Свойство 4. Въ сравненіи (1) коэфиціентъ у наивысшей степени перемѣннаго можно всегда сдѣлать равнымъ единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если помножимъ всѣ члены сравненія (18) на $a_0{}^{p-2}$, то найдемъ:

$$a_0^{p-1}x^n + a_0^{p-2}a_1x^{n-1} + \ldots + a_0^{n-2}a_{n-1}x + a_0^{n-2}a_n \equiv 0\,(Mp)$$

Но такъ какъ по теоремѣ Ферма, если a_0 не дѣлится на p, мы имѣемъ:

$$a_0^{p-1} \equiv 1\,(Mp)$$

то будемъ имѣть, если a_0^{p-1} замѣнимъ единицей, а произведенія $a_0^{p-2}a_i$ наименьшими вычитами a'_i:

$$x^n + a'_1x^{n-1} + a'_2x^{n-1} + \ldots + a'_{n-1}x + a'_n \equiv 0\,(Mp)$$

Примѣръ. Пусть будетъ дано сравненіе:

$$3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 \equiv 0\,(M7)$$

помножая на $3^5=243$ и замѣщая произведенiя:

$$4.243 \quad , \quad 2.243 \quad , \quad 243 \quad , \quad 5.243 \quad , \quad 243$$

положительными вычетами найдемъ замѣчая, что

$$3^6 \equiv 1 \, (M7)$$

$$x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4x - 5 \equiv 0 \, (M7)$$

а замѣщая коэфицiенты 6, 5, 4 наименьшими вычетами найдемъ наконецъ:

$$x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \, (M7)$$

§ 100. *Предложенiе.* Число корней сравненiя (18) не можетъ быть больше показателя его степени

Доказательство. Пусть данное сравненiе будетъ:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \; . \; . \; . + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \, (Mp) \qquad (19)$$

пусть x_1 будетъ его корень, то $f(x_1)$ дѣлится на p. Раздѣлимъ $f(x)$ на $x - x_1$, то имѣемъ:

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x) + R_1 \qquad (20)$$

гдѣ $R_1 = f(x_1)$ дѣлится по условiю на p.

Пусть x_2 будетъ второй корень сравненiя (1) то:

$$f(x_2) = (x_2 - x_1) f_1(x_2) + R_2 \qquad (21)$$

такъ $f(x_2)$ и R_1 дѣлится на p_1 то и $(x_2 - x_1) f(x_2)$ должно дѣлиться на p, но разность $x_2 - x_1$ не дѣлится на p, слѣдовательно $f(x_2)$ должно дѣлиться на p, т. е. x_2 долженъ быть и корнемъ сравненiя $f_1(x) \equiv 0 \, (Mp)$.

Раздѣлимъ на $x - x_2$ функцiю $f_1(x)$, то найдемъ:

$$f_1(x) = (x - x_2) f_2(x) + R_2$$

гдѣ R_2 дѣлится на p. Подставляя во (21) найдемъ:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x) + (x - x_1) R_1 + R_2$$

или:

$$f(x) = (x - x_1 (x - x_2) f_2(x) + p(ax + b) \qquad (22)$$

такъ какъ R_1 и R_2 дѣлятся на p.

Если x_3 будетъ третій корень, то легко видѣть, что онъ будетъ и корнемъ сравненія:

$$f_2(x) \equiv 0\,(Mp)$$

раздѣляя $f_2(x)$ на $x - x_3$, найдемъ:

$$f_2(x) = (x - x_3)\,f_3(x) + R_3$$

гдѣ R_2 есть число кратное p, слѣдовательно подставляя въ (22) найдемъ:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\,(x - a_3)\,f_3(x) + p\,(a'x^2 + bx + c)$$

Продолжая подобнымъ образомъ найдемъ:

$$f(x) = a_0\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_n) + p\psi(x) \qquad (23)$$

гдѣ $\psi(x)$ есть многочленъ $n - 1$ степени съ цѣлыми коэфиціентами.

Изъ уравненія (23) слѣдуетъ, что сравненіе (18) болѣе n корней имѣть не можетъ, ибо если-бы былъ еще одинъ корень, x', то изъ уравненія:

$$f(x') = a_0\,(x' - x_1)\,(x' - x_2)\ldots(x' - x_3) - p\psi(x') \qquad (24)$$

слѣдовало бы что и произведеніе:

$$a_0\,(x' - x_1)\,(x' - x_2)\;\ldots\;(x' - x_n)$$

дѣлится на p, что не возможно, такъ какъ ни одинъ изъ множителей не дѣлится на p.

Изъ уравненія (23) мы имѣемъ:

$$f(x) - a_0\,(x - x_1)\,(x - x_2)\;\ldots\;(x - x_n) = p\psi(x) \qquad (25)$$

изъ этого уравненія видимъ, что въ полиномѣ $n - 1$ степени, составляющемъ первую часть, всѣ коэфиціенты дѣлятся на p.

§ 101. *Предложеніе.* Если полиномъ $f(x)$ n-й степени, съ цѣлыми коэфиціентами, разлагается на произведеніе двухъ полиномовъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ съ цѣлыми коэфиціентами m-ой и k-ой степеней, $m + k = n$, и если сравненіе:

$$f(x) \equiv 0(Mp)$$

имѣетъ n корней, то сравненія

$$\varphi(x) \equiv 0(Mp) \quad , \quad \psi(x) \equiv 0(Mp)$$

первое имѣетъ m, а второе k корней.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы сравненіе, напримѣръ, $\varphi(x) \equiv 0(Mp)$ имѣло меньше m корней, то сравненіе $\psi(x) \equiv 0(Mp)$ имѣло-бы ихъ больше, такъ какъ число всѣхъ корней должно быть по условію равно n, но число корней въ сравненіи не можетъ превзойти его степени.

§ 102. *Предложеніе Вильсона.* Сравненіе:

$$x^{p-1} \equiv 1(Mp) \quad \text{или} \quad x^{p-1} - 1 \equiv 0(Mp)$$

имѣетъ, въ силу теоремы Ферма, $p-1$ корней:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ .\ .\ .\ ,\ p-1$$

удовлетворяющихъ этому сравненію, слѣдовательно:

$$x^{p-1} - 1 = (x-1)(x-2\ .\ .\ .\ (x-p+1) + p\varphi(x)$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть полиномъ $p-2$ степени.

Если разложимъ произведеніе 2-й части по степенямъ x, то коэфиціенты этого произведенія у дополнительныхъ коэфиціентовъ x будутъ сравниваемы съ коэфиціентами $x^{p-1} - 1$ по модулю p. Изъ нихъ послѣдній $1.2.3\ldots p-1$ будетъ сравниваемъ съ -1 по модулю p, т. е.

$$1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ p-1 \equiv -1(Mp) \tag{26}$$

или, если p есть простое число, то

$$1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ p-1+1$$

дѣлится на p. Это предложеніе Вильсона.

Примѣръ. Пусть $p = 7$, то

$$1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6 + 1 = 721$$

число, дѣлящееся на 7.

Обратно, если

$$1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ p-1+1 \tag{27}$$

дѣлится на p, то p есть число простое. Въ самомъ дѣлѣ, пусть p будетъ число составное и a его дѣлитель, такъ какъ по условію $1.2.3\ldots(p-1)+1$ дѣлится на p, и первая часть этой суммы, т. е. произведеніе $1.2.3\ldots p-1$ также дѣлится на a, то и второе слагаемое 1 должно дѣлиться на a, что невозможно.

§ 103. Вотъ еще важное слѣдствіе, вытекающее, въ силу § 101, изъ сравненія

$$x^{p-1}-1\equiv 0(Mp) \tag{28}$$

Если δ есть дѣлитель числа $p-1$, то мы имѣемъ

$$x^{p-1}-1=(x^{\delta}-1)\psi(x)$$

гдѣ $\psi(x)$ есть полиномъ съ цѣлыми коэфиціентами. Такъ какъ сравненіе (28) имѣетъ $p-1$ корней, то (§ 101) сравненіе

$$x^{\delta}-1\equiv 0(Mp) \tag{29}$$

имѣетъ δ корней.

Рѣшеніе сравненій первой степени.

§ 104. Самая общая форма сравненій 1-й степени есть

$$ax\equiv c(Mb) \tag{30}$$

гдѣ a, c суть цѣлыя числа, а b (модуль) какое-нибудь число.

Это сравненіе, написанное въ формѣ уравненія, есть

$$ax=c+bg$$

или

$$ax-bg=b \tag{31}$$

Слѣдовательно, рѣшить сравненіе (30) то-же, что рѣшить неопредѣленное уравненіе (31).

Здѣсь представляются два случая:

Случай 1. Коэфиціентъ a есть число взаимно-простое съ модулемъ b. Если $\varphi(b)$ есть число чиселъ меньшихъ b и взаимно простыхъ съ нимъ, то по теоремѣ Эйлера (§ 94) мы имѣемъ:

$$a^{\varphi(b)}\equiv 1(Mb)$$

откуда, помножая на c, найдемъ:

$$ca^{\varphi(b)}\equiv c\,(Mb)$$

или

$$a\,.\,ca^{\varphi(k)-1}\equiv c(Mb)$$

Сравнивая это сравненіе съ сравненіемъ (30) легко видѣть, что

$$x \equiv ca^{\varphi(b)-1}(Mb)$$

есть его корень.

Примѣръ. Пусть будетъ дано сравненіе:

$$8x \equiv 5(M35) \qquad (31)$$

откуда:

$$x \equiv 5.8^{23}(M35)$$

или:

$$x \equiv 5(M35)$$

Легко видѣть, что, въ этомъ случаѣ, сравненіе (30) имѣетъ только одинъ корень. Если въ произведеніе ax, гдѣ a есть число взаимно-простое съ b, подставимъ послѣдовательно вмѣсто x $\varphi(b)$ чиселъ, не сравниваемыхъ между собою по модулю b, то произведенія будутъ также не сравниваемы по модулю b. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x и y будутъ два несравниваемыхъ числа, а произведенія ax и ay пусть будутъ сравниваемы, то мы будемъ имѣть:

$$ax \equiv ay(Mb)$$

но a есть число взаимно-простое съ b, слѣдовательно это сравненіе можно сократить на a откуда найдемъ:

$$x \equiv y(Mn)$$

что противорѣчитъ положенію. Итакъ произведенія:

$$aa_1 \ , \ aa_2 \ , \ aa_3 \ , \ . \ . \ . \ , \ aa_{k-1}$$

гдѣ a_1, $a_2 \ldots a_{k-1}$ суть числа не сравниваемыя, суть также не сравниваемыя, а слѣдовательно одно, и только одно, изъ этихъ произведеній будетъ сравниваемо съ c.

Случай 2. Положимъ теперь, что a и b имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя δ. Если въ сравненіи (30) a и b дѣлится на δ, то и c должно дѣлиться на δ, въ противномъ случаѣ сравненіе (30) не возможно. Итакъ, положимъ что и c дѣлится на δ. Раздѣляя всѣ члены сравненія (30) на δ, найдемъ:

$$\frac{a}{\delta}x \equiv \frac{c}{\delta}\left(M\frac{b}{\delta}\right)$$

Такъ какъ въ этомъ сравненіи $\frac{a}{\delta}$ и модуль $\frac{b}{\delta}$ суть числа взаимно-простыя, то это сравненіе представляетъ 1-й случай, въ которомъ сравненіе имѣетъ всегда одинъ только корень. Пусть этотъ корень будетъ x_1 или $x \equiv x_1\left(M\frac{b}{\delta}\right)$ или

$$x = x_1 + t\frac{b}{\delta}$$

Давая числу t всѣ значенія $0, 1, 2, 3 \ldots, \delta-1$ мы найдемъ числа:

$$x_1 \ , \ x_1+\frac{b}{\delta} \ , \ x_1+2\frac{b}{\delta} \ , \ x_1+3\frac{b}{\delta} \ , \ldots , \ x_1+(\delta-1)\frac{b}{\delta}$$

которыя будутъ несравниваемы по модулю b и всѣ удовлетворяютъ сравненію:

$$ax \equiv c\,(Mb)$$

Слѣдовательно это суть δ несравниваемыхъ корней этого сравненія.

Примѣръ. Пусть будетъ дано сравненіе:

$$8x \equiv 12(M20)$$

Общій наибольшій дѣлитель 8 и 20 есть 4, слѣдовательно мы будемъ имѣть сравненіе:

$$2x \equiv 3\,(M5)$$

корень этого сравненія есть $x = 4$, откуда четыре корня даннаго сравненія будутъ:

$$4 \ , \ 4+5 \ , \ 4+2.5 \ , \ 4+3.15$$

или

$$4 \ , \ 9 \ , \ 14 \ , \ 19$$

Хотя съ помощью теоремы Эйлера или Ферма, всегда находится корень сравненія:

$$ax \equiv b\,(Mk)$$

$$x \equiv ba^{\varphi(k)-1}\,(Mk)$$

но вычислить корень сравненія (30) по этой формулѣ трудно, для этого есть другіе способы: способъ основанный на свойствѣ непрерывныхъ дробей, но на немъ мы неостановимся, для насъ, достаточно знать теоретически, что такой корень можно найти.

Впрочемъ можно найти корень сравненія, даннаго въ числахъ, слѣдующимъ образомъ: прибавляютъ или отнимаютъ, отъ второй части сравненія число кратное модуля, выбирая его такъ чтобы коэфиціентъ a у x былъ сократимъ съ b. Возьмемъ примѣръ (31):

$$8x \equiv 5\,(M35)$$

Если ко второй части придадимъ модуль 35, то сравненіе сдѣлается $8x \equiv 40\,(M35)$, сокращая на 8 найдемъ:

$$x \equiv 5\,(M35)$$

§ 105. Покажемъ на нѣсколькихъ частныхъ примѣрахъ какъ рѣшаются сравненія съ нѣсколькими не извѣстными. Они рѣшаются совершенно такъ, какъ рѣшаются уравненія со многими неизвѣстными.

Примѣръ 1. Пусть будутъ даны два сравненія съ двумя неизвѣстными:

$$3x + 5y \equiv 7\,(M11)$$

$$7x - 2y \equiv 4\,(M11)$$

Исключимъ y, помножая первое на 2, а второе на 5 и складывая, что даетъ:

$$41x \equiv 34\,(M11)$$

или:

$$8x \equiv 1\,(M21)$$

или:

$$8x \equiv 12\,(M11)$$

откуда сокращая на 4 будемъ имѣть:

$$2x \equiv 3\,(M11)$$

или еще:

$$2x \equiv 14\,(M11)$$

откуда наконецъ:

$$x \equiv 7\,(M11)$$

Подставляя это значеніе для x въ первое изъ данныхъ сравненій, найдемъ:

$$5y \equiv -14\,(M11)$$

или:

$$5x \equiv -25\,(M11)$$

откуда:

$$y \equiv -5 (M11)$$

или:

$$y \equiv 6 (M11)$$

и такъ мы имѣемъ рѣшеніе:

$$x \equiv 7 (M11) \quad , \quad y \equiv 6 (M11)$$

Примѣръ 2. Пусть данныя два сравненія будутъ:

$$3x + 7y \equiv 8 (M15)$$

$$5x - 4y \equiv 3 (M15)$$

Къ этимъ сравненіямъ можно приложить способъ Безу. Для этого помножимъ 2-е сравненіе на λ и сложимъ, то найдемъ:

$$(3 + 5\lambda) x + (7 - 4\lambda) y \equiv 8 + 3\lambda (M15)$$

Если для λ найдемъ такое число, что:

$$7 - 4\lambda \equiv 0 (M15)$$

то мы будемъ имѣть сравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$(3 + 5\lambda) x \equiv 8 + 3\lambda (M15)$$

Но сравненіе $7 - 4\lambda \equiv 0 (M15)$ или:

$$4\lambda \equiv 7 (M15)$$

даетъ:

$$\lambda \equiv -2 (M15)$$

Слѣдовательно сравненіе въ x сдѣлается:

$$7x \equiv -2 (M15)$$

откуда:

$$x \equiv 4 (M15)$$

Легко также найти что:

$$y \equiv 8 (M15)$$

Таковъ въ общихъ чертахъ пріемъ для рѣшенія сравненій съ двумя неизвѣстными, который легко распространился и на сравненія со многими неизвѣстными.

ГЛАВА IX.

Степенные вычеты.

§ 106. Пусть число a будетъ взаимно простое съ модулемъ k; разсмотримъ рядъ степеней:

$$1 \;,\; a \;,\; a^2 \;,\; a^3 \;,\; \ldots \;,\; a^n \;,\; \ldots \tag{1}$$

такъ какъ этотъ рядъ можно продолжить до безконечности, а чиселъ несравниваемыхъ по модулю k есть число конечное, то мы необходимо найдемъ двѣ степени числа a, a^s и a^{s+n}, которыя будутъ сравнительны по модулю k т. е.

$$a^{s+n} \equiv a^s (Mk) \tag{2}$$

Такъ какъ a и a^s суть числа взаимно-простыя съ k, то это сравненіе можно сократить на a^s, что дастъ:

$$a^n \equiv 1\,(Mk) \tag{3}$$

Обратно, если это послѣднее сравненіе имѣетъ мѣсто, то и сравненіе (2) имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи s.

Изъ этого слѣдуетъ, что если число n есть наименьшее, для котораго сравненіе (3) имѣетъ мѣсто, то вычеты или остатки по модулю k ряда (1) образуютъ періодическій рядъ въ которомъ періодъ будетъ состоять изъ n членовъ не сравниваемыхъ по модулю k, которые будутъ вычеты степеней:

$$1 \;,\; a \;,\; a^2 \;,\; a^3 \;,\; \ldots \;,\; a^{n-1}$$

Очевидно, члены ряда (1), которые даютъ вычетъ единицу, исключая единицы, будутъ:

$$a^n \;,\; a^{2n} \;,\; a^{3n} \;,\; \ldots$$

Но по предложенію Эйлера мы имѣемъ:

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1 (Mk)$$

Слѣдовательно, n есть дѣлитель числа $\varphi(k)$.

Если n есть наименьшее число, для котораго сравненіе (31) имѣетъ мѣсто, то говорятъ, что число a *принадлежитъ показателю n по модулю k.*

Слѣдовательно, показатель, къ которому принадлежитъ число a по модулю k, есть дѣлитель числа $\varphi(k)$.

§ 107. Ограничимся только тѣмъ случаемъ, въ которомъ модуль k есть простое число p, а a число, не дѣлящееся на p. Въ этомъ случаѣ показатель n, къ которому принадлежитъ число a, по модулю k, долженъ быть дѣлителемъ числа $\varphi(p)=p-1$.

Спрашивается теперь обратно, если n есть дѣлитель числа $p-1$, есть-ли всегда такое число a, которое принадлежитъ показателю n, и если есть, то сколько такихъ чиселъ?

Замѣтимъ сначала, что два сравниваемыя числа по модулю p принадлежатъ, очевидно, одному и тому-же показателю. Слѣдовательно, можно разсматривать только числа:

$$a=1 \;,\; 2 \;,\; 3 \;,\; . \;.\; . \;,\; p-1$$

Пояснимъ это примѣромъ. Пусть $p=7$. Слѣдовательно:

$$a=1 \;,\; 2 \;,\; 3 \;,\; 4 \;,\; 5 \;,\; 6$$

Для $a=$	1	2	3	4	5	6
Показ. $n=$	1	3	6	3	6	2

Изъ этой таблички видно, что показателю 1 принадлежитъ только одно число 1, показателю 2 принадлежитъ одно число 6, показателю 3 принадлежатъ два числа 2 и 4, наконецъ, показателю 6 принадлежатъ также два числа 3 и 5. Изъ этого примѣра видимъ, что каждому изъ дѣлителей: 1, 2, 3, 6, числа 6 принадлежатъ извѣстныя числа изъ ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6.

§ 108. Теперь положимъ, что числу n, дѣлителю числа $p-1$, принадлежитъ по крайней мѣрѣ одно число a, слѣдовательно, степени:

$$1 \;,\; a \;,\; a^2 \;,\; a^3 \;,\; . \;.\; . \;,\; a^{n-1} \tag{4}$$

будутъ не сравниваемы; но такъ какъ

$$a^n \equiv 1(Mp) \tag{5}$$

то

$$(a^r)^n = (a^n)^r \equiv 1(Mp) \tag{6}$$

т. е. n чиселъ (4) суть корни сравненія (5) и такъ какъ они не сравниваемы, а модуль p есть число простое, то это суть всѣ корни сравненія (5) n-й степени. Слѣдовательно, каждое изъ чиселъ, принадлежащихъ пока-

зателю n, должно быть корнемъ этого сравненія (5) и ихъ должно искать между числами ряда (4). Спрашивается поэтому, какому показателю h (h дѣлитель числа $p-1$) принадлежитъ одно изъ чиселъ ряда (4), напримѣръ, число a^r? т. е. какое будетъ наименьшее число h, для котораго мы имѣемъ:

$$(a^r)^h = a^{rh} \equiv 1(Mp) \quad ?$$

Очевидно, число rh должно дѣлиться на n.

Если черезъ ε означимъ общаго наибольшаго дѣлителя r и n, то h должно дѣлиться на $\frac{n}{\varepsilon}$ и наименьшее число h, удовлетворяющее этому условію, будетъ, очевидно, $\frac{n}{\varepsilon}$ и мы дѣйствительно имѣемъ:

$$(a^r)^h = (a^n)^{\frac{r}{\varepsilon}} \equiv 1(Mp)$$

Слѣдовательно, $\frac{n}{\varepsilon}$ есть число, къ которому принадлежитъ a^r. Если n^r должно принадлежать показателю n, то ε должно быть $=1$, слѣдовательно, r есть число взаимно простое съ n.

Обратно, если только $\varepsilon = n$, то a^r дѣйствительно принадлежитъ показателю n. Изъ этого находимъ, что между числами рода (4) находится столько чиселъ, принадлежащихъ показателю n, сколько есть между показателями:

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ . \ . \ . \ , \ n-1$$

взаимно простыхъ съ n, а ихъ есть $\varphi(n)$.

Мы предположили, что есть *по крайней мѣрѣ одно* число a, которое принадлежитъ показателю n, а теперь покажемъ, что если есть одно, то ихъ есть $\varphi(n)$. Слѣдовательно, можно предположить, что дѣлителю n числа $p-1$, принадлежитъ чиселъ числомъ 0 или $\varphi(n)$. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ разсмотримъ всѣ $p-1$ чиселъ не сравниваемыхъ по модулю p и не дѣлящихся на p. Эти числа распредѣлимъ на группы, помѣщая въ одну группу тѣ числа, которыя принадлежатъ одному дѣлителю числа $p-1$, слѣдовательно всѣхъ группъ будетъ столько, сколько есть дѣлителей въ числѣ $p-1$. Очевидно, что одно и тоже число не можетъ попасть въ двѣ группы. Поэтому, если чрезъ $\psi(n)$ означимъ число чиселъ, принадлежащихъ показателю n, то очевидно будемъ имѣть:

$$\Sigma\psi(n) = p-1$$

Σ есть знакъ суммы относящійся ко всѣмъ дѣлителямъ числа $p-1$. Но мы знаемъ, что $\psi(n)=0$ или $\psi(n)=\varphi(n)$, слѣдовательно:

$$\Sigma\,\psi(n)=\Sigma\,\varphi(n)=p-1$$

Изъ этого уравненія видимъ, что еслибы, хотя для одного дѣлителя, мы имѣли $\psi(n)=0$: это уравненіе существовать не могло-бы, а слѣдовательно мы всегда имѣемъ:

$$\psi(n)=\varphi(n)$$

т. е. число чиселъ принадлежащихъ показателю n (n есть дѣлитель числа $p-1$), не сравнимаемыхъ по модулю p, есть всегда $\varphi(n)$. Это легко провѣрить на выше приведенномъ численномъ примѣрѣ.

§ 109. *Первообразные корни простыхъ чиселъ.*

Самый важный, по своимъ слѣдствіямъ, тотъ частный случай, въ которомъ дѣлитель:

$$n=p-1$$

Слѣдовательно несравниваемыхъ чиселъ, принадлежащихъ показателю $p-1$ будетъ числомъ $\varphi(p-1)$ и если одно изъ нихъ означимъ чрезъ g, то $p-1$ степеней:

$$1\ ,\ g\ ,\ g^2\ ,\ g^3\ ,\ \ldots\ ,\ g^{p-2} \tag{8}$$

будутъ не сравниваемы по модулю p, и

$$g^{p-1}\equiv 1\,(Mp)$$

Каждое число, принадлежащее показателю $p-1$, называется *первообразнымъ корнемъ простаго числа* p, слѣдовательно, число первообразныхъ корней простаго числа p есть $\varphi(p-1)$.

Такъ какъ числа ряда (8) не сравниваемы по модулю p, то каждое число, не дѣлящееся на p, сравнимаемо съ однимъ изъ членовъ ряда (8), т. е. если число b не дѣлится на p, то всегда будемъ имѣть:

$$b\equiv g^{\gamma}(Mp) \tag{10}$$

Я не стану показывать способы нахожденія первообразныхъ корней даннаго простаго числа, а скажу, что если извѣстенъ одинъ изъ нихъ, то легко найти и всѣ остальные. Въ самомъ дѣлѣ, если g будетъ какимъ-нибудь изъ первообразныхъ корней простаго числа p, то вычеты степеней g (8) меньшія отъ $p-1$ будутъ всѣ первообразные корни числомъ $\varphi(p-1)$ (§ 108).

Ниже слѣдуетъ таблица, въ которой даны по одному наименьшему, первообразному корню простыхъ чиселъ между числами 1 и 100.

Числа . . .	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
Пер. корни	2	2	3	2	2	3	2	5	2	3	2	6
Числа . . .	43	47	53	54	61	67	71	73	79	83	89	97
Пер. корни	3	5	2	2	2	2	7	5	3	2	3	5

Такъ, напримѣръ, наименьшій первообразный корень простаго числа 13, есть 2; слѣдовательно, всѣ его первообразные корни числами $\varphi(12)=4$, будутъ:

$$2,\quad 2^5\quad,\quad 2^7\quad,\quad 2^{11}$$

или взявъ ихъ наименьшіе положительные вычеты по модулю 13, найдемъ:

$$2\quad,\quad 6\quad,\quad 11\quad,\quad 7$$

это и суть четыре первообразные корня простаго числа 13.

§ 110. *Индексы.* Выше было показано, что всякое число b, не дѣлящееся на p, сравниваемо съ однимъ изъ чиселъ ряда (8), т. е.:

$$b \equiv g^{\gamma}\,(Mp) \qquad (11)$$

показатель γ называется *индексомъ* числа b, а g—основаніемъ и пишутъ такъ:

$$\gamma = \mathrm{Ind}\,(b)$$

Индексъ совершенно аналогиченъ логарифму, и какъ увидимъ ниже имѣетъ подобныя же свойства.

Свойство 1. Если $a \equiv b\,(Mp)$, то:

$$\mathrm{Ind}\,(a) = \mathrm{Ind}\,(b)$$

Свойство 2. Если $c \equiv ab\,(Mp)$, то:

$$\mathrm{Ind}\,(c) = \mathrm{Ind}\,(ab) \equiv \mathrm{Ind}\,(a) + \mathrm{Ind}\,(b)\,(Mp-1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$a \equiv g^{\mathrm{Ind}(a)}\,(Mp)\quad,\quad b \equiv g^{\mathrm{Ind}(b)}\,(Mp)$$

откуда:

$$ab \equiv g^{\mathrm{Ind}\,(a)+\mathrm{Ind}\,(b)}\,(Mp)$$

Но

$$ab \equiv g^{\text{Ind}(ab)}\,(Mp)$$

слѣдовательно:

$$g^{\text{Ind}(ab)} \equiv g^{\text{Ind}(a)+\text{Ind}(b)}\,(Mp)$$

но такъ какъ g есть первообразный корень простаго числа p, то мы имѣемъ (§ 108):

$$\text{Ind}(ab) \equiv \text{Ind}(a) + \text{Ind}(b)\,(Mp-1) \qquad (12)$$

Эта формула соотвѣтствуетъ основному свойству логариѳмовъ. Изъ нее вытекаетъ слѣдующая:

$$\text{Ind}(abcd\ldots) \equiv \text{Ind}(a) + \text{Ind}(b) + \text{Ind}(c) + \ldots (Mp-1) \qquad (13)$$

полагая $a = b = c = \ldots.$ найдемъ:

$$\text{Ind}\,a^m \equiv m\,\text{Ind}(a)\,(Mp-1) \qquad (11)$$

гдѣ m есть, какое нибудь, цѣлое число.

Переходъ отъ одной системы индексовъ къ другой совершается такъ же какъ и переходъ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой, мы на этомъ не остановимся, а сдѣлаемъ только слѣдующее замѣчаніе.

Индексъ единицы всегда равенъ нулю, какое-бы основаніе не было, такъ какъ мы всегда имѣемъ:

$$1 \equiv g^0(Mp)$$

Такъ какъ:

$$g^{p-1} - 1 = (g^{\frac{p-1}{2}} - 1)(g^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0(Mp)$$

то одинъ изъ множителей:

$$g^{\frac{p-1}{2}} - 1 \quad \text{или} \quad g^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

долженъ дѣлиться на p, но первый дѣлиться не можетъ, такъ какъ g принадлежитъ показателю $p-1$, слѣдовательно мы должны имѣть:

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(Mp)$$

откуда:

$$\text{Ind}(-1) = \frac{p-1}{2} \qquad (15)$$

Двучленныя сравненія.

§ 111. Самая общая форма двучленнаго сравненія есть

$$x^n \equiv D(Mp) \qquad (16)$$

гдѣ p есть нечетное простое число, а D число не дѣлящееся на p.

Если число D такого свойства, что сравненіе (16) возможно, то D называется *вычетомъ* n-ой степени простаго числа p. Въ противномъ случаѣ, т. е. если сравненіе (16) не возможно, то D называется *невычетомъ* простого числа p. Если $n=2$, то D называется *квадратичнымъ вычетомъ* или *невычетомъ* числа p, если $n=3$, то это называется *кубическимъ вычетомъ* или *невычетомъ*, если $n=4$, то D называется *биквадратичнымъ вычетомъ* или *невычетомъ* простого числа p и т. д.

Примѣръ 1. Если въ сравненіи

$$x^2 \equiv D(M5)$$

$D=1$, 4, то оно возможно, слѣдовательно, числа 1 и 4 суть квадратные вычеты числа 5; если же $D=2$, 3, то сравненіе невозможно, поэтому числа 2 и 3 суть невычеты числа 5.

Примѣръ 2. Если $p=7$, то легко видѣть, что 1, 2, 4 суть квадратные вычеты числа 7, а 3, 5, 6 суть невычеты.

§ 112. Легко дать признакъ, по которому узнается, возможно-ли сравненіе (16) или невозможно, т. е. данное число D есть-ли вычетъ или невычетъ числа p?

Для этого возьмемъ одинъ изъ первообразныхъ корней простаго числа p, пусть онъ будетъ g, взявъ его за основаніе индексовъ, положимъ:

$$\text{Ind}\, x = \eta \quad , \quad \text{Ind}\, D = \xi$$

т. е.

$$x \equiv g^\eta(Mp) \quad , \quad D \equiv g^\xi(Mp)$$

Возьмемъ индексы обѣихъ частей сравненія (16), то будемъ имѣть (§ 110):

$$n\, \text{Ind}\, x \equiv \text{Ind}\, D(Mp-1)$$

или

$$n\eta \equiv \xi(Mp-1)$$

Это сравненіе 1-й степени относительно неизвѣстнаго η. Если черезъ δ

означимъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ n и $p-1$, то это сравненіе только тогда возможно, когда ξ дѣлится на δ, т. е. когда

$$\xi \equiv 0 (M\delta)$$

Въ этомъ случаѣ, это сравненіе имѣетъ δ корней (§ 104). Откуда слѣдуетъ, что если въ сравненіи (16) индексъ числа D дѣлится на наибольшаго общаго дѣлителя δ чиселъ n и $p-1$, то сравненіе возможно и имѣетъ δ корней. Это условіе можно выразить независимо отъ индексовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\xi \equiv 0 (M\delta)$, то $\xi = m\delta$, но:

$$D \equiv g^{\xi} (Mp)$$

слѣдовательно:

$$D \equiv g^{m\delta} (Mp)$$

возвышая обѣ части этого сравненія въ $\frac{p-1}{\delta}$ найдемъ:

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv g^{m(p-1)} (Mp)$$

такъ какъ g есть первообразный корень простаго числа p, то имѣемъ:

$$g^{p-1} \equiv 1 (Mp)$$

откуда:

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 (Mp) \qquad (17)$$

такому сравненію должно удовлетворять число D, чтобы сравненіе (16) было возможно. Такъ какъ $\frac{p-1}{\delta}$ есть дѣлитель числа $p-1$, то сравненіе (17) имѣетъ $\frac{p-1}{\delta}$ корней, а слѣдовательно столько-же и вычетовъ n-ой степени простаго числа p.

§ 113. Положимъ теперь, что степень $n=2$ т. е. что данное сравненіе есть:

$$x^2 \equiv D(Mp) \qquad (18)$$

Въ этомъ случаѣ, критеріумъ для возможности сравненія будетъ:

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (Mp) \qquad (19)$$

Это сравненіе имѣетъ $\frac{p-1}{2}$ корней, слѣдовательно простое число p имѣетъ $\frac{p-1}{2}$ *квадратичныхъ вычетовъ*.

или

$$2 \ , \ 8 \ , \ 10 \ , \ 7 \ , \ 6$$

§ 115. Лежандръ ввелъ символъ

$$\left(\frac{D}{p}\right) \tag{22}$$

которому даетъ значеніе + 1 или — 1, въ сравненіи

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{D}{p}\right)(Mp) \tag{23}$$

смотря потому, будетъ-ли число D квадратическій вычетъ или невычетъ числа p.

Свойства символа Лежандра.

Свойство 1. Если $D \equiv D.(Mp)$, то легко видѣть, что

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D}{p}\right) \tag{24}$$

Свойство 2. Если m и n суть два равныя или неравныя числа, не дѣлящіяся на p, то мы будемъ имѣть:

$$m^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{m}{p}\right)(Mp) \quad , \quad m_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{m_1}{p}\right)(Mp)$$

откуда перемножая найдемъ:

$$(mm_1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m_1}{p}\right)(Mp)$$

Но

$$(mm_1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{mm_1}{p}\right)(Mp)$$

слѣдовательно:

$$\left(\frac{mm_1}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m_1}{p}\right) \tag{25}$$

И вообще:

$$\left(\frac{m_1 m_2 m_3 \ldots}{p}\right) = \left(\frac{m_1}{p}\right)\left(\frac{m_2}{p}\right)\frac{m_3}{p}\right) \quad \ldots$$

Откуда слѣдуетъ, что произведеніе произвольнаго числа множителей, не дѣлящихся на простое число p, будетъ квадратичный вычетъ или невычетъ числа p, смотря потому, будетъ-ли между множителями четное или нечетное число невычетовъ.

Теорема взаимности простыхъ чиселъ.

§ 115. Мы выше показали признакъ возможности сравненія

$$x^2 \equiv D(Mp)$$

когда дано простое число p и число D не дѣлящееся на p, т. е. есть-ли число D вычетъ или невычетъ даннаго числа p и вообще, какія числа суть квадратичные вычеты даннаго простаго числа p?

Теперь мы рѣшимъ обратный вопросъ.

По данному простому числу q найти всѣ простыя числа p, коихъ q есть квадратичный вычетъ? т. е. найти всѣ простыя числа p, для которыхъ сравненіе

$$x^2 \equiv q(Mp) \tag{27}$$

возможно?

Это одна изъ самыхъ трудныхъ и весьма важныхъ задачъ въ теоріи чиселъ, она была рѣшена въ первый разъ французскимъ геометромъ Лежандромъ, и потомъ Гауссомъ, который далъ ей нѣсколько доказательствъ.

§ 116. Прежде чѣмъ приступимъ къ общему случаю, рѣшимъ слѣдующій частный.

Какихъ простыхъ чиселъ -1 есть квадратичный вычетъ т. е. для какихъ простыхъ чиселъ p возможно сравненіе:

$$x^2 \equiv -1(Mp)$$

Мы знаемъ, что признакъ возможности сравненія:

$$x^2 \equiv D(Mp)$$

есть (§ 113):

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{D}{p}\right)(Mp)$$

въ настоящемъ случаѣ $D = -1$, слѣдовательно:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \tag{28}$$

откуда видно, что если $\frac{p-1}{2}$ будетъ число четное, то -1, будетъ квадратичный *вычетъ* числа p, въ противномъ случаѣ -1 будетъ *невычетъ* т. е. въ первомъ случаѣ мы должны имѣть:

$$\frac{p-1}{2} = 2n$$

откуда:

$$p = 4n + 1$$

а во второмъ мы должны имѣть:

$$\frac{p-1}{2} = 2n + 1$$

откуда:

$$p = 4n + 3$$

Изъ этого слѣдуетъ, что -1 есть вычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ формы $4n+1$, а невычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ формы $4n+3$.

Примѣръ 1. Такъ -1 есть вычетъ чиселъ 5, 13, 29,..., а невычетъ чиселъ 3, 7, 11,...

Перейдемъ къ общему случаю:

§ 117. Дано простое число q, для какихъ простыхъ чиселъ p сравненіе:

$$x^2 \equiv q(Mp) \tag{29}$$

возможно, или какая должна существовать зависимость между простыми числами p и q чтобы сравненіе (29) было возможно.

Предложеніе. Если p и q суть два нечетныя простыя числа, изъ коихъ хотя одно имѣетъ форму $4n+1$, то q будетъ квадратичный вычетъ или невычетъ числа p, смотря по тому будетъ ли p квадратичный вычетъ или невычетъ числа q, если же оба числа p и q имѣютъ форму $4n+3$, то q будетъ квадратичный вычетъ или невычетъ числа p, смотря потому будетъ ли, число p квадратичный невычетъ или вычетъ числа q.

Это предложеніе выражается слѣдующей формулой:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \tag{30}$$

или

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

которую мы теперь и докажемъ.

Доказательство. Возьмемъ слѣдующія произведенія:

$$q \ , \ 2q \ , \ 3q \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ \frac{p-1}{2}q \qquad (31)$$

числа q на первыя $\frac{1}{2}(p-1)$ чиселъ. Пусть:

$$r_1 \ , \ r_2 \ , \ r_3 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ r_{\frac{p-1}{2}} \qquad (32)$$

будутъ наименьшіе положительные остатки этихъ чиселъ по модулю p. Всѣ эти числа различны и нѣтъ между ними равнаго нулю. Раздѣлимъ эти всѣ остатки на двѣ группы, въ первую помѣстимъ всѣ тѣ, которые $> \frac{1}{2}p$, во вторую тѣ которые $< \frac{1}{2}p$. Означимъ первые, коихъ число пусть будетъ μ, чрезъ:

$$\alpha_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ \alpha_3 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ \alpha_\mu \qquad (33)$$

остальные, числомъ $\frac{1}{2}(p-1)-\mu=\lambda$, означимъ чрезъ:

$$\beta_1 \ , \ \beta_2 \ , \ \beta_3 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ \beta_\lambda \qquad (34)$$

Возьмемъ дополненія остатковъ (33) до модуля p, т. е. разности:

$$p-\alpha_1 \ , \ p-\alpha_2 \ , \ p-\alpha_3 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ p-\alpha_\mu \qquad (35)$$

Эти разности, также какъ и числа (34) лежатъ очевидно между 0 и $\frac{1}{2}p$, кромѣ этого всѣ эти числа (34) и (35) различны между собою, въ чемъ легко убѣдиться. Положимъ, напримѣръ, что $p-\alpha=\beta$, слѣдовательно $\alpha+\beta=p\equiv 0(Mp)$. Если α и β сть остатки sq и tq, то:

$$sq+tq=(s+t)q\equiv 0(Mp)$$

слѣдовательно $s+t$ должно дѣлиться на p, что невозможно, такъ какъ числа s и t каждое меньше $\frac{1}{2}p$.

Итакъ мы имѣемъ слѣдующія $\mu+\lambda=\frac{1}{2}(p-1)$ чиселъ:

$$p-\alpha_1 \ , \ p-\alpha_2 \ , \ . \ . \ . \ , \ p-\alpha_\mu \ , \ \beta_1 \ , \ \beta_2 \ , \ . \ . \ . \ , \ \beta_\lambda$$

всѣ различны между собою и меньше $\frac{1}{2}p$, слѣдовательно они должны совпадать съ числами:

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ \frac{p-1}{2}$$

такъ что:

$$(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\dots(p-\alpha_\mu)\beta_1\beta_2\dots\beta_\lambda=1.2.4\dots\frac{p-1}{2}$$

откуда легко видѣть, что:

$$(-1)^{\mu}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu}\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_{\lambda}\equiv 1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\,(Mp) \qquad (36)$$

Съ другой стороны, перемножая сравненія:

$$q\equiv r_1(Mp) \quad , \quad 2q\equiv r_2(Mp)\ \ldots\ \frac{p-1}{2}\,q\equiv r_{\frac{p-1}{2}}(Mp)$$

имѣемъ:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu}\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_{\lambda}\equiv 1.2.3\ldots.\frac{p-1}{2}\,q^{\frac{p-1}{2}}\,(Mp) \qquad (37)$$

откуда, сравнивая съ (36), найдемъ:

$$(-1)^{\mu}\,1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\,q^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\,(Mp)$$

или, сокращая на $1.2.3\ldots.\frac{p-1}{2}$, будемъ имѣть:

$$q^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\mu}\,(Mp) \qquad (38)$$

т. е.:

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\mu} \qquad (39)$$

Остается опредѣлить μ.

Если означимъ символомъ $[x]$ наибольшее цѣлое число въ x, напримѣръ $[\frac{8}{3}]=2$, $[3]=3$, то легко видѣть, что:

$$q=p\left[\frac{q}{p}\right]+r_1 \ , \ 2q=p\left[\frac{24}{p}\right]+r_2\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{p-1}{2}\,q=p\left[\frac{\frac{p-1}{2}\,q}{p}\right]+r_{\frac{p-1}{2}} \qquad (40)$$

гдѣ $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ суть числа:

$$\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \alpha_3\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_{\mu}\ ;\ \beta_1\ ,\ \beta_2\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_{\lambda}$$

если сумму всѣхъ α означимъ чрезъ A, а сумму всѣхъ β чрезъ B, а чрезъ L сумму:

$$L=\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{\frac{p-q}{2}\,q}{p}\right] \qquad (41)$$

то сумма уравненій (40) дастъ:

$$\frac{p^2-1}{8}\cdot q = pL + A + B \tag{42}$$

Но такъ какъ числа

$$p-\alpha_1 \quad , \quad p-\alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \beta_1 \quad , \quad \beta_2 \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \beta x$$

совпадаютъ, какъ мы видѣли, съ числами

$$1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \frac{p-1}{2}$$

то ихъ сумма будетъ:

$$\frac{p^2-1}{8} = p\mu - A + B \tag{43}$$

вычитая это уравненіе изъ (42) найдемъ:

$$\frac{p^2-1}{8}(q-1) = (L-\mu)p + 2A \tag{44}$$

Остается рѣшить будетъ-ли число μ четное или нечетное (39). Такъ какъ мы всегда можемъ положить $p \equiv -1(M2)$, то, выбросивъ изъ формулы (44) всѣ числа кратныя числа 2, найдемъ:

$$\mu \equiv L + \frac{p^2-1}{8}(q-1)(M2) \tag{45}$$

Положимъ $q=2$, такъ какъ до сихъ поръ въ доказательство входило только то, что q не дѣлится на p.

Если $q=2$, то очевидно $L=0$. Слѣдовательно:

$$\mu = \frac{p^2-1}{8}\ (M2) \tag{46}$$

Откуда

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\mu} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \tag{47}$$

Изъ этой формулы видно, что 2 будетъ квадратичнымъ вычетомъ всѣхъ простыхъ чиселъ формулы $8n+1$ или $8n+7$ и квадратичнымъ невычетомъ простыхъ чиселъ формулы $8n+3$ и $8n+5$.

Теперь положимъ, что q есть простое нечетное число. Въ этомъ случаѣ формула (45) сдѣлается:

$$\mu \equiv L(M2)$$

откуда

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^L \tag{48}$$

Положимъ, что $q < p$. Въ этомъ случаѣ въ ряду

$$\left[\frac{q}{p}\right] \quad , \quad \left[\frac{2q}{p}\right] \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \left[\frac{\frac{p-1}{2}.q}{p}\right] \tag{49}$$

каждый членъ не болѣе какъ единицею больше непосредственно за нимъ слѣдующаго. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{(s+1)q}{p} = \frac{sq}{p} + \frac{q}{p}$$

и

$$\frac{sq}{p} = \left[\frac{sq}{p}\right] + \delta$$

гдѣ δ есть нѣкоторая правильная дробь, такъ что

$$\frac{(s+1)q}{p} = \left[\frac{sq}{p}\right] + \delta + \frac{q}{p}$$

и такъ какъ сумма правильныхъ дробей δ и $\frac{q}{p}$ меньше двухъ, то

$$\left[\frac{(s+1)q}{p}\right] = \left[\frac{sq}{p}\right] \quad \text{или} \quad = \left[\frac{sq}{p}\right] + 1$$

Далѣе мы имѣемъ

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)q}{p} = \frac{q-1}{2} + \frac{p-q}{2p}$$

слѣдовательно, послѣдній членъ въ ряду (49) есть

$$\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)q}{p}\right] = \frac{q-1}{2}$$

Если теперь числу s дадимъ всѣ значенія 1, 2, 3, . . , $\frac{p-1}{2}$ и остановимся на томъ изъ чиселъ s, для котораго

$$\left[\frac{sq}{p}\right]=t-s \quad , \quad \left[\frac{(s+1)q}{p}\right]=t$$

t есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, . . , $\frac{q-1}{2}$. Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ

$$\frac{sq}{p}<t \quad , \quad \frac{(s+1)q}{p}>t$$

(равенства $(s+1)q=tp$ быть не можетъ, такъ какъ ни q ни $s+1$ не дѣлятся на p), или

$$s<\frac{tp}{q}>+1$$

Слѣдовательно:

$$s=\left[\frac{tp}{q}\right]$$

Въ ряду (41) есть

$$\begin{array}{llll} \left[\frac{p}{q}\right] & \text{членовъ, въ которыхъ} & & t-1=0 \\ \left[\frac{2p}{q}\right]-\left[\frac{p}{q}\right] & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & & t-1=1 \\ \ldots\ldots & & & \\ \left[\frac{tp}{q}\right]-\left[\frac{(t-1)p}{q}\right] & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & & t-1 \\ \frac{p-1}{2}-\left[\frac{\frac{1}{2}(q-1)p}{q}\right] & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & & t-1=\frac{q-1}{2} \end{array}$$

откуда непосредственно слѣдуетъ:

$$L=\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}-\left\{\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{\frac{1}{2}(q-1)p}{q}\right]\right\}$$

и если положимъ:

$$N=\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots.+\left[\frac{\frac{1}{2}(q-1)p}{q}\right]$$

то найдемъ:

$$L+N=\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2} \qquad (50)$$

если q есть нечетное число меньше p.

Но мы выше (48) видѣли, что

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^L$$

то по той же причинѣ:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^N$$

такъ какъ N составлено изъ q и p такъ какъ M изъ p и q. Перемножая найдемъ:

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}} \qquad (51)$$

уравненіе, выражающее теорему *взаимности*.

Мы предположили, что $q<p$, но если обратить вниманіе на симметрію формулы (51), то легко видѣть, что такое ограниченіе можно опустить.

Если одно изъ чиселъ p или q имѣетъ форму $4n+1$, то уравненіе (51) можно написать въ формѣ

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right) \qquad (52)$$

Если же оба числа p и q имѣютъ форму $4n+3$, то тоже уравненіе можно написать въ формѣ

$$\left(\frac{q}{p}\right)=-\left(\frac{p}{q}\right) \qquad (53)$$

Примѣръ. Пусть данное сравненіе будетъ:

$$x^2\equiv 365(M1847)$$

Такъ какъ $365=5.73$, то мы имѣемъ

$$\left(\frac{365}{1847}\right)=\left(\frac{5}{1847}\right)\left(\frac{73}{1847}\right)$$

Но число 5 имѣетъ форму $4n+1$, слѣдовательно (48):

$$\left(\frac{5}{1847}\right)=\left(\frac{1847}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1=(44)$$

Далѣе, такъ какъ 73 имѣетъ форму $4n+1$, то мы опять имѣемъ

$$\left(\frac{73}{1847}\right)=\left(\frac{1847}{73}\right)=\left(\frac{22}{73}\right)=\left(\frac{2}{73}\right)\left(\frac{11}{73}\right)$$

Но 73 имѣетъ форму $8n+1$, слѣдовательно $\left(\frac{2}{73}\right)=1$, откуда:

$$\left(\frac{73}{1847}\right)=\left(\frac{11}{73}\right)=\left(\frac{73}{11}\right)=\left(\frac{7}{11}\right)$$

но числа 7 и 11 имѣютъ оба форму $4n+3$, слѣдовательно:

$$\left(\frac{7}{11}\right)=-\left(\frac{11}{7}\right)=-\left(\frac{4}{7}\right)=-1$$

то наконецъ найдемъ:

$$\left(\frac{365}{1847}\right)=\left(\frac{5}{1847}\right)\left(\frac{73}{1847}\right)=(-1)(-1)=+1$$

откуда заключаемъ, что число 365 есть вычетъ числа 1847 и дѣйствительно мы имѣемъ

$$(\pm 496)^2=246016=365+133.1847.$$

Слѣдствія предложенія Ферма и степенныхъ вычетовъ.

§ 118. Въ § 109 мы видѣли, что если

$$a^m \equiv 1(Mp) \qquad (50)$$

то показатель, которому принадлежитъ a по модулю p, будетъ дѣлителемъ числа m. Если число m есть простое, то a можетъ принадлежать только 1 или числу m, такъ какъ это единственные дѣлители числа m. Въ первомъ случаѣ, т. е. когда a принадлежитъ показателю 1, p будетъ дѣлителемъ числа $a-1$, а во второмъ m будетъ дѣлителемъ числа $p-1$ (§ 109), слѣдовательно:

$$p=km+1$$

§ 119. *Предложеніе 1* Формула $2nm+1$, гдѣ m есть простое число, а n произвольное, содержитъ безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Доказательство. Простые дѣлители числа x^m-1, исключая m, когда они не дѣлятъ числа $x-1$, будутъ дѣлить:

$$x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1 \qquad (52)$$

а слѣдовательно имѣютъ форму $p=km+1$, какъ выше было показано. Если теперь положимъ, что дѣлителей формы $2nm+1$ есть конечное число:

$$p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ \ldots\ ,\ p_s \qquad (53)$$

то полагая:

$$x=mp_1p_2\ldots p_s$$

функція (52) должна дѣлиться на одно изъ чиселъ ряда (53), но такъ какъ x дѣлится на это число, то единица должна также дѣлиться на тоже число, что нелѣпо.

Если положимъ $m=2$, то видимъ, что въ формулѣ $2n+1$ есть безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Если простое число m нечетное, то $\frac{p-1}{m}$ будетъ четное, слѣдовательно:

$$p=2nm+1$$

что и требовалось доказать.

Полагая $m=3, 5, 7, \ldots$ мы найдемъ что формулы:

$$2n+1\ ,\ 6n+1\ ,\ 10n+1\ ,\ 14n+1\ ,\ \ldots$$

заключаютъ каждая безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Предложеніе 2. Формула $4n-1=4m+3$ содержитъ безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Доказательство. Легко видѣть, что составное число формы $4n-1$ содержитъ всегда нечетное число множителей такой-же формы.

Предложеніе 3. Форма $6n-1$ содержитъ безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Доказательство. Такъ какъ всѣ нечетныя числа заключаются въ формахъ:

$$6n+1\ ,\ 6n-1\ ,\ 6n+3$$

изъ коихъ послѣдняя содержитъ только одно простое число 3, то всѣ

остальныя содержатся въ формахъ:

$$6n+1 \quad , \quad 6n-1$$

слѣдовательно каждая изъ этихъ формъ содержитъ безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Всѣ простыя нечетныя числа содержатся въ формахъ:

$$4n+1 \quad , \quad 4n-1$$

послѣдняя форма, какъ мы выше показали, содержитъ безчисленное множество простыхъ чиселъ. Вотъ какъ это можно показать для формы $4n+1$:

Предложеніе 4. Простое число формы $4n+3$, не дѣлящее a, не можетъ быть дѣлителемъ формы x^2+a^2 т. е. сравненіе:

$$x^2+a^2 \equiv 0\,(Mp)$$

при $p=4n+3$ не можетъ имѣть мѣста.

Доказательство. Напишемъ предъидущее сравненіе въ формѣ:

$$x^2 \equiv -a^2(Mp)$$

Чтобы это сравненіе было возможно, необходимо имѣть (§ 113):

$$(-a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,(Mp)$$

откуда:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} a^{p-1} \equiv 1(Mp)$$

но по теоремѣ Ферма:

$$a^{p-1} \equiv 1\,(Mp)$$

слѣдовательно:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,(Mp)$$

а для этого необходимо, чтобы $\frac{p-1}{2}$ было число четное $2n$, слѣдовательно:

$$p=4n+1$$

Итакъ дѣлителями формы x^2+a^2 могутъ быть только числа формы $4n+1$.

§ 120. Теперь легко показать, что форма $4n+1$ содержитъ безчисленное число простыхъ чиселъ.

Изъ предъидущаго предложенія видно, что простые нечетные дѣлители выраженія x^2+1 имѣютъ форму $4n+1$. Если положимъ, что простыхъ чиселъ формы $4n+1$ есть число конечное

$$p_1 \quad , \quad p_2 \quad , \quad p_3 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad , \quad p_5 \tag{54}$$

то, полагая

$$x = p_1 p_2 \ . \ . \ . \ p_5 = a$$

видимъ, что a^2+1 должно дѣлиться на одно изъ чиселъ ряда (54), что нелѣпо.

§ 121. *Предложеніе.* Простые дѣлители выраженія x^4+a^4, полагая, что a не дѣлится на p, имѣютъ форму $p=8n+1$.

Доказательство. Если p есть дѣлитель выраженія x^4+a^4, то мы имѣемъ:

$$x^4+a^4 \equiv 0(Mp) \quad \text{или} \quad x^4 \equiv -a^4(Mp)$$

Возвышая обѣ части этого сравненія въ $\frac{p-1}{4}$ найдемъ:

$$x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} a^{p-1}(Mp)$$

замѣчая, что по предложенію Ферма мы имѣемъ

$$x^{p-1} \equiv 1(Mp) \quad , \quad a^{p-1} \equiv 1(Mp)$$

найдемъ

$$1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}}(Mp)$$

что тогда только возможно, когда число $\frac{p-1}{4}$ есть четное, т. е. когда

$$\frac{p-1}{4} = 2n$$

откуда

$$p = 8n+1$$

Точно также легко показать, что дѣлители выраженія x^8+a^8 будутъ имѣть форму $16n+1$ и вообще будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Дѣлители выраженія

$$x^{2^n}+a^{2^n}$$

полагая, что они взаимно-простые съ a, будутъ имѣть форму

$$2^{n+1}.k+1 \qquad (55)$$

Откуда слѣдуетъ, какъ выше, что есть безчисленное множество простыхъ чиселъ формы (55).

Въ письмѣ къ Паскалю Ферма говоритъ относительно числа $2^{2^n}+1$, что числа, заключающіяся въ этой формулѣ, всѣ простыя.

„C'est une vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très-mal aisée, et je vous avoue que je n'ai pu encore la trauver pleinement; je ne vous la proposerais pas pour la chercher si j'en étais venu à bout".

Такое мнѣніе знаменитаго французскаго геометра, который много занимался теоріей чиселъ, но когда нѣтъ строгаго доказательства извѣстнаго предположенія, то отвѣчать за ея вѣрность нельзя.

Вотъ какъ Эйлеръ показалъ ложность предложенія Ферма.

Простые дѣлители числа

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1$$

какъ мы видѣли, должны имѣть форму

$$16n+1$$

Эти дѣлители суть

$$193\ ,\ 257\ ,\ 449\ ,\ 577\ ,\ 641\ ,\ \ldots$$

и легко повѣрить, что число

$$2^{32}+1=4294967297$$

дѣлится на 641. Частное 6700417 не дѣлящееся ни на одно число формы $16n+1$, заключающихся между 641 и $\sqrt{6700417}$, именно 769, 1153, 1217, 1409, 1601 есть число простое. И мы имѣемъ

$$2^{2^5}+1=641.6700417$$

Первушинъ и Лукасъ показали, что

$$2^{2^{12}}+1 \quad \text{и} \quad 2^{2^{23}}+1$$

числа составныя. Первое дѣлится на 114689, а второе — на 167772161. Оба эти числа имѣютъ форму $16n+1$.

Выше было показано, что простыхъ чиселъ безчисленное множество, но нѣтъ легкаго пріема съ помощью котораго можно бы было показать, что данное число простое, когда это число очень велико. Теорема Вильсона даетъ способъ удостовѣриться, что данное число простое, но она къ большимъ числамъ практически не приложима. И въ самомъ дѣлѣ, чтобы удостовѣриться есть-ли число p простое, надобно показать, что

$$1.2.3.4.5 \ldots . (p-1)+1$$

дѣлится на p, а это практически не выполнимо, если p очень большое число.

Намъ извѣстны два очень большія простыя числа. Эйлеръ показалъ, что

$$2^{31}-1=2147483647$$

есть простое число, а Первушинъ показалъ, что

$$2^{61}-1=2307843009213693951$$

есть простое число. Это самыя большія числа извѣстныя до настоящаго времени.

§ 122. Если будемъ составлять числа изъ суммы квадратовъ чиселъ, въ наименьшемъ числѣ, то найдемъ:

$$1=1^2\;,\;\; 2=1^2+1^2\;,\;\; 3=1^2+1^2+1^2\;,\;\; 4=2^2\;,\;\; 5=1^2+2^2,$$

$$6=1^2+1^2+2^2\;,\;\; 7=1^2+1^2+1^2+2^2\;,\;\; 8=2^2+2^2, \text{ и т. д.}$$

число квадратовъ, составляющихъ числа, какъ видимъ, не превосходитъ четырехъ.

Вотъ какъ Эйлеръ и Лагранжъ доказали вообще это предложеніе.

Предложеніе. Дѣлитель числа, состоящаго изъ суммы двухъ квадратовъ, есть сумма двухъ квадратовъ. Дѣлитель числа, состоящаго изъ суммы четырехъ квадратовъ, есть сумма четырехъ квадратовъ.

Доказательство. Вспомнимъ сначала, что произведеніе суммы четырехъ квадратовъ на сумму четырехъ квадратовъ есть сумма четырехъ квадратовъ, произведеніе суммы двухъ квадратовъ на сумму двухъ квадратовъ есть сумма двухъ квадратовъ (§ 66, пр. 2, 3). Послѣ этого замѣчанія положимъ:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=pp'$$

гдѣ $p \geq p'$.

Если возьмемъ:

$$(a-\alpha p)^2+(b-\beta p)^2+(c-\gamma c)^2+(d-\delta p)^2$$

то эта сумма дѣлится также на p. Если числа α, β, γ, δ опредѣлили такъ, чтобы

$$a_1=a-\alpha p \quad , b_1=b-\beta p \quad , c_1=c-\gamma p \quad , d_1=d-\delta p$$

были меньше $\frac{1}{2}p$, то сумма ихъ квадратовъ будетъ меньше $4\,.\,\frac{p^2}{4}=p^2$, а такъ какъ она имѣетъ форму pp'', то $p''<p$.

Пусть поэтому

$$a^2_1+b^2_1+c^2_1+d^2_1=pp'' \quad , \quad p''<p$$

откуда найдемъ, какъ выше

$$(a_1-\alpha p'')^2+(b_1-\beta p'')^2+(c_1-\gamma p'')^2+(d_1-\delta p'')^2=p''p'''$$

гдѣ α, β, γ, δ можно такъ опредѣлить, что $p'''<p''$.

Если перемножимъ сумму четырехъ квадратовъ, которая равна pp'', на сумму четырехъ квадратовъ, которая равна $p''p'''$, то будемъ имѣть произведеніе

$$pp''^2p'''$$

но ~~квадраты, составляющіе~~ произведеніе

$$(a^2_1+b^2_1+c^2_1+d^2_1)\{(a_1-\alpha p'')^2+(b_1-\beta p'')^2+(c_1-\gamma p'')^2+(d_1-\delta p'')^2\}$$

дѣлится на p''^2. Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$a^2_2+b^2_2+c^2_2+d^2_2=pp'''$$

гдѣ $p'''<p''$.

Продолжая подобнымъ образомъ, найдемъ:

$$A^2+B^2+C^2+D^2=p$$

т. е. число p есть сумма четырехъ квадратовъ. Если-бы въ этомъ доказательствѣ разсматривали сумму двухъ квадратовъ

$$a^2+b^2=pp'$$

то пришли-бы къ формулѣ

$$A^2+B^2=p$$

Надобно замѣтить, что сумму двухъ квадратовъ можно разсматривать какъ сумму четырехъ квадратовъ

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 0^2 + 0^2$$

§ 123. *Предложеніе.* Всякое простое число, имѣющее форму $4n + 1$. есть сумма двухъ квадратовъ.

Доказательство. Мы выше видѣли, что уравненіе

$$x^2 + a^2 = pk$$

или сравненіе

$$x^2 \equiv -a^2 (Mp)$$

только тогда возможно, когда простое число p имѣетъ форму $4n + 1$. Слѣдовательно, дѣлитель $p = 4n + 1$, сумма двухъ квадратовъ, долженъ быть самъ сумма двухъ квадратовъ, какъ выше было показано,

Примѣръ.

$$5 = 4.1 + 1 = 1^2 + 2^2 \quad , \quad 13 = 3.4 + 1 = 2^4 + 3^2 \quad , \quad 17 = 4.4 + 1^2 + 4^2$$

и т. д.

Слѣдствіе 1. Всякое составное число, не имѣющее простыхъ множителей формы $4n + 3$, есть сумма двухъ квадратовъ. Это слѣдуетъ изъ того, что

$$2 = 1^2 + 1^2 \quad , \quad \text{а} \quad p = 4n + 1 = a^2 + b^2$$

а умножая сумму двухъ квадратовъ на сумму двухъ квадратовъ, имѣемъ сумму двухъ квадратовъ.

§ 124. *Предложеніе.* Всякое простое число p формы $4n + 3$ дѣлитъ $x^2 + y^2 + 1$, а слѣдовательно есть сумма четырехъ квадратовъ.

Доказательство. Если-бы предложеніе не имѣло мѣста, то полагая $p = 4n + 3$, необходимо чтобы сравненіе:

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 (Mp)$$

не было возможно, а для этого (§ 113) необходимо:

$$\left(-(y^2 + 1)\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (Mp)$$

для всѣхъ значеній:

$$y = 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad p - 1$$

такъ какъ $y^2 + 1$ не есть кратное числа $p = 4n + 3$.

Число $\frac{p-1}{2}=q$ нечетное, сравненіе

$$y^{p-1}+qy^{p-3}+\ .\ .\ .\ .\ +qy^2\equiv 0(Mp)$$

удовлетворяется числомъ $y=0$, слѣдовательно необходимо чтобы сравненіе:

$$y^{p-3}+qy^{p-5}+\ .\ .\ .\ .\ +q\equiv 0(Mp)$$

удовлетворялось числами:

$$y=1\ \ ,\ \ 2\ \ ,\ \ 3\ \ ,\ \ .\ .\ .\ .\ ,\ \ p-1$$

что невозможно, такъ какъ y можетъ получить только $p-3$ значеній меньшихъ p. Слѣдовательно существуютъ значенія для y удовлетворяющія сравненію:

$$(-(y^2+1))^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(Mp)$$

откуда слѣдуетъ, что, давая y и x извѣстныя значенія, x^2+y^2+1 будетъ дѣлиться на $p=4n+3$.

Слѣдствіе 2. Всякое число есть сумма четныхъ квадратовъ.

Мы выше показали, что всякое простое число есть сумма четырехъ квадратовъ, а произведеніе такихъ чиселъ есть также сумма четырехъ квадратовъ (§ 66).

§ 125. Докажемъ еще одно замѣчательное предложеніе:

Предложеніе. Удовлетворить цѣлыми числами уравненію:

$$x^4+y^4=z^2$$

невозможно.

Доказательство. Можно положить числа x, y, z взаимно простыми. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы они имѣли общаго дѣлителя k, то положивъ $z=k^2$ этотъ дѣлитель сократится.

1. Числа x, y, z не могутъ быть всѣ нечетными, ибо первая часть уравненія была бы четная, а вторая нечетная, что невозможно.

2. Уравненіе $x^4+y^4=z^2$ невозможно если x, y, z числа нечетныя, а z четное. Въ этомъ случаѣ мы бы имѣли невозможное сравненіе:

$$2\equiv 0(M4)$$

3. Уравненіе $x^4+y^4=z^2$ невозможно, если одно изъ чиселъ, напримѣръ, x будетъ четное, а y и z числа нечетныя. Положимъ $x=2^n p$,

p число нечетное, то уравненіе (56) сдѣлается:

$$(2^n p)^4 + y^4 = z^2$$

Если этому уравненію дадимъ форму:

$$(2^{n-1} r)^4 + s^4 = t^2$$

а затѣмъ послѣдовательно приведемъ его къ формѣ:

$$v^4 + w^4 = u^2$$

гдѣ u, w, v числа нечетныя, то увидимъ невозможность удовлетворить данное уравненіе цѣлыми числами.

Изъ уравненія:

$$(2^n p)^4 + y^2 = z^2$$

мы имѣемъ:

$$(z + y^2)(z - y^2) = (2^n p)^4 = 2^{4n} p^4$$

Множители, $z + y^2$, $z - y^2$, коихъ сумма равна $2z$, а разность $2y^2$ могутъ имѣть общимъ множителемъ только число 2. Слѣдовательно можно положить:

$$z \pm y^2 = 2t^2 \quad , \quad z \mp y^2 = 2^{4n-1} u^4 \quad , \quad p = tn$$

откуда:

$$\pm y^2 = t^2 - 2^{4n-2} u^4$$

Изъ формы квадратовъ видимъ, что только верхній знакъ можетъ имѣть мѣсто т. е.:

$$y^2 = t^4 - 2^{4n-2} u^4 \quad \text{или} \quad 2^{4n-2} u^4 = t^4 - y^2$$

слѣдовательно:

$$t^2 \pm y = 2v^4 \quad , \quad t^2 \mp y = 2^{4n-3} z^4 \quad \text{и} \quad vz = u$$

складывая найдемъ:

$$t^2 = v^4 + 2^{4n-2} z^4 = v^4 + (2^{n-1} z)^4$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Такъ какъ уравненіе:

$$x^4 + y^4 = z^2$$

невозможно въ цѣлыхъ числахъ, то невозможно и уравненіе:

$$x^4 + y^4 = z^4 = (z^2)^2$$

По мнѣнію Ферма уравненіе:

$$x^m + y^m = z^m$$

если $m > 2$, невозможно. Это предложеніе извѣстно подъ именемъ *послѣдняго предложенія Ферма*. Оно доказано Куммеромъ для всѣхъ простыхъ чиселъ m, исключая, когда $m = 37$, 59, 67, для которыхъ остается еще доказать это предложеніе. Анализъ Куммера выходитъ изъ предѣловъ настоящаго курса, онъ основанъ на теоріи составныхъ чиселъ и эдіальныхъ множителей.

Чтоже касается до уравненія:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

то оно всегда возможно, такъ какъ мы всегда имѣемъ тождество:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

§ 126. *Рѣшеніе двучленнаго сравненія.* Убѣдившись, что сравненіе

$$x^2 \equiv D(Mp) \quad (1)$$

возможно (p есть простое число) и признакъ для этого есть

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(Mp)$$

или

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1$$

Остается найти его корни. Мы разсмотримъ два случая, когда простое число p имѣетъ форму $4n + 3$ и когда имѣетъ форму $4n + 1$.

Случай 1. $p = 4 + 3$.

Такъ какъ сравненіе возможно, то имѣемъ:

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(Mp)$$

или

$$D^{2n+1} \equiv 1(Mp)$$

помножая на D будемъ имѣть

$$D^{2n+2} \equiv D(Mp)$$

или

$$(D^{n+1})^2 \equiv D(Mp)$$

сравнивая съ (1) найдемъ, что

$$x = \pm D^{n+1}(Mp)$$

Случай 2. $p = 4n + 1$.

Въ этой формѣ содержатся двѣ формы:

$$p = 8k + 1 \quad \text{и} \quad p = 8k + 5$$

1. $p = 8k + 5$.

Такъ какъ сравненіе возможно, то

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(Mp)$$

или

$$D^{4n+2} \equiv 1(Mp)$$

откуда:

$$(D^{2k+1} + 1)(D^{2k+1} - 1) \equiv 0(Mp)$$

а это даетъ

$$D^{2k+1} - 1 = 0(Mp) \quad \text{или} \quad D^{2k+1} + 1 \equiv 0(Mp)$$

Въ первомъ случаѣ, помножая на D и сравнивая съ (1), найдемъ

$$x = \pm D^{k+1}(Mp)$$

а во второмъ случаѣ полагаемъ $u = D^{k+1}$ откуда:

$$u^2 \equiv D^{2k+2} \equiv -D(Mp)$$

и данное сравненіе сдѣлается:

$$x^2 + u^2 \equiv 0(Mp)$$

Но число p имѣетъ форму $4n + 1$, слѣдовательно есть сумма квадратовъ двухъ взаимно-простыхъ чиселъ (§ 123), слѣдовательно можно положить:

$$p = \alpha^2 + \beta^2$$

откуда:

$$(\alpha^2+\beta^2)(t^2+z^2) = (\alpha t = \beta z)^2 + (\alpha z - \beta t)^2 \equiv 0(Mp)$$

гдѣ t и z можно опредѣлить условіемъ:

$$\alpha z - \beta t = u$$

откуда очевидно, что данное сравненіе удовлетворяется выраженіемъ:

$$x \equiv \pm(\alpha t + \beta u) \, (Mp)$$

2. $p = 8n + 1$.

Въ этомъ случаѣ рѣшать сравненіе (1) возможно только ощупью, надобно вычислить рядъ членовъ:

$$p + D \quad , \quad 2p + D \quad , \quad 3p + D \, , \ldots \tag{2}$$

пока не найдемъ полный квадратъ. Это всегда случится, такъ какъ сравненіе возможно и такъ какъ искомый квадратъ меньше $\frac{1}{4}p^2$, то число членовъ ряда (2) до полнаго квадрата не превзойдетъ $\frac{1}{4}p$.

Изложенныя въ настоящей и предъидущей главѣ главныя свойства чиселъ достаточны для теоріи алгебраическаго рѣшенія уравненій.

ГЛАВА X.

Симметрическія функціи.

§ 127. *Симметрическою функціею* нѣсколькихъ количествъ называютъ такую, которая не измѣняется отъ перестановленія этихъ количествъ, напримѣръ:

$$x_1 + x_2 + x_3 \qquad x^n_1 + x^n_2 + x^n_3 \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
$$\frac{x^n_1 + x^n_2 + x^n_3}{x_1 + x_2 + x_3} \tag{1}$$

суть симметрическія функціи количествъ x_1, x_2, x_3.

§ 128. Коэфиціенты уравненія:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{2}$$

которое мы часто будемъ писать въ формѣ:

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r x^{n-r} = 0 \tag{3}$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ значенія r отъ 0 до n включительно,

суть самыя простыя симметрическія функціи его корней $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Въ самомъ дѣлѣ, намъ извѣстно, что:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (-1)^1 a_0 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots\ldots + x_{n-1} + x_n) = \Sigma\, x_1 \\
a_2 &= (-1)^2 a_0 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots\ldots\ldots + x_{n-1} x_n) = \Sigma\, x_1 x_2 \\
a_3 &= (-1)^3 a_0 (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_5 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) = \Sigma\, x_1 x_2 x_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4) \\
a_i &= (-1)^i a_0 (x_1 x_2 \ldots x_i + x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} + \ldots\ldots) = \Sigma\, x_1 x_2 \ldots x_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= (-1)^n a_0 (x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)
\end{aligned}
$$

гдѣ знакъ Σ распространяется на различныя соединенія n корней по одному, по два, по три и т. д.

129. Часто уравненіе (2) пишутъ въ однородной формѣ:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + a_n y^n = 0 \qquad (5)$$

или:

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r x^{n-r} y^r = 0 \qquad (5')$$

Для большей симметріи въ однородныхъ уравненіяхъ вмѣсто коэфиціентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a^n$ пишутъ съ биноміальными:

$$a_0 \qquad n a_1 \qquad \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 \qquad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a_3 \quad \ldots\ldots$$

и тогда его изображаютъ символомъ:

$$(a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,, \ldots a_n \between x\,, y)^n = 0 \qquad (10)$$

или

$$(0\,, n \between x\,, y)^n = 0 \qquad (10)$$

Если же коэфиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ не сопровождаются коэфиціентами бинома, какъ въ уравненіи (5), то его изображаютъ символомъ:

$$(a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,, \ldots a_n \between x\,, y)^n = 0 \qquad (11)$$

или

$$(0\,, n \between x\,, y)^n = 0 \qquad (11')$$

Такъ, напримѣръ:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = (a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 = 0$$

$$a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = (a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 = 0$$

$$a_0x_3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3 \between x, y)^3 = 0$$

$$a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3 \between x, y)^3 = 0$$

и т. д. Очевидно, что неоднородное уравненіе изобразится или символомъ:

$$(0, n \between x, 1)^n = 0 \tag{12}$$

или:

$$(0, n \between x, 1)^n = 0 \tag{12'}$$

смотря потому, сопровождаются-ли коэфиціенты a_0, a_1, a_2, . . a^n коэфиціентами бинома, или нѣтъ.

§ 130. Возвратимся теперь къ симметрическимъ функціямъ корней уравненія (2) и покажемъ, что всякую раціональную симметрическую функцію можно выразить раціонально въ функціи коэфиціентовъ уравненія, или, что тоже, въ функціи простѣйшихъ симметрическихъ функцій (4).

Чтобы показать это важное предложеніе, разсмотримъ составъ раціональной симметрической функціи. Дробная раціональная симметрическая функція есть частное двухъ цѣлыхъ раціональныхъ симметрическихъ функцій, слѣдовательно, надобно умѣть выражать въ коэфиціентахъ уравненія только цѣлыя раціональныя симметрическія функціи. Всякая цѣлая симметрическая функція, неоднородная, состоитъ изъ суммы нѣсколькихъ однородныхъ симметрическихъ функцій, слѣдовательно, надобно умѣть выражась въ коэфиціантахъ уравненія только однородныя симметрическія функціи. Наконецъ, однородная симметрическая функція можетъ содержать члены, въ которыхъ, хотя суммы показателей равны, но показатели не равны каждый каждому; въ этомъ случаѣ наша симметрическая функція будетъ состоять изъ суммы нѣсколькихъ симметрическихъ функцій одной степени, но различныхъ между собою, и которыя мы будемъ вычислять отдѣльно. Изъ всего сказаннаго видимъ, что вопросъ сводится на цѣлыя раціональныя однородныя симметрическія функціи, въ которыхъ показатели корней одни и тѣ же во всѣхъ членахъ. Такая функція будетъ извѣстна, если будемъ знать одинъ ея членъ и всѣ буквы, входящія въ него.

Такія симметрическія функціи мы будемъ называть *простыми* и раздѣлимъ на порядки. *Перваго порядка* мы будемъ называть тѣ, въ кото-

рыхъ каждый членъ содержитъ одну только букву; общій ихъ типъ есть:

$$x_1^m + x_2^m + x_3^m + \quad . \quad . \quad . \quad + x_n^m = \Sigma\, x_1^m \tag{13}$$

Функціями *втораго порядка* или *двойными* мы будемъ называть такія, въ которыхъ каждый членъ содержитъ двѣ буквы съ одними и тѣми же показателями въ каждомъ членѣ; общій ихъ типъ есть:

$$x^\alpha{}_1 x^\beta{}_2 + x^\alpha{}_1 x^\beta{}_3 + x^\alpha{}_1 x^\beta{}_4 + \ . \ . \ . + x^\alpha{}_{n-1} x^\beta{}_n + \ . \ . \ . = \Sigma\, x^\alpha{}_1 x^\beta{}_2 \tag{14}$$

Общій типъ симметрическихъ функцій *третьяго порядка* есть:

$$x^\alpha{}_1 x^\beta{}_2 x^\gamma{}_3 + x^\alpha{}_1 x^\beta{}_2 x^\gamma{}_4 + x^\alpha{}_1 x^\beta{}_2 x^\gamma{}_5 + \ . \ . + x^\alpha{}_{n-2} x^\beta{}_{n-1} x^\gamma{}_n + \ . \ . = \Sigma\, x^\alpha{}_1 x^\beta{}_2 x^\gamma{}_3 \tag{15}$$

и т. д.:

§ 131. Займемся симметрическими функціями перваго порядка и покажемъ, что онѣ выражаются раціонально въ коэфиціентахъ уравненія:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ . \ . \ . + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{16}$$

по (§ 38) имѣемъ:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \ . \ . \ . + (x - x_{n-1})(x - x_n) \tag{17}$$

Если возьмемъ производную обѣихъ частей (17), то найдемъ:

$$f'(x) = a_0 (x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) +$$
$$+ a_0 (x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + \ldots$$

раздѣляя $f'(x)$ на $f(x)$, получимъ:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \ . \ . \ . \ . + \frac{1}{x - x_n} \tag{18}$$

откуда:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \frac{f(x)}{x - x_3} + \ . \ . \ . \ . + \frac{f(x)}{x - x_n} \tag{19}$$

замѣчая что:

$$f(x_1) = 0 \quad , \quad f(x_2) = 0 \quad , \quad f(x_3) = 0 \quad , \ . \ . \ . \ . \ . \ , \quad f(x_n) = 0$$

выраженіе (20) [corrected by hand to 19] можно написать въ формѣ:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} + \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} + \ . \ . \ . \ . + \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \tag{20}$$

откуда легко видѣть, что каждый членъ второй части есть цѣлый полиномъ. Въ самомъ дѣлѣ, членъ, напримѣръ:

$$\frac{f(x)-f(x_r)}{x-x_r}=\frac{a_0(x^n-x^n_r)+a_1(x_r^{n-1}-x_r^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(x-x_r)}{x-x_r} \qquad (21)$$

по раздѣленіи даетъ:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x-x_r} &= a_0(x^{n-1}+x^{n-2}x_r+x^{n-3}x_r+x^{n-4}x_r+\ldots\ldots+x_r^{n-1})\\ &+a_1(x^{n-2}+x^{n-3}x_r+x^{n-4}x_r+x^{n-5}x_r+\ldots\ldots+x_r^{n-2})\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (23)\\ &+a_{n-3}(x^2+xx_2+x^2_2)\\ &+a_{n-2}(x+x_r)\\ &+a_{n-1}\end{aligned}$$

Давая въ этомъ уравненіи индексу r всѣ значенія отъ 1 до n включительно и складывая результаты, получимъ:

$$\begin{aligned}f'(x)&=a_0nx^{n-1}+(a_0s_1+na_1)x^{n-2}+(a_0s_2+a_1s_1+na_2)x^{n-3}+\ldots+\\ &+(a_0s_t+a_1s_{t-1}+a_2s_{t-2}+\ldots+a_{t-1}s_1+na_t)x^{n-t-1}+\ldots\end{aligned} \qquad (23)$$

гдѣ символъ s_t означаетъ:

$$s_t=x^t_1+x^t_2+x^t_3+\ldots\ldots+x^t_n=\Sigma x^t_1$$

Приравнивая коэфиціенты выраженія (24) коэфиціентамъ производной:

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots+(n-t)a_{n-t}x^{n-t-1}+\ldots \qquad (24)$$

найдемъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned}&a_0s_1+na_1=(n-1)a_1\\ &a_0s_2+a_1s_1+na_2=(n-2)a_2\\ &a_0s_3+a_1s_2+a_2s_1+na_3=(n-3)a_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (26)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_0s_t+a_1s_{t-1}+a_2s_{t-2}+\ldots+na_t=(n-t)a_t\end{aligned}$$

которыя можно написать въ формѣ:

$$\begin{aligned}
&a_0 s_1 + a_1 = 0 \\
&a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\
&a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \qquad\qquad (26') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_0 s_t + a_1 s_{t-1} + a_2 s_{t-2} + \ldots + t a_t = 0
\end{aligned}$$

или въ формѣ:

$$\begin{aligned}
&a_0 s_1 + 0 s_2 + 0 s_3 + 0 s_4 + \ldots\ldots + 0 s_t = -\,a_1 \\
&a_1 s_1 + a_0 s_2 + 0 s_3 + 0 s_4 + \ldots\ldots + 0 s_t = -\,2a_2 \\
&a_2 s_1 + a_1 s_2 + a_0 s_3 + 0 s_4 + \ldots\ldots + 0 s_t = -\,3a_3 \\
&a_3 s_1 + a_2 s_2 + a_1 s_3 + a_0 s_4 + \ldots\ldots + 0 s_t = -\,4a_4 \qquad (27) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_t s_1 + a_{t-1} s_2 + a_{t-2} s_3 + a_{t-3} s_4 + \ldots + a_0 s_t = -\,t a_t
\end{aligned}$$

Изъ теоріи опредѣлителей извѣстно, что если всѣ элементы опредѣлителя, лежащіе по одну сторону діагонали равны нулю, то опредѣлитель обращается въ главный членъ (§ 62, свойство 5, слѣдствіе 3), т. е.:

$$\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{t-1} & a_{t-2} & a_{t-3} & \ldots & \ldots & a_0
\end{vmatrix} = a_0^t$$

а потому изъ выраженія (27) найдемъ:

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t
\begin{vmatrix}
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
3a_3 & a_2 & a_2 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
t a_t & a_{t-1} & a_{t-2} & a_{t-3} & \ldots & \ldots & a_1
\end{vmatrix} \qquad (28)$$

Откуда и видимъ, что s_t есть раціональная функція коэфиціентовъ уравненія, которая будетъ цѣлая, если $a_0 = 1$.

Давая числу t значенія: 1, 2, 3, , . . . , найдемъ слѣдующія выраженія для суммы квадратовъ, кубовъ и т. д. корней урнвненія (16)

$$s_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$s_2 = \frac{1}{a_0^2}\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 2a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0^2}(a^2_1 - 2a_0a_2)$$

$$s_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 \\ 3a_3 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0^3}(a^3_1 - 3a_0a_1a_2 + 3a_0^2a_3)$$

$$s_4 = \frac{1}{a_0^4}\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0^4}(a^4_1 - 4a_0a^2_1a_2 + 4a_0^2a_1a_3 + 2a_0^2a^2_2 - 4a_0^3a_4) \qquad (29)$$

и т. д.

Что-же касается до s_0, то оно равно n, т. е.:

$$s_0 = n$$

§ 132. Эти формулы даютъ суммы s_t не выше n—1-й степени, какъ видно изъ тождества (24), а чтобы получить суммы корней высшихъ степеней, начиная съ n-й, возьмемъ уравненія:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \quad . \; . \; . \quad + a_{n-1}x + a_n = 0 \\
x\,f(x) &= a_0x^{n+1} + a_1x^n + a_2x^{n-1} \quad . \; . \; . \quad + a_{n-1}x^2 + a_nx = 0 \\
x^2f(x) &= a_0x^{n+2} + a_1x^{n+1} + a_2x^n \quad . \; . \; . \quad + a_{n-1}x^3 + a_nx^2 = 0 \qquad (30) \\
&. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
x^mf(x) &= a_0x^{n+m} + a_1x^{n+m-1} + a_2x^{n+m-2} \ldots + a_{n-1}x^{m+1} + a_nx^m = 0
\end{aligned}$$

и подставимъ въ каждое изъ нихъ послѣдовательно всѣ корни x_1, x_2,

$x_3, \ldots, x^n$ и каждую группу сложимъ, то въ результатѣ получимъ:

$$
\begin{array}{l}
a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \;\ldots\; + a_{n-1} s_1 + n a_n = 0 \\
a_0 s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \;\ldots\; + a_{n-1} s_2 + a_n s_1 = 0 \\
a_0 s_{n+1} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \;\ldots\; + a_{n-1} s_3 + a_n s_2 = 0 \qquad (31) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 s_{n+m} + a_1 s_{n+m-1} + a_2 s_{n+m-2} + \ldots + a_{n+1} s_{m+1} + a_n s_m = 0
\end{array}
$$

Такъ какъ изъ уравненія (29) всѣ суммы, до s_n исключительно, извѣстны, то изъ настоящихъ уравненій можно послѣдовательно опредѣлить суммы:

$$s_n \;,\; s_{n+1} \;,\; s_{n+2} \;,\; \ldots \;,\; s_{n+m} \;,\; \ldots$$

Чтобы опредѣлить суммы отрицательныхъ степеней корней уравненія $f(x)=0$, надобно его преобразовать въ другое, коего-бы корни были обратные корнямъ даннаго (§ 55), а это дѣлается подстановленіемъ вмѣсто x его обратнаго значенія $\frac{1}{x}$, но такое подстановленіе измѣняетъ коэфиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ на $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0$; слѣдовательно, если въ уравненіяхъ (29) сдѣлаемъ такое замѣщеніе, то найдемъ суммы отрицательныхъ степеней корней даннаго уравненія:

$$s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$s_2 = \frac{1}{a_n^2}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ 2a_{n+1} & a_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_n^2}\left(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n\right)$$

$$(32)$$

$$s_3 = -\frac{1}{a_n^3}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 3a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_n^3}\left(a_{n-1}^3 - 3a_{n-2}a_{n-1}a_n + 3a_{n-3}a_n^2\right)$$

и т. д. до s_n исключительно.

Высшія отрицательныя степени дадутъ уравненія:

$$
\begin{array}{l}
a_n s_n + a_{n-1} s_{n+1} + a_{n-2} s_{n+2} + \;\ldots\; + a_1 s_1 + n a_0 = 0 \\
a_n s_{n-1} + a_{n-1} s_n + a_{n-2} s_{n+1} + \;\ldots\; + a_1 s_2 + a_0 s_1 = 0 \qquad (33)
\end{array}
$$

и т. д.

Замѣтимъ, что въ выраженіяхъ (29) для s_t сумма индексовъ въ каждомъ членѣ есть величина постоянная и равна всегда степени корней — эта сумма называется *вѣсомъ* симметрической функціи s_t. Коэфиціенты a_r и a_{n-r} называются *дополнительными*.

§ 133. Уравненія (27) предъидущаго параграфа можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{aligned}
&s_1a_0+\ a_1\ +0a_2+0a_3+0a_4+\ldots\ldots+0a_t=0\\
&s_2a_0+s_1a_1+2a_2+0a_3+0a_4+\ldots\ldots+0a_t=0\\
&s_3a_0+s_2a_1+s_1a_2+3a_3+0a_4+\ldots\ldots+0a_t=0\\
&s_4a_0+s_3a_1+s_2a_2+s_1a_3+4a_4+\ldots\ldots+0a_t=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_ta_0+s_{t-1}a_1+s_{t-2}a_2+s_{t-3}a_3+s_{t-4}a_4+\ldots+ta_t=0
\end{aligned} \tag{34}$$

изъ которыхъ найдемъ:

$$a_t=(-1)^t.\frac{a_0}{1.2.3.4\ldots\ldots t}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0\ldots\ldots 0\\ s_2 & s_1 & 2 & 0\ldots\ldots 0\\ s_3 & s_2 & s_1 & 3\ldots\ldots 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots t-1\\ s_t & s_{t-1} & s_{t-2} & s_{t-3}\ldots s_1 \end{vmatrix} \tag{35}$$

Эта формула даетъ коэфиціенты уравненія въ функціи суммъ одинаковыхъ степеней его корней. Давая послѣдовательно индексу t значенія 1, 2, 3, ..., найдемъ:

$$\begin{aligned}
a_1&=-\frac{s_1}{a_0}\\
a_2&=\frac{a_0}{1.2}\begin{vmatrix} s_1 & 1\\ s_2 & s_1\end{vmatrix}=\frac{a_0}{1.2}(s^2_1-s_2)\\
a_3&=-\frac{a_0}{1.2.3}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0\\ s_2 & s_1 & 2\\ s_3 & s_2 & s_1\end{vmatrix}=-\frac{a_0}{1.2.3}(s^3_1-3s_1s_2+2s_3)
\end{aligned} \tag{36}$$

$$a_4=\frac{a_0}{1.2.3.4}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0\\ s_2 & s_1 & 2 & 0\\ s_3 & s_2 & s_1 & 3\\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1\end{vmatrix}=\frac{a_0}{1.2.3.4}(s^4_1-6s^2_1s_2+8s_1s_3+3s^2_2-6s_4)$$

и т. д.

§ 134. Перейдемъ теперь къ симметрическимъ функціямъ втораго, третьяго и т. д. порядковъ.

Если умножимъ обѣ части уравненія:

$$s_{t_1} = \Sigma x_1^{t_1}$$

на s_{t_2}, то получимъ:

$$s_{t_1} s_{t_2} = s_{t_2} \Sigma x_1^{t_1} = \Sigma x_1^{t_1+t_2} + \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2}$$

или:

$$s_{t_1} s_{t_2} = s_{t_2+t_1} + \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2}$$

откуда:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} = s_{t_1} s_{t_2} - s_{t_1+t_2} \qquad (37)$$

Если $t_1 = t_2$, то предъидущая формула измѣнится въ слѣдующую:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} = \frac{1}{2}\left(s_{t_1}^2 - s_{2t}\right)$$

ибо въ суммѣ $\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2}$ будетъ по два равныхъ члена $x_1^{t_1} x_2^{t_2} = x_2^{t_1} x_1^{t_1}$ и т. д. Умножая обѣ части уравненія (37) на s_{t_3} будемъ имѣть:

$$s_{t_3} \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} = s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} - s_{t_1+t_2} s_{t_3}$$

Но:

$$s_{t_3} \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} = \Sigma x^{t_1+t_3} x_2^{t_2} + \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2+t_3} + \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3}$$

Слѣдовательно:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} + \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_1+t_3} + \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2+t_3} = s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} - s_{t_1+t_2} s_{t_3}$$

откуда, соображаясь съ (37), найдемъ:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} = s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} - s_{t_1+t_2} s_{t_3} - s_{t_1+t_3} s_{t_2} - s_{t_2+t_3} s_{t_1} + 2 s_{t_1+t_2+t_3} \qquad (38)$$

Если $t_1 = t_2 = t_3$, то послѣднюю форму надобно измѣнить въ слѣдующую:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} = \frac{1}{1.2.3}\left(s_{t_1}^3 - 3 s_{2t_1} s_{t_1} + 2 s_{3t_1}\right) \qquad (40)$$

ибо въ суммѣ $\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3}$ будетъ по шести членовъ равныхъ. Легко видѣть также, что если $t_1 = t_2$, то:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_1} x_3^{t_3} = \frac{1}{2}\left(s_{t_1}^2 s_{t_3} - s_{2t_1} s_{t_3} - 2 s_{t_1+t_3} s_{t_1} + 2 s_{2t_1+t_3}\right) \qquad (40)$$

Помножая обѣ части уравненія (38) на s_{t_4} и соображаясь съ формулами (37) и (38), найдемъ:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} x_4^{t_4} = s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} s_{t_4} - \left(s_{t_1+t_2} s_{t_3} s_{t_4} + s_{t_1+t_3} s_{t_2} s_{t_4} + s_{t_1+t_4} s_{t_2} s_{t_3} + \right.$$

$$\left. + s_{t_2+t_3} s_{t_1} s_{t_4} + s_{t_2+t_4} s_{t_1} s_{t_3} + s_{t_3+t_4} s_{t_1} s_{t_2}\right) + 2\left(s_{t_1} s_{t_2+t_3+t_4} + s_{t_2} s_{t_1+t_3+t_4} + \right.$$

$$\left. + s_{t_3} s_{t_1+t_2+t_4} + s_{t_4} s_{t_1+t_2+t_3}\right) + \left(s_{t_1+t_2} s_{t_3+t_4} + s_{t_1+t_3} s_{t_2+t_4} + s_{t_1+t_4} s_{t_2+t_3}\right) -$$

$$- 1.2.3. s_{t_1+t_2+t_3+t_4}$$

Легко видѣть во что измѣнится эта формула если $t_1 = t_2$ или $t_1 = t_2 = t_3$ или $t_1 = t_2 = t_3 = t_4$.

Общей формулы для выраженія функціи:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots . x_m^{t_m}$$

въ функціи суммъ s_{t_1}, s_{t_2}, s_{t_3}, . . . , $s_{t_1+t_2}$, . . . не приведемъ здѣсь по ея сложности, замѣтимъ только, что мы вообще имѣемъ:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots x_m^{t_m} = s_n \Sigma x_1^{t_1} \ldots x_{m-1}^{t_{m-1}} - \Sigma x_1^{t_1+m} x_2^{t_2} \ldots x_{m-1}^{t_{m-1}} -$$

$$- \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2+t_m} x_3^{t_3} \ldots x_{m-1}^{t_{m-1}} - \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3+m} \ldots x_{m-1}^{t_{m-1}} \ldots . -$$

$$- \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_{m-2}^{t_{m-2}} x_{m-1}^{t_{m-1}+t_m}$$

откуда видимъ, что если извѣстна симметрическая функція $n - 1$-го порядка въ функціи суммъ корней, то будетъ извѣстна и симметрическая функція n-го порядка. Такъ какъ симметрическія функціи s_t суть цѣлыя и раціональныя функціи коэфиціентовъ уравненія, когда $a_0 = 1$ то изъ предъидущаго видимъ, что и функціи:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots . x_m^{t_m}$$

суть также цѣлыя и раціональныя функціи коэфиціентовъ уравненія и съ помощью предъидущихъ формулъ ихъ можно вычислить, но это вычисленіе сложно, и побудило математиковъ искать другихъ простѣйшихъ пріемовъ для него, которые мы и изложимъ въ слѣдующихъ параграфахъ.

§ 135. Мы показали выше, что

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots .. x_m^{t_m} \qquad (41)$$

есть цѣлая раціональная функція коэфиціентовъ уравненія, поэтому мы можемъ положить:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots\ldots = \Sigma C_r a_1^{h_1} a_2^{h_2} a_3^{h_3} \ldots \qquad (42)$$

гдѣ знакъ суммы Σ распространяется на различныя значенія показателей h_1, h_2, $h_3 \ldots$ Мы покажемъ теперь, что всѣ эти значенія должны удовлетворять уравненію:

$$h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots \qquad (43)$$

Замѣтимъ для этого, что каждый изъ коэфиціентовъ уравненія есть линейная функція каждаго изъ корней уравненія, слѣдовательно форма какого нибудь коэфиціента a_i будетъ:

$$a_i = A_i x_j + B_i$$

гдѣ A_i и B_i суть функціи остальныхъ корней уравненія. Замѣтивъ это, уравненіе (42) можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots = \Sigma C_r (A_1 x_2 + B_1)^{h_1} (A_2 x_2 + B_2)^{h_2} \ldots (A_m x_3 + B_m)^{h_m} \qquad (44)$$

сравнивая обѣ части этого тождества, найдемъ что сумма $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_m$ показателей должна быть равна наибольшему изъ показателей t_1, t_2, t_3, ... Но $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots$ есть степень функціи (41), разсматривая ее какъ функцію коэфиціентовъ, слѣдовательно степень функціи:

$$\Sigma C_r a_1^{h_1} a_2^{h_2} a_3^{h_3} \ldots\ldots$$

будетъ равна наибольшему изъ показателей t_1, t_2, t_3, ..., который означая чрезъ t, будемъ имѣть:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots \overline{\overline{<}}\, t \qquad (45)$$

Измѣнимъ теперь корни x_1, x_2, x_3, ... въ λx_1, λx_2, λx_3, ..., то коэфиціенты уравненія, какъ извѣстно (§ 49), сдѣлаются λa_1, $\lambda^2 a_2$, $\lambda^3 a_3$, ... подставляя эти величины въ уравненіе (42) будемъ имѣть:

$$\lambda^{t_1+t_2+t_3+\cdots} \Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots = \lambda^{h_1+2h_2+3h_3+\cdots+nh_n} \Sigma C_r a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n} \qquad (46)$$

Но уравненіе (42) должно существовать, слѣдовательно мы должны имѣть:

$$h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots\ldots + nh_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots \qquad (47)$$

Выраженіе $h_1+2h_2+3h_3+\ldots+nh_n$ называется *вѣсомъ* функціи:

$$\Sigma C_r a_1^{h_1} a_2^{h_2} a_3^{h_3} \ldots$$

а функція называется *изобарическою*.

Если въ уравненіи (42) возстановимъ коэфиціентъ a_0, который мы до сихъ поръ полагали равнымъ единицѣ, $a_0=1$, то будемъ имѣть:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \ldots\ldots = \frac{1}{a_0^t} \Sigma C_r a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} a_3^{h_3} \ldots \tag{48}$$

при условіяхъ (47) и

$$h_0+h_1+h_2+h_3+\ldots\ldots+h_n=t \tag{49}$$

Изъ уравненія (48) мы видимъ, что симметрическая функція n-го порядка есть цѣлая $\left(\text{не обращая вниманія на множитель } \frac{1}{a_0{}^t}\right)$ раціональная, однородная, функція t-й степени въ коэфиціентахъ уравненія.

И такъ съ помощью уравненій (47) и 49) мы можемъ найти форму функціи:

$$\Sigma C_r a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} a_3^{h_3} \ldots\ldots$$

надобно только распространить знакъ суммы Σ на всѣ значенія h_0, h_1, h_2, $h_3,\ldots$, удовлетворяющія уравненіямъ (47) и (49).

Примѣръ 1. Пусть данная симметрическая функція будетъ:

$$\Sigma x_1^2 x_2$$

Вѣсъ этой функціи есть 3, а наибольшій показатель 2, слѣдовательно h_0, h_1, h_2, h_3, . . . , должны удовлетворять уравненіямъ:

$$h_1+2h_2+3h_3=3$$

$$h_0+h_1+h_2+h_3=2$$

Изъ коихъ найдемъ:

$$h_0=0 \quad , \quad h_1=1 \quad , \quad h_2=1 \quad , \quad h_3=0$$

$$h_0=1 \quad , \quad h_1=0 \quad , \quad h_2=0 \quad , \quad h_3=1$$

слѣдовательно наша функція будетъ:

$$a_0^2 \Sigma x_1^2 x_2 = A a_1 a_2 + B a_0 a_3$$

A и B суть неизвѣстные коэфиціенты.

Примѣръ 2. Пусть еще будетъ дана функція:

$$\Sigma x^2{}_1 x_2 x_3$$

Вѣсъ этой функціи есть 4, а наибольшій показатель 2, слѣдовательно h_0, h_1, h_2, ..., должны удовлетворять слѣдующимъ уравненіямъ:

$$h_1 + 2h_2 + 3h_3 + 4h_4 = 4$$

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 2$$

изъ которыхъ найдемъ:

$$h_0 = 0 \quad , \quad h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = 0 \quad , \quad h_3 = 1 \quad , \quad h_4 = 0$$

$$h_0 = 0 \quad , \quad h_1 = 0 \quad , \quad h_2 = 2 \quad , \quad h_3 = 0 \quad , \quad h_4 = 0$$

$$h_0 = 1 \quad , \quad h_1 = 0 \quad , \quad h_2 = 0 \quad , \quad h_3 = 0 \quad , \quad h_4 = 1$$

слѣдовательно:

$$a_0^2 \Sigma x^2{}_1 x_2 x_3 = Aa_1 a_3 + Ba^2{}_2 + Ca_0 a_4$$

A, B и C суть неизвѣстные коэфиціенты.

Примѣръ 3. Точно также найдемъ:

$$a_0^3 \Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 = Aa_0^2 a^5 + Ba_0 a_1 a_4 + Ca_0 a_2 a_3 + Da_1 a^2{}_2 + Ea^2{}_1 a_3$$

Вообще, чтобы найти форму извѣстной симметрической функціи, вѣсъ коей есть n, а наибольшій показатель m, надобно рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ два уравненія:

$$h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + nh_n = n$$

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \; h_n = m$$

число такихъ рѣшеній и даетъ число членовъ въ предложенной симметрической функціи.

§ 136. Остается опредѣлить коэфиціенты A, B, C, ... Покажемъ это на частныхъ примѣрахъ. Возьмемъ пр. 1 тамъ мы нашли:

$$a_0^2 \Sigma x^2{}_1 x_2 = Aa_1 a_2 + Ba_0 a_3 \qquad (50)$$

Чтобы опредѣлить A и B возьмемъ два совершенно произвольныя уравненія, коихъ корни были-бы извѣстны, а слѣдовательно и числовая вели-

чина симметрической функціи ихъ корней, возьмемъ, напримѣръ, весьма простыя уравненія:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Въ первомъ уравненіи:

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = -2 \ , \ a_2 = 1 \ , \ a_3 = 0 \ , \ x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ \Sigma x^2_1 x_2 = 2$$

слѣдовательно:

$$Aa_1 a_2 + Ba_0 a_3 = -2A = 2 \quad , \quad A = -1$$

Во второмъ уравненіи:

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = -3 \ , \ a_2 = +3 \ , \ a_3 = -1 \ , \ x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = 1 \ , \ \Sigma x^2_1 x_2 = 6$$

откуда:

$$Aa_1 a_2 + Ba_0 a_3 = -9A - B = 6 \quad , \quad B = 3$$

слѣдовательно:

$$a_0^2 \Sigma x^2_1 x_2 = 3a_0 a_3 - a_1 a_2 \tag{51}$$

Возьмемъ пр. 2, тамъ мы нашли:

$$a_0^2 \Sigma x^2 x_2 x_3 = Aa_1 a_3 + Ba^2_2 + Ca_0 a_1 \tag{52}$$

Для опредѣленія A, B и C возьмемъ три уравненія:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = -3 \ , \ a_2 = 3 \ , \ a_3 = -1$$

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = 1$$

$$\Sigma x^2_1 x_2 x_3 = 3$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 1 \ , \ a_2 = -1 \ , \ a_3 = -1$$

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -1 \ , \ x_3 = -1$$

$$\Sigma x^2_1 x_2 x_3 = 1$$

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = -4 \ , \ a_2 = 6 \ , \ a_3 = -4 \ , \ a_4 = 1$$

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = 1 \ , \ x_4 = 1$$

$$\Sigma x^2_1 x_2 x_3 = 12$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (52), найдемъ:

$$A+3B=-1 \quad , \quad -A+B=-1 \quad , \quad 16A-36B+C=12$$

откуда:

$$A=1 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=-4$$

Слѣдовательно:

$$a_0^2 \Sigma x^2{}_1 x_2 x_3 = a_1 a_3 - 4a_0 a_4 \qquad (54)$$

Возьмемъ еще примѣръ 3.

$$a_0^3 \Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 = Aa_0{}^2 a_5 + Ba_0 a_1 a_4 + Ca_0 a_2 a_3 + Da_1 a^2{}_2 + Ea^2{}_1 a_3 \qquad (54)$$

Для опредѣленія коэфиціентовъ A, B, C, D, E возьмемъ пять уравненій:

$$x^2-2x+1=0$$

$$a_0=1 \quad , \quad a_1=-2 \quad , \quad a_3=1 \quad , \quad a_4=0 \quad , \quad a_5=0$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1$$

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 = 2$$

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

$$a_0=1 \quad , \quad a_1=-3 \quad , \quad a_2=3 \quad , \quad a_3=-1 \quad , \quad a_4=0 \quad , \quad a_5=0$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1 \quad , \quad x_3=1$$

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 = 6$$

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$$

$$a_0=1 \quad , \quad a_1=-4 \quad , \quad a_2=6 \quad , \quad a_3=-4 \quad , \quad a_4=1 \quad , \quad a_5=0$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1 \quad , \quad x_3=1 \quad , \quad x_4=1$$

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 = 12$$

$$x^5-5x_4+10x^3-10x^2+5x-1=0$$

$$a_0=1 \quad , \quad a_1=-5 \quad , \quad a_2=10 \quad , \quad a_3=-10 \quad , \quad a_4=5 \quad , \quad a_5=-1$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1 \quad , \quad x_3=1 \quad , \quad x_4=1 \quad , \quad x_5=1$$

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 = 20$$

$$x^3-x^2-x+1=0$$

$$a_0=1 \quad , \quad a_1=-1 \quad . \quad a_2=-1 \quad , \quad a_3=1 \quad , \quad a_4=0 \quad , \quad a_5=0$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1 \quad , \quad x_3=-1$$

$$\Sigma x^3{}_1 x_2 = 2$$

Подставляя эти величины въ (54) уравненіе, найдемъ слѣдующія уравненія:

$$2D=-2 \quad , \quad -C-D+E=2 \quad , \quad -3C-27D-9E=6$$

$$-4B-24C-144D-64E=12 \quad , \quad -A-25B-100C-500D-250E=20$$

изъ которыхъ

$$D=-1 \quad , \quad E=+2 \quad , \quad C=+1 \quad , \quad B=-5 \quad , \quad A=+5$$

Слѣдовательно:

$$a_0^3 \Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 = 5a_0{}^2 a_5 - 5a_0 a_1 a_4 + a_0 a_2 a_3 - a_1 a^2{}_2 + 2a^2{}_1 a_3$$

§ 137. Коэфиціенты A, B, C, D, . . . можно вычислить вообще съ помощью слѣдующаго предложенія:

Предложеніе: Всякая симметрическая функція вида:

$$\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} x_3^{t_3} \dots\dots$$

которую будемъ означать всегда черезъ φ удовлетворяетъ слѣдующему уравненію въ частныхъ дифференціалахъ:

$$a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_r} + a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_{r+1}} + a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_{r+2}} + \dots + a_{n-r} \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} + r\frac{\partial\varphi}{\partial s_r} = 0 \qquad (55)$$

Доказательство. Разсматривая φ какъ функцію коэфиціентовъ a_1, a_2, $a_3, \dots a_n$, а эти коэфиціенты какъ функціи суммъ s_1, s_2, $s_3, \dots$ (§ 133), будемъ имѣть:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_r} = \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial s_r} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial s_r} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial s_r} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial s_r} \qquad (56)$$

Покажемъ теперь, что мы вообще имѣемъ:

$$\frac{\partial a_i}{\partial s_r} = 0 \qquad \text{если } i > r$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial s_r} = -\frac{1}{r}a \qquad \text{если } i = r \qquad (57)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial s_r} = -\frac{1}{r}a_{i-r} \quad \text{если } i < r$$

Для этого преобразуемъ уравненіе:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)$$

подстановленіемъ $x=\frac{1}{u}$, оно сдѣлается:

$$a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+\ldots+a_nu^n=a_0(1-x_1u)(1-x_2u)\ldots(1-x_nu)$$

или:

$$1+\frac{a_1}{a_0}u+\frac{a_2}{a_0}u^2+\frac{a_3}{a_0}u^3+\ldots+\frac{a_n}{a_0}u^n=(1-x_1u)(1-x_2u)\ldots\ldots(1-x_nu)$$

Возьмемъ неперовскій логариѳмъ обѣихъ частей, то найдемъ:

$$\log\left(1+\frac{a_1}{a_0}u+\frac{a_2}{a_0}u^2+\frac{a_3}{a_0}u^3+\ldots+\frac{a_n}{a_0}u^n\right)=$$

$$=\log(1-x_1u)+\log(1-x_2u)+\ldots+\log(1-x_nu)$$

откуда:

$$\log\left(1+\frac{a_1}{a_0}u+\frac{a_2}{a_0}u^2+\ldots+\frac{a_n}{a_0}u^n\right)=-s_1u-\frac{1}{2}s_2u^2-\frac{1}{3}s_3u^3-\ldots-\frac{1}{2}s_ru^r-\ldots$$

возьмемъ производную общихъ частей этого тождества по s_r:

$$\frac{\partial}{\partial s_r}\left(1+\frac{a_1}{a_0}u+\frac{a_2}{a_0}u^2+\ldots+\frac{a_n}{a_0}u^n\right)=-\left(1+\frac{a_1}{a_0}u+\frac{a_2}{a_0}u^2+\ldots+\frac{a_n}{a_0}u^n\right)\frac{u^2}{r}$$

сравнивая коэфиціенты у различныхъ степеней u легко видѣть, что:

$$\frac{\partial a_r}{\partial s_i}=0 \qquad \text{если } i>r$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial s_i}=-\frac{a_0}{i} \qquad \text{если } i=r$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial s_i}=-\frac{a_{2-i}}{i} \qquad \text{если } i<r$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (56) найдемъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}a_0-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{r+1}}a_1-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{r+2}}a_2-\ldots-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}a_{n-r}$$

или:

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{r+1}} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{r+2}} + \ldots + a_{n-r} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} + r \frac{\partial \varphi}{\partial s_r} = 0 \tag{58}$$

что и требовалось доказать.

Приложимъ это уравненіе къ опредѣленію коэфиціентовъ A, B, C, но для простоты положимъ $a_0 = 1$.

Примѣръ 1. Возьмемъ симметрическую функцію (см. § 135, пр. 1):

$$\sum x^2_1 x_2$$

Мы нашли выше:

$$\varphi = A a_1 a_2 + B a_3 \tag{59}$$

если $a_0 = 1$. Уравненіе (37) даетъ:

$$\varphi = s_2 s_1 - s_3 \tag{60}$$

функція φ должна удовлетворять слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = 0 \end{gathered} \tag{61}$$

которыя, замѣтивъ что уравненія (59) и (60) даютъ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = A a_2 \;,\; \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = A a_1 \;,\; \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = B \;,\; \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = s_2 \;,\; \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = s_1 \;,\; \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = -1$$

сдѣлаются:

$$B - 3 = 0 \quad , \quad A a_1 + B a_1 + 2 s_1 = 0$$

изъ которыхъ, зная, что $s_1 = -a_1$, мы найдемъ $B = 3$, $A = -1$.

Примѣръ 2. Возьмемъ симметрическую функцію (см. § 135, пр. 2):

$$\sum x^2_1 x_2 x_3$$

Мы нашли выше:

$$\varphi = A a_1 a_3 + B a^2_2 + C a_4$$

если $a_0 = 1$. Уравненіе (40) даетъ:

$$\varphi = \frac{s_2 s^2_1 - 2s_3 s_1 - s^2_2 + 2s_4}{1.2}$$

Функція φ удовлетворяетъ слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_4} + 4\frac{\partial\varphi}{\partial s_4} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_4} + 3\frac{\partial\varphi}{\partial s_3} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_4} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + a_3\frac{\partial\varphi}{\partial a_4} + \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} = 0$$

гдѣ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_4} = C \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} = Aa_1 \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = 2Ba_2 \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = Aa_3$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_4} = 1 \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial s_3} = -s_1 \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = \frac{s^2_1 - 2s_2}{2} \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} = s_1 s_2 - s_3$$

подставляя эти величины въ предъидущія уравненія, найдемъ:

$$C + 4 = 0$$

$$Aa_1 + Ca_1 - 3s_1 = 0$$

$$2Ba_2 + Aa^2_1 + Ca_2 + s^2_1 - 2s_2 = 0$$

этихъ уравненій и достаточно. Изъ перваго имѣемъ $C = -4$, а второе, замѣтивъ что $s_1 = -a_1$, даетъ $A = 1$. Подставляя эти величины въ третье, найдемъ $B = 0$.

Примѣръ 3. Возьмемъ симметрическую функцію (см. § 94, прим. 3):

$$\Sigma x^3_1 x^2_2$$

Мы нашли уже выше:

$$\varphi = \Sigma x^2_1 x^2_2 = Aa_5 + Ba_1 a_4 + Ca_2 a_3 + Da_1 a^2_2 + Ea^2_1 a_3$$

если $a_0 = 1$. Уравненіе (37) даетъ:

$$\varphi = s_3 s_2 - s_5$$

Дифференціальныя уравненія будутъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_5}+5\frac{\partial\varphi}{\partial s_5}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_4}+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_5}+4\frac{\partial\varphi}{\partial s_4}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_4}+a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_5}+3\frac{\partial\varphi}{\partial s_3}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_4}+a_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_5}+2\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+a_3\frac{\partial\varphi}{\partial a_4}+a_4\frac{\partial\varphi}{\partial a_5}+\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}=0$$

гдѣ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_5}=A\quad,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial a_4}=Ba_1\quad,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}=Ca_2+Ea^2{}_1\quad,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}=Ca_3+2Da_1a_2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=Aa_4+Da^2{}_2+2Ea_1a_3$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_5}=-1\quad,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial s_4}=0\quad,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial s_3}=s_2\quad,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}=s_3\quad,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}=0$$

Подставляя эти значенія въ предъидущія уравненія, два первыя дадутъ:

$$A-5=0\quad,\quad A+B=0$$

откуда.

$$A=5\quad,\quad B=5$$

Третье уравненіе, подставивъ вмѣсто A, B и s_2 ихъ величины (29) даетъ:

$$Ca_2+Ea^2{}_1=a_2+2a^2{}_1$$

изъ котораго видимъ, что:

$$C=1\quad,\quad E=2$$

Остается только опредѣлитель D. Для этого можно употребить или уравненіе четвертое или пятое, выгоднѣе пятое; выгода эта заключается въ томъ, что $\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}=0$. Послѣ подстановленія уравненіе это сдѣлается:

$$Ba_4+Da^2{}_2+2Ea_1a_3+Ca_1a_3+2Da^2{}_1a_2+Ca^2{}_2+Ea^2{}_1a_2+Ba_1a_3+Aa_4=0$$

откуда:

$$D = -1$$

Примѣръ 4. Вычислить симметрическую функцію:

$$\Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x^2{}_3 x^2{}_4$$

Рѣшеніе. Мы знаемъ степень этой функціи, слѣдовательно, ея форма въ коэфиціентахъ будетъ:

$$\Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x^2{}_3 x^2{}_4 = Aa_8 + Ba_1 a_7 + Ca_2 a_6 + Da_3 a_5 + Ea^2{}_4$$

Если-бы функціи $\Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x^2{}_3 x^2{}_4$ мы выразили съ помощью формулъ § 134 въ функціи s_1, s_2, s_3, . . . , то легко видѣть, что въ нее войдутъ только суммы четырехъ степеней s_2, s_4, s_6, s_8. Слѣдовательно, мы должны имѣть:

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x^2{}_3 x^2{}_4 = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial s_7} \Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x^2{}_3 x^2{}_4 = 0$$

прилагая къ этимъ уравненіямъ формулу дифференцированія (58), найдемъ:

$$Aa_5 + Ba_1 a_4 + Ca_2 a_3 + D(a_2 a_3 + a_5) + 2Ea_1 a_4 = 0$$

$$Aa_1 + Ba_1 = 0$$

Изъ этихъ уравненій мы имѣемъ:

$$A + B = 0 \quad , \quad C + D = 0 \quad , \quad D + A = 0 \quad , \quad B + 2E = 0$$

Но $E = 1$, такъ какъ для уравненія 4-й степени мы имѣемъ $\Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x^2{}_3 x^2{}_4 = = a^2{}_4$, слѣдовательно:

$$B = -2 \quad , \quad A = 2 \quad , \quad C = -2 \quad , \quad D = 2$$

откуда, возстанавливая a_0, будемъ имѣть:

$$a_0^2 \Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x^2{}_3 x^2{}_4 = 2a_0 a_8 - 2a_1 a_7 + 2a_2 a_6 - 2a_3 a_5 + a^2{}_4$$

Примѣръ 5. Вычислить функцію:

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 x_3$$

Рѣшеніе. Такъ какъ ея вѣсъ есть 6, а степень 3, то ея форма въ коэфиціентахъ есть:

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 x_3 = Aa_6 + Ba_1 a_5 + Ca_2 a_6 + Da^2{}_1 a_4 + Ea^2{}_3 + Ka_1 a_2 a_3 + La^3{}_2$$

эти функціи, выраженныя въ суммахъ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ будутъ (§ 134):

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 x_3 = s_1 s_2 s_3 - s_1 s_5 - s^2{}_3 - s_2 s_4 + 2s_6$$

Дифференцируя эти два уравненія по s_6, найдемъ изъ перваго $-\frac{A}{6}$, а изъ втораго 2, слѣдовательно:

$$-\frac{A}{6} = 2 \quad \text{или} \quad A = -12$$

Дифференцируя по s_5 тѣ же два уравненія, найдемъ:

$$Aa_1 + Ba_1 = 5s_1 = -5a_1$$

откуда:

$$B = 7$$

Дифференцируя по s_4, будемъ имѣть:

$$Aa_2 + Ba^2{}_1 + Ca_2 + Da^2{}_1 = 4s_2 = 4(a^2{}_1 - 2a_2)$$

откуда:

$$A + C = -8 \qquad B + E = 4$$

откуда наконецъ:

$$D = -3 \qquad C = 4$$

Легко видѣть, что $L = 0$, такъ какъ при уничтоженіи $n-2$ корней этотъ коэфиціентъ уничтожается. Если $n-3$ корней въ уравненіи равны нулю, то:

$$\Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 \Sigma x^2{}_1 x_2 = -a_3(-a_1 a_2 + 3a_3) = a_1 a_2 a_3 - 3a^2{}_3$$

откуда:

$$E = -3 \qquad K = 1$$

Слѣдовательно мы будемъ имѣть возстановляя a_0:

$$a_0^3 \Sigma x^3{}_1 x^2{}_2 x_3 = -12a_0^2 a_6 + 7a_0 a_1 a_5 + 4a_0 a_2 a_4 - 3a^2{}_1 a_4 - 3a_0 a^2{}_3 + a_1 a_2 a_3$$

§ 138. Такъ какъ всѣ симметрическія функціи корней уравненія выражаются функціями типа $\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots$, то составлены таблицы такихъ функцій. Мы не станемъ говорить объ устройствѣ и употребленіи такихъ таблицъ, замѣтимъ только, что таблицы симметрическихъ функцій корней уравненій до 10-й степени были вычислены въ 1819 г. Мейеромъ и Гир-

шемъ и напечатаны при ихъ „Алгебрѣ". Подобнаго же рода таблицы были вычислены англійскимъ геометромъ Келе (Cayley) въ 1857 г. и напечатаны въ 147-мъ томѣ „Philosophical Transaction". Въ концѣ нашего сочиненія „Теорія опредѣлителей и теорія формъ", Кіевъ, 1877 г., помѣщены таблицы симметрическихъ функцій, до девятой степени включительно, въ коэфиціентахъ уравненія.

Можно еще вычислить симметрическія функціи формы $\Sigma x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots$, слѣдующими частными пріемамы:

Примѣръ 1. Вычислить функцію $\Sigma x^2_1 x_2 x_3$ корней уравненія $f(x) = 0$?

Рѣшеніе. Перемножимъ уравненія:

$$\Sigma x_1 = -a_1 \quad \text{и} \quad \Sigma x_1 x_2 x_3 = -a_3$$

мы полагаемъ $a_0 = 1$. Произведеніе $x^2_1 x_2 x_3$ входитъ только разъ, членъ $x_1 x_2 x_3 x_4$ входитъ четыре раза, какъ произведеніе x_1 на $x_2 x_3 x_4$, x_2 на $x_1 x_2 x_3$, x_3 на $x_1 x_2 x_4$ и x_4 на $x_1 x_2 x_3$, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\Sigma x^2_1 x_2 x_3 + 4 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = a_1 a_3$$

откуда, замѣчая что $\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = a_4$, найдемъ:

$$\Sigma x^2_1 x_2 x_3 = a_1 a_3 - 4a_4$$

или возстановляя a_0 будемъ имѣть:

$$a_0^2 \Sigma x^2_1 x_2 x_4 = a_1 a_3 - 4a_0 a_4 \qquad (\alpha)$$

Примѣръ 2. Вычислить $\Sigma x^2_1 x^2_2$.

Рѣшеніе. Возвышая въ квадратъ:

$$\Sigma x_1 x_2 = a_2$$

найдемъ:

$$\Sigma x^2_1 x^2_2 + 2 \Sigma x^2_1 x_2 x_3 + 6 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = a^2_2$$

Возвышая въ квадратъ легко видѣть, что членъ $x_1 x_2 x_3 x_4$ произошелъ отъ произведенія $x_1 x_2$ на $x_3 x_4$, $x_1 x_3$ на $x_2 x_4$, $x_1 x_4$ на $x_2 x_3$, слѣдовательно коэфиціентъ у этого члена будетъ 6, такъ какъ каждое произведеніе взято дважды при возвышеніи въ квадратъ, а потому будемъ имѣть:

$$\Sigma x^2_1 x^2_2 = a^2_2 - 2a_1 a_3 + 2a_4 \qquad (\beta)$$

или:

$$a_0^2 \Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 = a^2{}_2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4$$

возстановляя коэфиціентъ a_0.

Примѣръ 3. Вычислить $\Sigma x^3{}_1 x_2$.

Рѣшеніе. Перемножая:

$$\Sigma x^2{}_1 = a^2{}_1 - 2a_2 \quad \text{и} \quad \Sigma x_1 x_2 = a_2$$

найдемъ, какъ выше:

$$a_2(a^2{}_1 - 2a_2) = \Sigma x^3{}_1 x_2 + \Sigma x^2{}_1 x_2 x_3$$

откуда:

$$\Sigma x^3{}_1 x_2 = a^2{}_1 a_2 - 2a^2{}_2 - a_1 a_3 + 4a_4$$

или:

$$a_0^3 \Sigma x^3{}_1 x_2 = a^2{}_1 a_2 - 2a_0 a^2{}_2 - a_0 a_1 a_3 + 4a_0^2 a_4$$

Примѣръ 4. Вычислить $\Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x_3$.

Рѣшеніе. Перемножимъ:

$$\Sigma x_1 x_2 = a_2 \quad \text{и} \quad \Sigma x_1 x_2 x_3 = -a_3$$

то будемъ имѣть:

$$\Sigma x_1 x_3 \Sigma x_1 x_2 x_3 = -a_2 a_3$$

Чтобы видѣть какіе члены войдутъ и сколько разъ, разсмотримъ это произведеніе только при пяти корняхъ $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$. Очевидно членъ $x^2{}_1 x^2{}_2 x_3$ войдетъ только разъ, такъ какъ онъ происходитъ изъ произведенія $x_1 x_2$ на $x_1 x_2 x_3$. Члены типа $x^2{}_1 x_2 x_3 x_4$ войдутъ каждый три раза, такъ какъ $x^2{}_1 x_2 x_3 x_4$ происходитъ изъ произведенія $x_1 x_2$ на $x_1 x_2 x_3$, или $x_1 x_3$ на $x_1 x_2 x_3$ или $x_1 x_4$ на $x_1 x_2 x_3$ и иначе произойти не можетъ. Членъ $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ войдетъ десять разъ, такъ какъ онъ происходитъ отъ умноженія каждой пары на остальныя три, а всѣхъ соединеній изъ пяти буквъ по двѣ десять, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\Sigma x_1 x_2 \Sigma x_1 x_2 x_3 = \Sigma x^2{}_1 x^2{}_2 x_3 + 3\Sigma x^2{}_1 x_2 x_3 x_4 + 10\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = -a_2 a_3$$

Легко видѣть, что:

$$\Sigma x_1 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = \Sigma x^2{}_1 x_2 x_3 x_4 + 5\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

или:

$$-a_1a_4 = \Sigma\, x^2{}_1 x_2x_3x_4 + 5a_5$$

откуда, наконецъ, найдемъ:

$$\Sigma\, x^2{}_1 x^2{}_2 x_3 = -a_2a_3 + 3a_1a_4 - 5a_5$$

или

$$a_0^2\,\Sigma\, x^2{}_1 x^2{}_2 x_3 = -a_2a_3 + 3a_1a_4 - 5a_0a_5$$

Примѣръ 5. Вычислить $\Sigma\, x^2{}_1 x^2{}_2 x_3x_4$.

Рѣшеніе. Перемножимъ:

$$\Sigma\, x_1x_2 \quad \text{и} \quad \Sigma\, x_1x_2x_3x_4$$

и разсмотримъ это произведеніе, ограничиваясь только шестью корнями $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$. Членъ $x^2{}_1x^2{}_2x_3x_4$ войдетъ только разъ. Члены типа $x^2{}_1x_2x_3x_4x_5$ войдутъ каждый четыре раза, такъ какъ они происходятъ изъ произведеній x_1x_2 на $x_1x_3x_4x_5$, x_1x_3 на $x_1x_2x_3x_5$, x_1x_4 на $x_1x_2x_3x_5$ и x_1x_5 на $x_1x_2x_3x_4$. Членъ $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ войдетъ 15 разъ, такъ какъ онъ происходитъ изъ соединеній каждой пары изъ шести корней съ четырьмя остальными. Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\Sigma x_1x_2\,\Sigma x_1x_2x_3x_4 = \Sigma\, x^2{}_1x^2{}_2x_3x_4 + 4\,\Sigma\, x^2{}_1x_2x_3x_4x_5 + 15\,\Sigma\, x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$

но:

$$\Sigma\, x_1\,\Sigma\, x_1x_2x_3x_4x_5 = \Sigma x^2{}_1x_2x_3x_4x_5 + 6\,\Sigma\, x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$

откуда наконецъ:

$$\Sigma\, x^2{}_1x^2{}_2x_3x_4 = a_2a_4 - 4a_1a_5 + 9a_6$$

или:

$$a_0^2\,\Sigma\, x^2{}_1x^2{}_2x_3x_4 = a_2a_4 - 4a_1a_5 + 9a_0a_6$$

Примѣръ 6. Вычислить $\Sigma\, x^2{}_1x^2{}_2x^2{}_3$.

Рѣшеніе. Возвышая въ квадратъ:

$$\Sigma\, x_1x_2x_3 = -a_3$$

найдемъ:

$$(\Sigma x_1x_2x_3)^2 = a^2{}_3 =$$

$$= \Sigma\, x^2{}_1x^2{}_2x^2{}_3 + 2\,\Sigma\, x^2{}_1x^2{}_2x_3x_4 + 6\,\Sigma x^2{}_1x_2x_3x_4x_5 + 2_0\,\Sigma\, x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$

откуда:

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 = a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_6$$

или:

$$a_0^2 \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 = a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2_0a_6$$

§ 139. Изъ какой нибудь симметрической функціи корней уравненія, выраженной въ коэфиціентахъ уравненія, можно вывести нѣсколько другихъ симметрическихъ функцій въ корняхъ и ихъ выраженія въ коэфиціентахъ.

Пусть, напримѣръ, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будетъ симметрическая функція p-го порядка, и ея выраженіе въ коэфиціентахъ $F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то мы имѣемъ:

$$a_0^p\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n) \qquad (61)$$

Положимъ, что x_1, x_2, . . x_n суть корни уравненія:

$$f(x) = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a_2 + \ldots + na_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (62)$$

съ биноміальными коэфиціентами.

Если это уравненіе преобразуемъ въ другое, котораго-бы корни были меньше корней даннаго количества h, то зависимость (61) сдѣлается:

$$a_0^p\varphi(x_1 - h\ ,\ x_2 - h\ , \ldots ,\ x_n - h) = F(u_0 u_1\ ,\ u_n) \qquad (63)$$

гдѣ (§ 56):

$$u_0 = a_0 \quad , \quad u_1 = a_0h + a_1 \quad , \quad u_2 = a_0h^2 + 2a_1h + a_2 \quad , \ldots$$

Если въ уравненіи (63) сравнимъ коэфиціенты у степеней h, то найдемъ нѣсколько симметрическихъ функцій, выраженныхъ въ коэфиціентахъ.

Замѣтимъ, что если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть симметрическая функція разностей корней уравненія, то настоящее преобразованіе не поведетъ къ новымъ симметрическимъ функціямъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ функція $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не измѣняется, когда $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ замѣщаются выраженіями $x_1 - h$, $x_2 - h$, . . . , $x_n - h$.

§ 140. Часто встрѣчается необходимость имѣть производную коэфиціента a_r по какому нибудь изъ корней уравненія:

$$a_0x_n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_rx^{n-r} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (64)$$

напримѣръ по x_i.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots, x_n$ суть корни предъидущаго уравненія, то мы имѣемъ (§ 42):

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_rx^{n-r} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - x_i)\{a_0x^{n-1} + (a_0x_i + a_1)x^{n-2} + (a_0x_i^2 + a_1x_i + a_2)x^{n-3} + \ldots$$
$$+ (a_0x_i^{r-1} + a_1x_i^{r-2} + \ldots + a_{r-2}x_i + a_{r-1})x^{n-r} + \ldots$$

откуда дифференцируя обѣ части по x_i, найдемъ:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_i}x^{n-1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_i}x^{n-2} + \ldots + \frac{\partial a_r}{\partial x_i}x^{n-2} + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_i}x + \frac{\partial a_n}{\partial x_i} =$$
$$= -\{a_0x^{n-1} + (a_0x_i + a_1)x^{n-2} + \ldots + (a_0x_i^{r-1} + a_1x_i^{r-2} + \ldots + a_{r-2}x_i + a_{r-1})x^{n-2} \ldots\}$$

сравнивая коэфиціенты у одинаковыхъ степеней x, найдемъ:

$$\frac{\partial a_r}{\partial a_i} = -(a_0x_i^{r-1} + a_1x_i^{r-2} + \ldots + a_{r-2}x_i + a_{r-1}) \tag{65}$$

Давая индексу i всѣ значенія 1, 2, 3,... n и складывая полученные результаты будемъ имѣть:

$$\frac{\partial a_r}{\partial x_1} + \frac{\partial a_r}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial a_r}{\partial x_n} = -(a_0s_{r-1} + a_1s_{r-2} + \ldots + a_{r-2}s_1 + na_{r-1})$$

Если обратимъ вниманіе на формулы (26), то легко видѣть что

$$\sum_1^n \frac{\partial a_r}{\partial x_i} = -(n - r + 1)a_{r-1} \tag{66}$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ значенія индекса i отъ 1 до n включительно.

Если-бы уравненіе (64) было дано съ биноміальными коэфиціентами, то въ предъидущей формулѣ надобно замѣстить a_r вообще выраженіемъ:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}a_r$$

что даетъ:

$$-\sum_1^n \frac{\partial a_r}{\partial x_n} = ra_{r-1} \tag{67}$$

или

$$-\sum_{1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_r = r a_{r-1}$$

Если символъ $-\sum_{1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$ означимъ чрезъ δ, то будемъ имѣть:

$$\delta a_r = r a_{r-1} \tag{68}$$

откуда видимъ, что дѣйствіе символомъ:

$$-\sum_{1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} = \delta$$

надъ коэфиціентомъ a_r относительно индекса сходно съ дѣйствіемъ символа $\frac{\partial}{\partial x}$ надъ степенью x^n.

§ 141. Если возьмемъ сумму:

$$s_r = x^r{}_1 + x^r + \ldots + x_i{}^r + \ldots + x_n{}^r$$

и ея производную по x_i, то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial s_r}{\partial x_i} = r x_i{}^{r-1} \tag{69}$$

полагая послѣдовательно $i = 1, 2, 3, \ldots n$ и складывая результаты, найдемъ:

$$\sum_{1}^{n} \frac{\partial s_2}{\partial x_i} = r s_{r-1}$$

или:

$$-\delta s_r = r s_{r-1} \tag{70}$$

т. е. символъ δ имѣетъ такое же дѣйствіе надъ s_r какъ и надъ a_r, исключая знака.

§ 142. Пусть будетъ дана симметрическая функція корней уравненія (64), выраженная какъ въ корняхъ, такъ и въ коэфиціентахъ:

$$a_0^p \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{71}$$

Возьмемъ производную обѣихъ частей этого уравненія по x_i, то будемъ имѣть:

$$a_0^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} \qquad (72)$$

положимъ въ этомъ уравненіи послѣдовательно $i=1, 2, 3, \ldots, n_1$ и результаты сложимъ, будемъ имѣть:

$$a_0^p \sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial a_1}\sum_1^n \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial a_2}\sum_1^n \frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\sum_1^n \frac{\partial a_r}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\sum_1^n \frac{\partial a_n}{\partial x_i}$$

откуда, соображаясь съ формулами (66) и (67), найдемъ:

$$-a_0^p \sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} =$$

$$= na_0 \frac{\partial F}{\partial a_1} + (n-1)a_1 \frac{\partial F}{\partial a_2} + \ldots + (n-r)\, a_r \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial F}{\partial a_n} \qquad (73)$$

Если коэфиціенты въ уравненіяхъ имѣютъ биноміальную форму, то предъидущее уравненіе будетъ:

$$-a_0^p \sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} =$$

$$= a_0 \frac{\partial F}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial F}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial F}{\partial a_3} + \ldots + ra_{r-1} \frac{\partial F}{\partial a_r} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial F}{\partial a_n} \qquad (74)$$

или

$$-a_0^p \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}\right) F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

слѣдовательно:

$$-a_0^p \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i} = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}$$

Но мы положили выше (§ 140), что:

$$-\sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_i} = \delta$$

слѣдовательно символъ:

$$\delta = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-2} \frac{\partial}{\partial a_n} \tag{75}$$

Если символъ второй части означимъ чрезъ D, будемъ имѣть:

$$a_0^p \delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = DF(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Если коэфиціенты уравненія (64) не имѣютъ биноміальной формы, то символъ D будетъ имѣть форму:

$$D = na_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-1)a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + (n-2)a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} \tag{76}$$

Изъ уравненія:

$$a_0^p \delta\varphi = DF \tag{77}$$

видимъ, что если симметрическая функція получена изъ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дѣйствіемъ символа δ, то ея выраженіе въ коэфиціентахъ получится изъ $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ дѣйствіемъ символа D.

Такъ какъ $\delta\varphi$ и DF могутъ быть взяты вмѣсто функцій φ и F, въ уравненіи (77), то:

$$a_0^p \delta^2\varphi = D^2F$$
$$a_0^p \delta^3\varphi = D^3F$$
$$\ldots\ldots$$

Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть симметрическая функція разностей корней уравненія (64), то мы будемъ имѣть:

$$a_0^p \varphi(x_1-h\ ,\ x_2-h\ , \ldots, x_n-h) = F(a_0, a_1\ , a_2\ , \ldots, a_n) = a^0\varphi(x_1, x_2\ , \ldots, x_n)$$

такъ какъ h исчезаетъ изъ функціи φ, которой форма есть:

$$\Sigma(x_1 - x_2)^{h_1}(x_1 - x_3)^{h_2} \ldots.$$

Но:

$$\varphi(x_1 - h\ , x_2 - h\ , \ldots) = \varphi(x_1, x_2, \ldots) - h\delta\varphi + \frac{h^2}{1.2}\delta^2\varphi - \ldots\ldots$$

откуда:

$$\delta\varphi = 0 \quad , \quad \delta^2 = 0\ , \ldots\ldots$$

а, слѣдовательно, и:

$$DF(a_0, a_1\ , \ldots, a_n) = 0 \quad , \quad D^2F(a_0\ , a_1\ , \ldots, a_n) = 0\ , \ldots.$$

Тождество:

$$DF(a_0,a_1,\ldots,a_n)=a_0\frac{\partial F}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial F}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial F}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial F}{\partial a_n}=0 \quad (78)$$

можетъ часто служить для опредѣленія коэфиціентовъ симметрической функціи разностей корней, форма коей въ коэфиціентахъ уравненія опредѣлена. Это тождество (78) недостаточно только въ томъ случаѣ, когда существуетъ нѣсколько симметрическихъ функцій разностей корней одной *степени* и *вѣса*.

Примѣръ 1. Найти симметрическую функцію разностей корней, коей вѣсъ и степень равны тремъ.

Рѣшеніе. Форма такой функціи въ коэфиціентахъ уравненія есть:

$$\varphi(x_1x_2\ldots x_n)=Aa_0^2a_3+Ba_0a_1a_2+Ca^3{}_1=F(a_0a_1\ldots a_n)$$

дифференцируя символомъ D, найдемъ:

$$DF=D(A_0^2a_3+Ba_0a_1a_2+Ca^3{}_1)\equiv 0$$

или:

$$DF=Aa_0^2Da_3+Ba_0a_2Da_1+Ba_0a_1D_2+CDa^3{}_1\equiv 0$$

откуда (78):

$$3A_0^2a_2+Ba_0^2a_2+2Ba_0a^2{}_1+3Ca_0a^2{}_1\equiv 0$$

или:

$$(3A+B)a_0^2a_2+(2B+3C)a_0a^2{}_1\equiv 0$$

откуда:

$$3A+B=0 \quad , \quad 2B+3C=0$$

полагая $A=1$, найдемъ:

$$B=-3 \quad , \quad C=2$$

слѣдовательно (см. § 53, 18):

$$F(a_0\,,a_1\ldots\ldots a_n)=a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a^3{}_1=G$$

Примѣръ 2. Найти симметрическую функцію разностей корней уравненія, коей степень есть 4, о вѣсъ 6?

Рѣшеніе. Форма такой функціи въ коэфиціентахъ есть:

$$\varphi=Aa_0^2a^2{}_3+Ba_0a^3{}_2+Ca^3{}_1a_3+Ea^2{}_1a^2{}_2+La_0a_1a_2a_3=F(a_0\,,a_1,\ldots,a_n)$$

дифференцируя символомъ D, найдемъ:

$$DF = Aa_0^2Da^2_3 + Ba^2_3Da_1 + Ba_1Da^3_2 + Ca^3_1Da_3 + Ca_3Da^3_1 + Ea^2_1Da^2_1 +$$
$$+ Ea^2_2Da^2_1 + Ga_0a_2a_3Da_1 + Ea_0a_1a_3Da_2 + Ea_0a_1a_2Da_3 \equiv 0$$

или (78):

$$DF = 6A_0^2a_2a_3 + Ba_0a^3_2 + 6Ba^3_1 + 3Ca^3_1a_2 + 3Ca_0a^2_1a_3 + 3Ca_0a^2_1a_3 + 4Ea^3_1a_2 +$$
$$+ 2Ea_0a_1a^2_2 + La_0^2a_2a_3 + 2La_0a^2_1a_3 + 3La^0a_1a^2_2 \doteq 0$$

или:

$$(6A+L)a_0^2a_2a_3 + (6B+3L+2E)a_0a_1a^2_2 + (3C+4E)a^2_1a_2 + (3C+2L)a_0a^2_1a_3 \doteq 0$$

откуда:

$$6A+L=0 \quad , \quad 6B+3L+2E=0 \quad , \quad 3C+4E=0 \quad , \quad 3C+2=0$$

полагая $A=1$, найдемъ:

$$B=4 \quad , \quad C=4 \quad , \quad E=-3 \quad , \quad L=-6$$

слѣдовательно:

$$F = a_0^2a^2_3 + 4a_0a^3_2 + 4a^3_1a_3 - 3a^2_1a^2_2 - 6a_0a_1a_2a_3$$

§ 143. Пусть симметрическая функція $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будетъ выражена въ функціи суммъ степеней корней уравненія, т. е.:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = F(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$$

дифференцируя обѣ части по x_i, найдемъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial s_r}\frac{\partial s_r}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial s_n}\frac{\partial s_n}{\partial x_i}$$

полагая послѣдовательно $i=1, 2, 2, \ldots n$ и складывая результаты, найдемъ:

$$\sum_1^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial s_1}\sum_1^n \frac{\partial s_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial s_2}\sum_1^n \frac{\partial s_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial s_n}\sum_1^n \frac{\partial s_n}{\partial x_i}$$

соображаясь съ формулою (69), найдемъ:

$$\sum_1^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = s_0\frac{\partial F}{\partial s_1} + 2s_1\frac{\partial F}{\partial s_2} + 3s_2\frac{\partial F}{\partial s_3} + \ldots + ns_{n-1}\frac{\partial F}{\partial s_n}$$

или:

$$\sum_{1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = \left(s_0\frac{\partial}{\partial s_1} + 2s_1\frac{\partial}{\partial s_2} + 3s_2\frac{\partial}{\partial s_3} + \ldots\ldots + ns_{n-1}\frac{\partial}{\partial s_n}\right)F$$

или наконецъ:

$$-\delta\varphi = D_s F$$

гдѣ D_s есть символъ такой формы относительно s, какую имѣетъ символъ D относительно a. Помножимъ обѣ части предъидущаго равенства на a_0^p, будемъ имѣть:

$$-a_0^p\delta\varphi = a_0^p D_s F$$

но мы имѣемъ:

$$a_0^p\delta\varphi = DF$$

слѣдовательно:

$$D_s = -a_0^{-p} D$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ есть функція разностей корней уравненія, то и $F(s_0, s_1 \ldots, s_n)$ будетъ также функція разностей корней уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$DF(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv 0$$

а слѣдовательно и

$$D_s F(s_0, s_1, s_2, \ldots., s_n) \equiv 0$$

Но

$$D_s = -a_0^p D$$

слѣдовательно и

$$DF(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n) \equiv 0$$

т. е. $F(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ есть симметрическая функція разностей корней уравненія.

Примѣръ 1. Легко видѣть, что (§ 54, 26):

$$J_1 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a^2_2$$

есть симметрическая функція разностей корней, такъ какъ:

$$DJ_1 \equiv 0$$

слѣдовательно и функція:

$$s_0s_4 - 4s_1s_4 + 3s^2_2$$

есть симметрическая функція разностей корней.

Примѣръ 2. Точно также найдемъ, что:

$$D\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

слѣдовательно и

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

есть симметрическая функція разностей корней.

§ 144. Мы выше видѣли, что если:

$$a_0^p\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

есть симметрическая функція разностей корней уравненія, то имѣемъ:

$$na_0\frac{\partial F}{\partial a_1} + (n-1)a_1\frac{\partial F}{\partial a_2} + (n-1)a_2\frac{\partial F}{\partial a_3} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0$$

или:

$$a_0\frac{\partial F}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial F}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial F}{\partial a_3} + \ldots\ldots + na_{n-1}\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0$$

если уравненіе дано съ миноміальными коэфиціентами.

Дифференцируя эти тождества по a_n, найдемъ:

$$na_0\frac{\partial}{\partial a_1}\frac{\partial F}{\partial a_n} + (n-1)a_1\frac{\partial}{\partial a_2}\frac{\partial F}{\partial a_n} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_n}\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0$$

или:

$$a_0\frac{\partial}{\partial a_1}\frac{\partial F}{\partial a_n} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2}\frac{\partial F}{\partial a_n} + 3a_2\frac{\partial}{\partial a_3}\frac{\partial F}{\partial a_n} + \ldots\ldots + na_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_n}\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0$$

откуда видимъ, что если $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ есть симметрическая функція разности корней уравненія, то и ея производная по a_n, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial a_n}F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

есть также симметрическая функція разностей корней того же уравненія.

Примѣръ 1. Легко видѣть, дифференцируя символомъ D функцію:

$$F = a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3$$

что $DF \equiv 0$, слѣдовательно это симметрическая функція разностей корней уравненія, откуда и

$$\frac{\partial F}{\partial a_3} = 2a_0^2 a_3 + 4a_1^3 - 6a_0 a_1 a_2$$

есть также симметрическая функція разностей корней уравненія.

Примѣръ 2. Если:

$$F = 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 + a_1^2 a_2^2 - 27a_0^2 a_3^2$$

то

$$DF \equiv 0$$

слѣдовательно и:

$$D\frac{\partial F}{\partial a_3} \equiv 0$$

т. е.:

$$\frac{\partial F}{\partial a_3} = 9a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - 27a_0^2 a_3$$

есть симметрическая функція разностей корней.

Примѣръ 3. Функція:

$$F = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$$

есть симметрическая разностей корней, такъ какъ:

$$DF \equiv 0$$

откуда:

$$\frac{\partial F}{\partial a_4} = a_0 a_2 - a_1^2 = H$$

есть также функція разностей корней, такъ какъ:

$$D\frac{\partial F}{\partial a_4} \equiv 0$$

§ 145. Разыщемъ еще нѣсколько симметрическихъ функцій корней уравненій 3-й и 4-й степеней, которыя намъ будутъ необходимы ниже.

Примѣръ 1. Найти для кубическаго уравненія:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \tag{79}$$

слѣдующія симметрическія функціи его корней:

$$\Sigma(x_1-x_2)^2 = (x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_3)^2$$

$$\Sigma x_1(x_2-x_3)^2 = x_1(x_2-x_3)^2 + x_2(x_3-x_1)^2 + x_3(x_1-x_2)^2$$

$$\Sigma x^2{}_1(x_2-x_3)^2 = x^2{}_1(x_2-x_3)^2 + x^2{}_2(x_3-x_1)^2 + x^2{}_3(x_1-x_2)^2$$

Легко видѣть, что:

$$a_0^2\Sigma x_1^0(x_1-x_2)^2 = 18(a^2{}_1-a_0a_2) = -18H$$

$$a_0^2\Sigma x_1(x_2-x_3)^2 = 9(a_0a_3-a_1a_2) = +18H_1$$

$$a_0^2\Sigma x_1^2(x_2-x_3)^2 = 18(a^2{}_1-a_1a_3) = -18H_2$$

Примѣръ 2. Найти выраженіе квадратнаго уравненія:

$$(x-x_1)^2(x_2-x_3)^2 + (x-x_2)^2(x_3-x_1)^2 + (x-x_3)^2(x_1-x_2)^2 = 0$$

гдѣ x_1, x_2, x_3 суть корни уравненія (79), въ коэфиціентахъ этого уравненія.

Отвѣтъ:

$$Hx^2 + 2H_1x + H_2 = 0$$

Примѣръ 3. Найти выраженіе функціи:

$$(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$$

въ коэфиціентахъ уравненія (79)?

Легко видѣть, что:

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3x_1 - x_1 - x_2 - x_3 = 3x_1 + \frac{3a_1}{a_0}$$

$$2x_2 - x_1 - x_3 = 3x_2 - x_1 - x_2 - x_3 = 3x_2 + \frac{3a_1}{a_0}$$

$$2x_3 - x_1 - x_3 = 3x_3 - x_1 - x_2 - x_3 = 3x_3 + \frac{3a_1}{a_0}$$

откуда:

$$x_1+\frac{a_1}{a_0}=\frac{1}{3}(2x_1-x_2-x_2)$$

$$x_2+\frac{a_1}{a_0}=\frac{1}{3}(2x_2-x_1-x_3)$$

$$x_3+\frac{a_1}{a_0}=\frac{1}{3}(2x_3-x_1-x_2)$$

перемножая и соображаясь съ § 54, найдемъ:

$$a_0^3(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)=$$
$$=-27(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)=-27G$$

Примѣръ 4. Возьмемъ уравненіе 4-й степени:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \qquad (81)$$

пусть его корни будутъ x_1, x_2, x_3, x_4.

Найти выраженіе симметрической функціи:

$$\Sigma(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2=$$
$$=(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2+(x_1-x_3)^2(x_2-x_4)^2+(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2$$

перемножая найдемъ:

$$\Sigma(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2=2\,\Sigma x_1^2x_2^2-\Sigma x_1^2x_2x_3+12\,x_1x_2x_3x_4$$

соображаясь съ (§ 138, α и β) найдемъ, вводя въ выраженіе (α) и (β) биноміальные коэфиціенты:

$$a_0^2\Sigma(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2=24(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)=24J_1$$

Примѣръ 5. Возьмемъ попарно произведенія четырехъ корней уравненія (81):

$$x_1x_2\ ,\ x_1x_3\ ,\ x_1x_4\ ,\ x_2x_3\ ,\ x_2x_4\ ,\ x_3x_4$$

и составимъ суммы этихъ произведеній:

$$x_1x_2+x_3x_4\ ,\ x_1x_3+x_2x_4\ ,\ x_2x_3+x_1x_4$$

составимъ слѣдующія двѣ симметрическія функціи:

$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)+(x_1x_2+x_3x_4)(x_2x_3+x_1x_4)+(x_1x_3+x_2x_4)(x_2x_3+x_1x_4)$$

и

$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_2x_3+x_1x_4)$$

положимъ:

$$x_2x_3+x_1x_4=z_1 \quad , \quad x_1x_3+x_2x_4=z_2 \quad , \quad x_1x_2+x_3x_4=z_3$$

эти симметрическія функціи будутъ:

$$z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 \quad \text{и} \quad z_1z_2z_3$$

Первая изъ нихъ будетъ:

$$a_0^2\Sigma z_1z_2=a_0^2\Sigma x^2{}_1x_2x_3=4(a_1a_3-a_0a_4)$$

а вторая $z_1z_2z_3$, будетъ имѣть форму:

$$x_1x_2x_3x_4(x^2{}_1x^2{}_2x^2{}_3)+x^2{}_1x^2{}_2x^2{}_3x^2{}_4\left(\frac{1}{x^2{}_1}+\frac{1}{x^2{}_2}+\frac{1}{x^2{}_3}+\frac{1}{x^2{}_4}\right)$$

откуда легко найти:

$$a_0^3z_1z_2z_3=8(2a_0a^2{}_3-3a_0a_2a_4+2a^2{}_1a_4)$$

Примѣръ 6. Найти слѣдующую симметрическую функцію корней уравненія (81):

$$\begin{aligned}&\{(x_3-x_1)(x_2-x_4)-(x_1-x_2)(x_3-x_4)\}\{(x_1-x_2)(x_3-x_4)-\\&-(x_2-x_3)(x_1-x_4)\}\{(x_2-x_3)(x_1-x_4)-(x_3-x_1)(x_2-x_4)\}\end{aligned} \qquad (82)$$

это весьма важная функція въ теоріи биквадратнаго уравненія.

Вотъ правило состава этой функціи: взять три корня x_1, x_2, x_3 и составить разности круговымъ закономъ $x_2-x_3, x_3-x_1, x_1-x_2$, затѣмъ изъ каждаго изъ трехъ корней x_1, x_2, x_3 вычесть четвертый x_4, получимъ разности $x_1-x_4, x_2-x_4, x_3-x_4$; на эти разности помножимъ послѣдовательно предъидущія, это даетъ произведенія:

$$(x_2-x_3)(x_1-x_4) \quad , \quad (x_3-x_1)(x_2-x_4) \quad , \quad (x_1-x_2)(x_3-x_4)$$

данная симметрическая функція есть произведеніе предъидущихъ трехъ разностей.

Если возьмемъ значенія z_1, z_2, z_3 изъ предъидущаго примѣра, то будемъ имѣть:

$$-z_2+z_3=(x_2-x_3)(x_1-x_4) \quad , \quad -z_3+z_1=(x_3-x_1)(x_2-x_4)$$
$$-z_1+z_2=(x_1-x_2)(x_3-x_4)$$

Откуда видно, что надобно найти выраженіе для произведенія:

$$(2z_1-z_2-z_3)(2z_2-z_1-z_3)(2z_3-z_1-z_2)$$

или:

$$(3z_1-\Sigma x_1x_2)(3z_2-\Sigma x_1x_2)(3z_3-\Sigma x_1x_2)$$

въ коэфиціентахъ уравненія (81). Подставляя въ это произведеніе вмѣсто Σx_1x_2 его значеніе и перемножая результаты, соображаясь съ значеніями Σz_1, Σz_1z_2, $z_1z_2z_3$, данными въ предъидущемъ примѣрѣ, найдемъ:

$$a_0^3(2z_1-z_2-{}_3)(2z_2-z_1-z_3)(2z_3-z_1-z_2)=$$
$$=-432(a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a^2{}_3-a^2{}_1a_4-a^3{}_2)=-432J_2$$

Функціи, данныя въ примѣрахъ 3, 4 и 7, весьма важны въ теоріи кубическаго и биквадратнаго уравненій.

Примѣръ 7. Найти симметрическую функцію корней уравненія (81)?

$$\Sigma(x_1-x_2)^2=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+x_3-x_4)^2$$

возвышая каждый изъ членовъ, легко найти, что:

$$a_0^2\,\Sigma(x_1-x_2)^2=48(a^2{}_1-a_0a_2)=-48H$$

Примѣръ 8. Показать, что:

$$a_0^2\Sigma(x_1-x_2)^4=16\{48(a_0a_2-a^2{}_1)^2-a_0^2(a_0a_4-4a_1a_3+3a^2{}_2)\}=16(48H^2-a_0^2J_1)$$

Примѣръ 9. Показать, что:

$$a_0^3(x_2+x_3-x_1-x_4)(x_3+x_1-x_2-x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)=$$
$$=32(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a^3{}_1)=32G$$

Примѣръ 10. Вычислить симметрическую функцію:

$$a_0^4\,\Sigma(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2$$

которой x_1, x_2, x_3, x_4 биквадратнаго уравненія (81)?

Отвѣтъ: Такъ какъ степень функціи есть 4, а вѣсъ 6, то можно положить:

$$a_0^4 \Sigma (x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2 = \lambda H J_1 + \mu a_0 J_2 \qquad (83)$$

λ и μ суть неопредѣленные коэфиціенты, которые можно опредѣлить, взявъ два частныя уравненія, напримѣръ:

$$x^4 - x^2 = 0$$

коего корни суть $0, 0, 1, -1$, а

$$\Sigma = 8 \ , \ H = -\frac{1}{6} \ , \ J_1 = \frac{3}{6^2} \ , \ J_2 = \frac{1}{6^3}$$

подставляя эти величины въ (83), найдемъ:

$$\mu - 3\lambda = 192 . 9$$

Поступая точно также съ уравненіемъ:

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

коего корни суть $\pm\sqrt{5}$, ± 1, найдемъ:

$$\Sigma = 768 \ , \ H = -1 \ , \ J_1 = 8 \ , \ J_2 = -4$$

откуда уравненіе (83) будетъ:

$$\mu + 2\lambda = -192$$

откуда:

$$\lambda = 2 . 192 \ , \ \mu = 3 . 192$$

и наконецъ:

$$a_0^4 \Sigma (x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2 = 192(3a_0J_2 - 2HJ_1) \qquad (84)$$

Примѣръ 11. Возьмемъ уравненіе:

$$s_0x_4 + 4s_1x^3 + 6s_2x^2 + 4s_3x + s_4 \equiv \sum_{r=1}^{r=4} (x + x_r)^4 = 0$$

Означимъ черезъ H_s, $J_{1,s}$, $J_{2,s}$ функціи такъ составленныя изъ s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, какъ H, J_1, J_2 составлены изъ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

Отвѣтъ:

$$H_s = -3\frac{s_0^2 H}{a_0^2} \quad , \quad J_2 = \frac{s_0^2(48H^2 - a_0^2 J_1)}{a_0^4} \quad , \quad G_s = -\frac{2s_0^3 G}{a_0^3}$$

откуда, замѣчая что $G^2 + 4H^3 = a_0^2(HJ_1 - a_0 J_2)$, найдемъ:

$$G_s{}^2 + 4H_s{}^3 = s_0^2(H_s J_{1,s} - s_0 J_{2,s}) \quad , \quad J_{2,s} = \frac{19^2}{a_0^4}(3a_0 J_2 - 2HJ_1)$$

ГЛАВА XI.

Нѣкоторыя приложенія симметрическихъ функцій.

§ 146. Если цѣлая функціи, составленная изъ элементовъ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ не есть симметрическая, то при перемѣщеніи элементовъ между собою, она измѣняетъ и форму и величину. Перемѣщеніе элементовъ между собою, т. е. замѣщеніе однихъ другими называется *подстановленіемъ*.

Если функція симметрическая, то произвольное перемѣщеніе элементовъ между собою не измѣняетъ формы функціи, напротивъ, въ другой какой нибудь функціи, при перемѣщеніи элементовъ, ея форма измѣняется. Напримѣръ, функціи:

$$x^2{}_1 - x^2{}_2 + x^2{}_3 - x^2{}_4 \quad , \quad x_1 x^2{}_2 x_3 + x_4 x_5 + x_6 \quad , \quad x^3{}_1 + x^2{}_2 + x_3$$

при перемѣщеніи x_1 и x_2 измѣняются въ

$$-x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3 - x^2{}_4 \quad , \quad x^2{}_1 x_2 x_3 + x_4 x_5 + x_6 \quad , \quad x^3{}_2 + x^2{}_1 + x_3$$

при перемѣщеніи элементовъ x_1 и x_3 первыя двѣ не измѣняются, а послѣдняя измѣняется въ

$$x^3{}_3 + x^2{}_2 + x_1$$

и т. д.

При всевозможныхъ перемѣщеніяхъ элементовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цѣлая функція можетъ получать *одно*, *два*, *три* и т. д. значенія, такія функціи называются *однозначными* или симметрическими, *двузначными*, *трузначными* и т. д.

Найти функціи, которыя-бы при перемѣщеніи элементовъ ее составляющихъ, имѣли данное число значеній, есть одна изъ самыхъ трудныхъ задачъ анализа и одна изъ самыхъ важныхъ, какъ увидимъ ниже, въ теоріи рѣшенія алгебраическихъ уравненій.

Мы будемъ всегда полагать, что элементы $x_1, x_2, \ldots x_n$, составляющіе цѣлую раціональную функцію, суть корни уравненія n-й степени:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

§ 147. *Предложеніе.* Если раціональная функція:

$$y = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

элементовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые суть корни уравненія (1), имѣетъ μ значеній при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ между собою элементовъ, то всѣ ея μ значеній суть корни уравненія μ-й степени, котораго коэфиціенты суть раціональныя функціи коэфиціентовъ уравненія (1).

Доказательство. Положимъ что въ составъ функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ входятъ не всѣ n элементовъ, а только m изъ нихъ, то очевидно всѣхъ перемѣщеній элементовъ функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будетъ столько, сколько есть различныхъ сочетаній изъ n буквъ по m, а такихъ сочетаній есть, какъ извѣстно:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots(n-m+1)$$

Если не всѣ значенія функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$, соотвѣтствующія этимъ перемѣщеніямъ, будутъ различны, то функція φ будетъ имѣть значеній меньше выше-написаннаго числа; пусть число различныхъ значеній будетъ μ. Слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)\ ,\ y_2 = \varphi(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_m)\ldots\ldots y_\mu = \varphi(x_i, x_k, \ldots) \quad (2)$$

μ значеній. Составимъ изъ этихъ значеній уравненіе:

$$(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\ldots\ldots\ldots(y-y_\mu) = 0$$

или:

$$y^\mu + A_1y^{\mu-1} + A_2y^{\mu-2} + \ldots\ldots + A_{\mu-1}y + A_\mu = 0$$

гдѣ:

$$-A_1 = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots\ldots + y_\mu$$
$$A_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + \ldots\ldots\ldots + y_{\mu-1}y_\mu$$
$$-A_3 = y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + \ldots\ldots + y_{\mu-2}y_{\mu-1}y_\mu$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^\mu A_\mu = y_1y_2y_3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_{\mu-2}\cdot y_{\mu-1}\cdot y_\mu$$

Коэфиціенты $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\mu$ суть симметрическія функціи значеній y_1, $y_2, y_3 \ldots y_n$ функціи φ, а слѣдовательно они суть и симметрическія функціи элементовъ или корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ уравненія (1), такъ какъ при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ x функція $\varphi(y_1, x_2, \ldots, x_m)$ получаетъ только μ значеній. Если $A_1, A, \ldots, A_\mu$ суть симметрическія функціи корней уравненія (3), то они суть раціональныя функціи коэфиціентовъ уравненія (1) и могутъ быть легко вычислены съ помощью способовъ изложенныхъ выше.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ:

Примѣръ 1. Пусть x_1, x_2, x_3 будутъ корни уравненія:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \tag{4}$$

Составить уравненіе, котораго-бы корнями были три значенія функціи:

$$\varphi(x_1x_2x_3) = x_2x_3 + \frac{1}{x_1}$$

Рѣшеніе. Означимъ эти три значенія чрезъ y_1, y_2, y_3:

$$y_1 = x_2x_3 + \frac{1}{x_1} \quad , \quad y_2 = x_1x_3 + \frac{1}{x_2} \quad , \quad y_3 = x_1x_2 + \frac{1}{x_3}$$

или:

$$y_1 = \frac{x_1x_2x_3 + 1}{x_1} \quad , \quad y_2 = \frac{x_1x_2x_3 + 1}{x_2} \quad , \quad y_3 = \frac{x_1x_2x_3 + 1}{x_3}$$

но

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

слѣдовательно:

$$y_1 = \frac{a_0 - a_3}{a_0x_1} \quad , \quad y_2 = \frac{a_0 - a_3}{a_0x_2} \quad , \quad y_3 = \frac{a_0 - a_3}{a_0x_3}$$

или вообще:

$$y = \frac{a_0 - a_3}{a_0x}$$

откуда:

$$x = \frac{a_0 - a_3}{a_0y}$$

подставляя это значеніе въ уравненіе (4), найдемъ:

$$a_0^2a_3y^3 + 3a_0a_2(a_0 - a_3)y^2 + 3a_1(a_0 - a_2)^2y + (a_0 - a_3)^3 = 0$$

Примѣръ 2. Составить уравненіе, котораго-бы корнями были три значенія функціи:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3)$$

корней уравненія (4)?

Рѣшеніе. Три значенія этой функціи суть:

$$y_1 = x_1(x_2 + x_3) \quad , \quad y_2 = x_2(x_1 + x_3) \quad , \quad y_3 = x_3(x_1 + x_2)$$

откуда:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \frac{6a_2}{a_0}$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \left(\frac{3a_2}{a_0} + x^2{}_3\right)x_1x_2 + \left(\frac{3a_2}{a_0} + x^2{}_2\right)x_1x_3 + \left(\frac{3a_2}{a_0} + x^2{}_1\right)x_2x_3$$

$$= \frac{9a^2{}_2}{a_0^2} + x_1x_2x_3 . s_1 = \frac{9a^2{}_2}{a_0^2} + \frac{3a_1a_3}{a_0^2} = \frac{9a^2{}_2 + 3a_1a_3}{a_0^2}$$

$$y_1y_2x_3 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = -\frac{a_3}{a_0}(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$$

но:

$$x_1 + x_2 = -\frac{3a_1}{a_0} - x_3 \quad , \quad x_1 + x_3 = -\frac{3a_1}{a_0} - x_2 \quad , \quad x_2 + x_3 = -\frac{3a_1}{a_0} - x_1$$

слѣдовательно:

$$y_1y_2y_3 = \frac{a_3}{a_0}\left(\frac{3a_1}{a_0} + x_1\right)\left(\frac{3a_1}{a_0} + x_2\right)\left(\frac{3a_1}{a_0} + x_2\right)$$

откуда:

$$y_1y_2y_3 = \frac{a_3}{a_0}\left(\frac{27a^3{}_1}{a_0^3} + s_1\frac{9a^2{}_1}{a_0^2} + \Sigma x_1x_2\frac{3a_1}{a_0} + x_1x_2x_3\right)$$

или:

$$y_1y_2y_3 = \frac{a_3}{a_0}\left(\frac{9a_1a_2}{a_0^2} - \frac{a_3}{a_0}\right) = \frac{a_3}{a_0^3}(9a_1a_2 - a_0a_3)$$

слѣдовательно искомое уравненіе будетъ:

$$y^3 - \frac{6a_2}{a_0}y^2 + \frac{9a^2{}_2 + 3a_1a_3}{a_0^2}y - \frac{a_3(9a_1a_2 - a_0a_3)}{a_0^3} = 0$$

или наконецъ:

$$a_0^3y^3 - 6a_0^2a_2y^2 + a_0(9a^2{}_2 + 3a_1a_3)y - a_3(9a_1a_2 - a_0a_3) = 0$$

Примѣръ 3. Составить уравненіе, коего корни были-бы:

$$x_1 + x_2 \quad , \quad x_1 + x_3 \quad , \quad x_2 + x_3$$

x_1, x_2, x_3 суть корни уравненія (4)?

Отвѣтъ:

$$a_0^2 y_3 + 6a_0 a_1 y^2 + (9a^2_1 + 3a_0 a_2) y + 9a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$$

Примѣръ 4. Составить уравненіе, коего корни были-бы квадраты разностей корней уравненія 3-ей степени (4)?

Рѣшеніе. Если x_1, x_2, x_3 суть корни уравненія (4), то корни искомаго уравненія суть три значенія функціи:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) = (x_1 - x_2)^2$$

Если эти значенія означимъ чрезъ y_1, y_2, y_3, то будемъ имѣть:

$$y_1 = (x_2 - x_3)^2 \quad , \quad y_2 = (x_1 - x_3)^2 \quad , \quad y_3 = (x_1 - x_2)^2$$

Рѣшимъ эту задачу сначала для кубическаго уравненія, въ которомъ недостаетъ втораго члена. Пусть это уравненіе будетъ:

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{5}$$

пусть его корни будутъ z_1; z_2, z_3, слѣдовательно корни искомаго уравненія будутъ:

$$(z_2 - z_3)^2 \quad , \quad (z_1 - z_3)^2 \quad , \quad (z_1 - z_2)^2$$

означимъ эти значенія чрезъ y_1, y_2, y_3, будемъ имѣть:

$$y_1 = z^2_1 + z^2_2 + z^2_2 - \frac{2z_1 z_2 z_3}{z_1} - z^2_1$$

но $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, слѣдовательно:

$$(z_1 + z_2 + z_2)^2 = z^2_1 + z^2_2 + z^2_3 + 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_2 z_3 = 0$$

откуда:

$$z^2_1 + z^2_2 + z^2_3 = -2p \quad \text{а} \quad z_1 z_2 z_3 = -q$$

слѣдовательно:

$$y_1 = -2p + \frac{2q}{z_1} - z^2_1$$

такъ что вообще можно положить:

$$y = -2p - z^2 + \frac{2q}{z}$$

или

$$z^3 + (y + 2p)z - 2q = 0$$

вычитая это уравненіе изъ уравненія (5), найдемъ:

$$(y + p)z - 3q = 0 \quad \text{или} \quad z = \frac{3q}{p + y}$$

подставляя это выраженіе для z въ уравненіе (5), найдемъ искомое уравненіе:

$$y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0 \tag{6}$$

Преобразуемъ теперь данное уравненіе:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

въ уравненіе безъ втораго члена, то будемъ имѣть (§ 53):

$$z^3 + \frac{2H}{a_0^2}z + \frac{G}{a_0^3} = 0$$

слѣдовательно p и q имѣютъ слѣдующія значенія:

$$p = \frac{3H}{a_0^2} \quad , \quad q = \frac{G}{a_0^3}$$

подставляя эти значенія въ уравненіе (6), найдемъ:

$$y^3 + \frac{18H}{a_0^2}y^2 + \frac{81H^2}{a_0^4}y + \frac{27}{a_0^6}(G^2 + 4H^3) = 0 \tag{7}$$

Корни этого уравненія суть:

$$(x_2 - x_3)^2 \quad , \quad (x_1 - x_3)^2 \quad , \quad (x_1 - x_2)^2$$

Если умножимъ корни уравненія (7) на a_0^2, т. е. положимъ $a_0^2y = u$, то оно сдѣлается:

$$u^3 + 18Hu^2 + 81H^2u + 27(G^2 + 4H^3) = 0 \tag{8}$$

корни этого уравненія суть:

$$a_0^2(x_2 - x_3)^2 \quad , \quad a_0^2(x_1 - x_3)^2 \quad , \quad a_0^2(x_1 - x_2)^2$$

Произведеніе корней этихъ равно послѣднему члену уравненія (8), взятому съ противнымъ знакомъ, т. е.:

$$a_0^6(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27(G^2+4H^3) \quad (9)$$

Изъ § 58 (33) видно, что G^2+4H^3 содержитъ множитель a_0^2, и въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ уравненіе:

$$G^2+4H^3=a_0^2(a_0^2a_3^2-6a_0a_1a_2a_3+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-3a_1^2a_2^2)=a_0^2(HJ_1-a_0J_2)=$$
$$=a_0^2\,\Delta_3 \quad (10)$$

Выраженіе Δ_3 называется *призначною* (discriminante), оно играетъ, какъ увидимъ ниже, важную роль въ теоріи кубическаго уравненія.

Примѣръ 5. Пусть корни уравненія (4) будутъ x_1, x_2, x_3, составить уравненіе, коего корни были-бы значенія функціи $\varphi(x_1, x_2, x_3)=x_1^2$.

Рѣшеніе. Значенія функціи $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ суть:

$$y_1=x_1^2 \quad , \quad y_2=x_2^2 \quad , \quad y_3=x_3^2$$

откуда мы имѣемъ:

$$y_1+y_2+y_3=s_2 \quad , \quad y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\Sigma x_1^2x_2^2 \quad , \quad y_1y_2y_3=x_1^2x_2^2x_3^2$$

или:

$$y_1+y_2+y_3=\frac{a_1^2-2a_0a_2}{a_0^2} \quad , \quad y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\frac{9a_2^2-6a_1a_3}{a_0^2} \quad , \quad y_1y_2y_3=\frac{a_3^2}{a_0^2}$$

слѣдовательно, искомое уравненіе будетъ:

$$a_0^2y^3-(a_1^2-2a_0a_2)y^2+(9a_2^2-6a_1a_3)y-a_3^2=0$$

§ 148. Пусть данное уравненіе будетъ 4-й степени:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \quad (11)$$

а его корни пусть будутъ x_1, x_2, x_3, x_4.

Примѣръ 1. Составить уравненіе, коего корни суть значенія функціи:

$$\varphi(x_1x_2x_3x_4)=x_2x_3+x_1x_4$$

Эта функція при всевозможныхъ примѣненіяхъ корней $x_1x_2x_3x_4$ имѣетъ

три значенія:

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4 \quad , \quad y_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \quad , \quad y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$$

откуда мы имѣемъ:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{6a_2}{a_0}$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{4(a_1a_3 - a_0a_4)}{a_0^2}$$

$$y_1y_2y_3 = \frac{8(2a_0a_3^2 - 3a_0a_2a_4 + 2a_1^2a_4)}{a_0^3}$$

слѣдовательно, искомое уравненіе будетъ:

$$a_0^3y^3 - 6a_0a_2y^2 + 4a_0(4a_1a_3 - a_0a_4)y - 8(2a^0a^2{}_3 - 3a_0a_2a_4 + 2a^2{}_1a_4) = 0 \quad (12)$$

Примѣръ 2. Составить уравненіе, коего корни были-бы значенія:

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \quad , \quad (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \quad , \quad (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

корней уравненія (4)?

Отвѣтъ:

$$a_0^6y^3 + 9a_0^4Hy^2 - 27(G^2 + 4H^3) = 0$$

Примѣръ 3. Составить уравненіе, коего корни были-бы значенія функціи:

$$\varphi(x_1x_2x_3) = (x_2 - x_3)^2(2x_1 - x_2 - x_3)^2$$

корней кубическаго уравненія (4)?

Эта функція имѣетъ три значенія:

$$y_1 = (x_2 - x_3)^2(2x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$y_2 = (x_3 - x_1)^2(2x_2 - x_1 - x_3)^2$$

$$y_3 = (x_1 - x_2)^2(2x_3 - x_1 - x_2)^2$$

Замѣчая, что:

$$(x_3 - x_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_3)(2x_1 - x_3 - x_2)$$

мы можемъ составить искомое уравненіе, составляя уравненіе, коего корни суть квадраты разностей квадратовъ разностей корней уравненія (§ 107, прим. 3).

Примѣръ 4. Составить уравненіе, коего корни суть:

$$y_1 = x_1(x_2 - x_3)^2 \quad , \quad y_2 = x_2(x_3 - x_1)^2 \quad , \quad y_3 = x_3(x_1 - x_2)^2$$

x_1, x_2, x_3 суть корни уравненія (4)?

Отвѣтъ. Если искомое уравненіе будетъ:

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0$$

то:

$$A_1 = \frac{9(a_1 a_2 - a_0 a_3)}{a_0^2}$$

$$A_2 = \frac{27(a_0 a_2^3 - 3a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0^2 a_3^2 + a_1^3 a_3)}{a_0^4}$$

$$A_3 = -\frac{27a_3(4a_0 a_2^3 + a_0^2 a_3^2 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3)}{a_0^5}$$

Примѣръ 5. Составить уравненіе, коего корни суть:

$$y_1 = x_1^2 + 2x_2 x_3 \quad , \quad y_2 = x_2^2 + 2x_1 x_3 \quad , \quad y_3 = x_3^2 + 2x_2 x_1$$

Отвѣтъ. Если искомое уравненіе будетъ:

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0$$

то:

$$A_1 = -\frac{3a_1^2}{a_0^2} \quad , \quad A_2 = \frac{27a_2(2a_1^2 - a_0 a_2)}{a_0^3}$$

$$-A_3 = \frac{108a_1^3 a_3 - 162a_0 a_1 a_2 a_3 + 54a_0 a_2^3 + 27a_0^2 a_3^2}{a_0^4}$$

Примѣръ 6. Составить уравненіе, коего корни были-бы:

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 \quad , \quad x_3^2 + x_1^2 - x_2^2 \quad , \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

x_1, x_2, x_3 суть корни кубическаго уравненія (4).

Отвѣтъ:

$$a_0^6 y^3 = 8a_0^4(3a_1^2 - 2a_0 a_2) y^2 - 6a_0^2(9a_1^4 - 12a_0 a_1^2 a_2 + 4a_0^2 a_1 a_3) y +$$

$$+ 2(240a_1^6 - 486a_0 a_1^4 a_2 + 108a_0^2 a_1^3 a_3 + 324a_0^2 a_1^2 a_2^2 - 72a_0^3 a_1 a_2 a_3 + 4a_0^4 a_3^2) = 0$$

Примѣръ 7. Составить уравненіе коего корни суть:

$$\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2}\quad,\quad\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}\quad,\quad\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$$

x_1, x_2, x_3 суть корни кубическаго уравненія (4):

Отвѣтъ:

$$a_0^2a_3^2y^3 - 3a_0(3a_1a_2a_3 - a_0a_3^2)y^2 + 3(9a_1^3a_3 - 15a_0a_1a_2a_3 + a_0^2a_3^2 + 9a_0a_2^3)y -$$
$$-(81a_1^2a_2^2 - 54a_1^3a_3 + 36a_0a_1a_2a_3 - 54a_0a_2^3 - a_0^2a_3^2) = 0$$

§ 149. *Задача.* Составить уравненіе, коего корни суть квадраты разностей корней уравненія:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a^n = 0 \tag{13}$$

Функція корней, коей различныя значенія суть корни искомаго уравненія, въ настоящемъ случаѣ есть:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)^2 \tag{14}$$

Такъ какъ всѣхъ различныхъ соединеній изъ n элементовъ по два есть $\frac{n(n-1)}{1.2} = \mu$, то функція (14) имѣетъ μ значеній, которыя будутъ корнями уравненія μ-й степени:

$$y^\mu + A_1y^{\mu-1} + A_2y^{\mu-2} + \dots + A_{\mu-1}y + A_\mu = 0 \tag{15}$$

Если чрезъ $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ означимъ всѣ μ значеній функціи (14), то коэфиціенты $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
(-1)A_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + \dots\dots\dots + y_\mu = \sum_1^\mu y_r \\
(-1)^2A_2 &= y_1y_2 + y_1x_3 + \dots\dots + y_{\mu-1}y_\mu = \sum_1^\mu y_ry_s \\
(-1)^3A_3 &= y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + \dots + y_{\mu-2}y_{\mu-1}y_\mu = \sum_1^\mu y_ry_sy_t \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(-1)^\mu A_\mu &= y_1y_2y_3y_4 \dots\dots y_{\mu-2}y_{\mu-1}y_\mu
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Эти коэфиціенты, симметрическія функціи корней $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, можно

бы было вычислить съ помощью способовъ изложенныхъ выше, но есть пріемъ, который ведетъ легче къ цѣли. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Положимъ:

$$\Phi(x) = (x-x_1)^{2m} + (x-x_2)^{2m} + \ldots + (x-x_n)^{2m} \tag{17}$$

подставляя въ это выраженіе послѣдовательно вмѣсто x его значенія $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и складывая результаты, найдемъ:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{r=n}\Phi(x_r) = &(x_1-x_2)^{2m} + (x_1-x_3)^{2m} + \ldots + (x_1-x_n)^{2m}\\ &+ (x_2-x_1)^{2m} + (x_2-x_3)^{2m} + \ldots + (x_2-x_n)^{2m}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (x_n-x_1)^{2m} + (x_n-x_2)^{2m} + \ldots + (x_n-x_{n-1})^{2m}\end{aligned} \tag{18}$$

Означая вторую часть чрезъ $2S_m$ будемъ имѣть:

$$2S_m = \sum_1^n \Phi(x_r) \tag{19}$$

Съ другой стороны изъ (17) имѣемъ:

$$\begin{aligned}\Phi(x) = &x^{2m} - 2mx^{2m-1}x_1 + \frac{2m(2m-1)}{1.2}x^{2m-2}x_1^2 + \ldots + x_1^{2m}\\ &+ x^{2m} - 2mx^{2m-1}x_2 + \frac{2m(2m-1)}{1.2}x^{2m-2}x_2^2 + \ldots + x_2^{2m}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ x^{2m} - 2mx^{2m-1}x_n + \frac{2m(2m-1)}{1.2}x^{2m-2}x_n^2 + \ldots + x_n^{2m}\end{aligned} \tag{20}$$

или:

$$\Phi(x) = nx^{2m} - 2ms_1x^{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1.2}s_2x^{2m-2} + \ldots + s_{2m} \tag{21}$$

полагая въ этомъ выраженіи послѣдовательно $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ и складывая результаты, найдемъ:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\Phi(x_r) = 2S_m = ns_{2m} - 2s_1s_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1.2}s_2s_{2m-2} + \ldots + ns_{2m} \tag{22}$$

такъ какъ члены равноотстоящіе отъ концевъ равны, то мы имѣемъ:

$$S_m = ns_{2m} - 2as_1 s_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1.2} s_2 s_{2m-2} - \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m} s_m s_m \qquad (23)$$

Такъ какъ симметрическія функціи $s_1, s_2, s_3 \ldots$ извѣстны (§ 131, 29), то давая числу m значенія $m = 1, 2, 3, \ldots$ мы найдемъ $S_1, S_2, S_3 \ldots$ Какъ приложеніе возьмемъ уравненіе 3-ей степени:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

и составимъ уравненіе, корни коего суть:

$$(x_1 - x_2)^2 \quad , \quad (x_1 - x_3)^2 \quad , \quad (x_2 - x_3)^2$$

пусть это уравненіе будетъ:

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0$$

эту задачу мы уже рѣшали выше (§ 148, пр. 3).

Въ § 131 мы нашли слѣдующія выраженія:

$$s_0 = n = 3 \quad , \quad a_0 s_1 = -a_1 \quad , \quad a_0^2 s_2 = a^2{}_1 - 2a_0 a_2$$

$$a_0^3 s_3 = -a_1^3 + 3a_0 a_1 a_2 - 3a_0^2 a_3$$

$$a_0^4 s_4 = a_1^4 - 4a_0 a^2{}_1 a_2 + 4a_0^2 a_1 a_3 - 2a_0^2 a^2{}_2$$

$$a_0^5 s_5 = -a_1^5 + 5a_0 a^3{}_1 a_2 - 5a_0^2 a^2{}_1 a_3 - 5a_0^2 a_1 a^2{}_2 + 5a_0^2 a_2 a_3$$

$$a_0^6 s_6 = a_1^6 - 6a_0 a_1^4 a_2 + 6a_0 a_1^3 a_3 - 9a_0^2 a^2{}_1 a^2{}_2 - 12a_0^3 a_1 a_2 a_3 - 2a_0^3 a_2^3 + 3a_0^4 a^2{}_3$$

откуда формула (23) даетъ:

$$a_0^2 S_1 = a_0^2(3s_2 - s^2{}_1) = 2a^2{}_1 - 6a_0 a_2$$

$$a_0^4 S_2 = a_0^4(3s_4 - 4s_1 s_3) = 2a^4{}_1 - 12a_0 a^2{}_1 a_2 + 18a_0^2 a^2{}_2$$

$$a_0^6 S_3 = a_0^6(3s_6 - 6s_1 s_5) + 15s_2 s_4 - 10s^2{}_3 =$$

$$= 2a^6{}_1 - 18a_0 a^4{}_1 a_2 - 12a_0^2 a^3{}_1 a_3 + 57a_0^2 a^2{}_1 a^2{}_2 + 54a_0^3 a_1 a_2 a_3 - 66a_0^3 a^2{}_2 - 81a_0^4 a^2{}_3$$

съ помощью этихъ выраженій мы найдемъ:

$$a_0^2A_1 = -a_0^2S_1 = -(2a^2_1 - 6a_0a_2)$$

$$a_0^4A_2 = -a_0^4\frac{S_2+A_1S_1}{2} = a^4_1 - 6a_0a^2_1a_2 + 9a_0^2a^2_2$$

$$a_0^4A_4 = -a_0^4\frac{S_3+A_1S_2+A_2S_3}{2} = 4a^3_1a_3 - a^2_1a^2_2 - 18a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a^3_2 + 27a_0^2a^2_3$$

послѣднее выраженіе есть то, что мы назвали *призначною* и которую нашли выше (§ 107) для кубическаго уравненія съ биноміальными коэфиціентами. Если означимъ эту призначную чрезъ Δ_3, то будемъ имѣть:

$$\Delta_3 = (2a^3_1 - 9a_0a_1a_2 + 27a_0^2a_3)^2 + 4(3a_0a_2 - a^2_1)^3 = G^2 + 4H^3 \qquad (24)$$

гдѣ G и H имѣютъ значенія:

$$H = \frac{3a_0a_2 - a^2_1}{9} \quad \text{и} \quad G = \frac{27a_0^2a_3 - 9a_0a_1a_2 + 2a^3_1}{27}$$

которыя отличаются отъ степеней G и H (§ 53, 18), взятыхъ съ биноміальными коэфиціентами.

Примѣръ 9. Дано уравненіе 3-й степени:

$$f(x) = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \qquad (25)$$

корни коего суть x_1, x_2, x_3. Составимъ уравненіе, коего корни были-бы:

$$f'(x_1) \quad , \quad f'(x_2) \quad , \quad f'(x_3)$$

Рѣшеніе. Если эти функціи означимъ чрезъ y_1, y_2, y_3, то будемъ имѣть:

$$\Sigma y_1 = -\frac{9H}{a_0} \quad , \quad \Sigma y_1y_2 = 0 \quad , \quad y_1y_2y_3 = \frac{27(G^2+4H_3)}{a_0^3}$$

откуда искомое уравненіе будетъ:

$$a_0^3y_3 + 9a_0^2Hy^2 - 27(G^2+4H^3) = 0 \qquad (26)$$

корни этого уравненія суть:

$$a_0f'(x_1) \quad , \quad a_0f'(x_2) \quad , \quad a_0f'(x_3)$$

Примѣръ 10. Составить уравненіе, коего-бы корни были:

$$\frac{1}{6}f''(x_1)\quad,\quad\frac{1}{6}f''(x_2)\quad,\quad\frac{1}{6}f''(x_3)$$

гдѣ:

$$\frac{1}{6}f''(x_1)=a_0x_1+a_1\quad,\quad\frac{1}{6}f''(x_2)=a_0x_2+a_1\quad,\quad\frac{1}{6}f''(x_3)=a_0x_3+a_1$$

Легко видѣть, что:

$$\frac{1}{6}\Sigma f''(x_1)=0\quad,\quad\frac{1}{6^2}\Sigma f''(x_1)f''(x_2)=-3H\quad,\quad\frac{1}{6^3}f''(x_1)f''(x_2)f''(x_3)=G$$

откуда искомое уравненіе будетъ:

$$y^3+3Hy+G=0$$

Легко видѣть, что это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (§ 52, 20).

Примѣръ 11. Дано уравненіе:

$$f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$

составить уравненіе, котораго корни были-бы:

$$f'(x_1)\quad,\quad f'(x_2)\quad,\quad f'(x_3)$$

Отвѣтъ:

$$a_0^6y^4+32a_0^3Gy^3+96a_0^2(2HJ_1-3a_0J_2)y^2+256(J^2_1-27J^2_2)=0$$

§ 150. Способъ для составленія уравненія, корни коего суть значенія раціональной функціи корней даннаго уравненія, прилагается одинаково и къ дробнымъ и къ цѣлымъ функціямъ: но можно всегда дробную раціональную функцію корней $x_1, x_2, x_3 \ldots$ преобразовать въ цѣлую и тѣмъ облегчить составленіе искомаго уравненія.

Пусть данная раціональная функція одного изъ корней уравненія:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\;.\;.\;.\;.\;+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (27)$$

будетъ:

$$y=\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}$$

эту дробную функцію можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$y=\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}=\varphi(x_1)\frac{\psi(x_2)\psi(x_3)\;.\;.\;.\;.\;.\;\psi(x_n)}{\psi(x_1)\psi(x_2)\;.\;.\;.\;.\;.\;\psi(x_n)}$$

знаменатель этой дроби очевидно есть симметрическая функція корней уравненія (27), слѣдовательно можетъ быть выражена въ коэфиціентахъ a_0 a_1 $a_2 \ldots$ уравненія (27). Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$y = k.\varphi(x_1).\psi(x_2).\psi(x_3) \; \ldots\ldots \; \psi(x_n)$$

гдѣ k есть числовой коэфиціентъ, зависящій только отъ коэфиціентовъ уравненія (27). Что же касается до произведенія:

$$\psi(x_2).\psi(x_3) \; \ldots\ldots \; \psi(x_n)$$

то его можно разсматривать какъ симметрическую функцію корней x_2 $x_3 \ldots$ x_n уравненія:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = a_0x^{n-1} + (a_1+a_0x_1)\,x^{n-2} + (a_2+a_1x_1+a_0x^2_1)\,x^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$+ (a_{n-1} + a_{n-2}x_1 + \ldots + a_1x_1^{n-2} + a_0x_1^{n-1}) = 0$$

слѣдовательно она можетъ быть вычислена въ коэфиціентахъ этого уравненія. Но коэфиціенты этого уравненія суть функціи отъ корня x_1 и отъ a_0, a_1, $a_2, \ldots$, коэфиціентовъ уравненія (27), слѣдовательно можно положить:

$$\psi(x_2)\,\psi(x_3)\,\psi(x_4) \; \ldots\ldots \; \psi(x_n) = F(x_1)$$

откуда:

$$y = \varphi(x_1).F(x_1) = \Phi(x_1)$$

гдѣ $\Phi(x_1)$ есть цѣлый раціональный полиномъ отъ корня x_1:

$$\Phi(x_1) = B_0 + B_1x_1 + B_2x^2_1 + \ldots\ldots + B_\mu x_1^\mu$$

Если степень μ этого полинома больше степени n уравненія (27), то всегда эту степень можно понизить до $n-1$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $\mu > n$ и раздѣлимъ $\Phi(x_1)$ на $f(x_1) = 0$, то будемъ имѣть:

$$\Phi(x_1) = Qf(x_1) + R = \Phi_1(x_1)$$

такъ какъ $f(x_1) = 0$. Остатокъ $\Phi_1(x_1)$ будетъ очевидно полиномъ степени не выше $n-1$.

Примѣръ. Всякая раціональная функція корня x_1 уравненія 3-ей степени:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

можетъ быть представлена, по предъидущему, въ формѣ:

$$A + Bx_1 + Cx^2_1$$

а этому выраженію можно дать еще форму дробную:

$$\frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}$$

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлимъ:

$$x^3_1 + px^2_1 + qx_1 + r = 0$$

на

$$Cx^2_1 + Bx_1 + A$$

то найдемъ:

$$x^3_1 + px^2_1 + qx_1 + r = Q(Cx^2_1 + Bx_1 + A) + R$$

гдѣ:

$$Q = \gamma x_1 + \delta \quad , \quad \text{а} \quad - R = \alpha x_1 + \beta$$

Замѣчая теперь, что:

$$x^3_1 + px^2_1 + qx_1 + r = 0$$

найдемъ:

$$A + Bx_1 + Cx^2_1 = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}$$

§ 151. Всякую дробную раціональную функцію нѣсколькихъ корней уравненія:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (28)$$

можно преобразовать въ цѣлую функцію тѣхъ же корней. Пусть:

$$y = \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

гдѣ функціи φ и ψ содержатъ не всѣ корни уравненія (28). Разсуждая, какъ выше, относительно корня x_1, функціи y можно дать форму:

$$y = A + Bx_1 + Cx^2_1 + \ldots$$

гдѣ A, B, C,... суть функціи не заключающія корня x_1, поэтому въ свою очередь могутъ быть преобразованы въ цѣлыя раціональныя функціи отъ

корня x_2, за тѣмъ ихъ коэфиціенты могутъ быть также преобразованы въ цѣлыя раціональныя функціи отъ корня x_3 и т. д.

Функціи двузначныя.

§ 152. Послѣ симметрическихъ или однозначныхъ функцій слѣдуютъ функціи *двузначныя*, т. е. такія, которыя отъ всевозможныхъ перестановленій элементовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, могутъ получить только два различныя значенія.

Мы сейчасъ увидимъ, что такія функціи существуютъ и покажемъ ихъ общую форму. Но прежде скажемъ нѣсколько словъ о *перестановленіяхъ* элементовъ въ функціяхъ. Если, напримѣръ, въ функціи $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ требуется замѣстить элементы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ элементами $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n}$, гдѣ $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ суть числа $1, 2, 3, \ldots, n$ только въ иномъ порядкѣ, то такое замѣщеніе называется *подстановленіемъ* и изображается символомъ:

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & x_{i_3} & \ldots & x_{i_n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \tag{29}$$

или просто опуская элементы, а ставя одни индексы:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{30}$$

такой символъ для краткости будемъ обозначать буквою S. Слѣдовательно:

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \ldots & x_{i_n} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$$

или:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$$

Если нѣтъ надобности писать явно подстановленіе, то пишутъ:

$$S\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \tag{31}$$

Если подстановленіе перемѣщаетъ только два какіе нибудь элемента, то оно называется *перемѣщеніемъ* (transposition) и обозначается символомъ $(x_\lambda x_\mu) = \tau$, слѣдовательно:

$$(x_\lambda x_\mu)\,\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_\mu, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n)$$

очевидно:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_\mu \ldots x_\lambda \ldots x_n \\ x_1 & x_2 \ldots x_\lambda \ldots x_\mu \ldots x_n \end{pmatrix} = (x_\lambda x_\mu) = \tau \qquad (32)$$

Всякое подстановленіе можетъ быть замѣщено рядомъ *перемѣщеній* слѣдующимъ образомъ, сначала перемѣщаютъ два элемента, напримѣръ x_1 и x_i, такъ чтобы элементъ x_i былъ поставленъ на требуемомъ подстановленіемъ мѣстѣ, затѣмъ дѣлается подстановленіе остальныхъ элементовъ на требуемыя мѣста. Это послѣднее подстановленіе опять замѣщается перемѣщеніемъ и подстановленіемъ и т. д., пока послѣдовательными перемѣщеніями двухъ элементовъ не будетъ совершено требуемое подстановленіе:

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} \ldots x_{i_n} \\ x_1 & x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_i)(x_2 x_{i_\mu}) \ldots (x_\lambda x_\mu)\, \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (33)$$

одно и тоже подстановленіе можетъ быть, очевидно, совершено различными, и въ различномъ порядкѣ, перемѣщеніями.

Примѣръ. Возьмемъ напримѣръ подстановленіе:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_7 & x_5 & x_4 & x_1 & x_6 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_7 & x_5 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 \end{pmatrix}$$

элементы x_4 и x_6 опущены, такъ какъ онѣ подстановленіемъ не перемѣщаются.

Легко видѣть, что данное подстановленіе можетъ быть совершено слѣдующими перемѣщеніями:

$$(x_1 x_3)(x_1 x_5)(x_2 x_7)\varphi = (x_1 x_3)(x_1 x_5)(x_1 x_2)(x_1 x_7)(x_1 x_2)\varphi =$$

$$= (x_3 x_4)(x_5 x_6)(x_1 x_7)(x_3 x_7)(x_1 x_6)(x_2 x_7)(x_4 x_5)(x_2 x_4)(x_2 x_6)\varphi$$

и какъ видимъ число перемѣщеній 3, 7, 9 каждый разъ нечетное.

§ 153. ***Функціи двузначныя и знакоперемѣнныя.*** Положимъ, что существуетъ такая функція элементовъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, которая при всевозможныхъ перестановленіяхъ элементовъ получаетъ только два значенія. Пусть такая функція будетъ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а два ея значенія φ_1 и φ_2 или:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

По свойству функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какое-бы не сдѣлали перестановленіе элементовъ всегда получимъ или $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точно также всѣ перестановленія, въ функціяхъ $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

дадутъ въ результатѣ φ_1 или φ_2. Если въ обѣихъ функціяхъ $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сдѣлаемъ какое нибудь перестановленіе:

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \ldots & x_{i_n} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

то результаты:

$$\varphi_1(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \quad , \quad \varphi_2(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$$

будутъ очевидно различны. Слѣдовательно перестановленіе, которое не измѣняетъ функцію φ_1 не измѣнитъ и функцію φ_2, а перестановленіе, которое измѣняетъ φ_1 въ φ_2 измѣнитъ φ_2 въ φ_1. Составимъ изъ функцій φ_1 и φ_2 функцію:

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Всякое подстановленіе, которое не измѣнитъ функціи φ_1 не измѣнитъ и функціи φ_2, а слѣдовательно не измѣнитъ и Φ, а подстановленіе, которое измѣнитъ φ_1 въ φ_2 измѣнитъ φ_2 въ φ_1, слѣдовательно, измѣнитъ Φ въ $\varphi_2 - \varphi_1$, т. е. въ $-\Phi$.

Изъ этого заключаемъ, что если существуетъ двузначная функція элементовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то существуетъ и такая функція, которая отъ всевозможныхъ перестановленій мѣняетъ только знакъ Такія функціи называются *знакоперемѣнными* (alternées).

§ 154. Если

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

есть функція знакоперемѣнная, то есть по крайней мѣрѣ хоть одно перемѣщеніе, которое измѣняетъ ея знакъ; пусть оно будетъ $(x_\lambda x_\mu)$, слѣдовательно:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_\mu, \ldots, x_n) = -\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n)$$

при $x_\lambda = x_\mu$ функція равна сама себѣ съ противнымъ знакомъ, въ этомъ случаѣ она равна нулю; откуда будемъ имѣть уравненіе:

$$\Phi x_1, x_2, x_3, \ldots, x, \ldots, x_\mu, \ldots, x_n) = 0$$

коего корень есть $x = x_\mu$. Если x_μ есть корень предъидущаго уравненія, то его первая часть дѣлится на $x - x_\mu$, а слѣдовательно:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_\mu, \ldots, x_n)$$

дѣлится на $x_\lambda - x_\mu$. Если $x_\lambda - x_\mu$ есть множитель функціи Φ, то $(x_\lambda - x_\eta)^2$

есть множитель въ функціи Φ^2. Но такъ какъ Φ есть функція знакоперемѣнная, то Φ^2 есть функція симметрическая, а слѣдовательно, содержитъ всѣ множители формы $(x_\lambda - x_\mu)^2$, т. е. имѣетъ множителемъ функцію:

$$\begin{array}{r} (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2 \ldots\ldots (x_1-x_n)^2 \\ (x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2 \ldots\ldots (x_2-x_n)^2 \\ (x_3-x_4)^2 \ldots\ldots (x_3-x_n)^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ (x_{n-1}-x_n)^2 \end{array} \qquad (34)$$

Эту симметрическую функцію называютъ *призначною* (discriminante) и означаютъ всегда символомъ Δ_n, она есть, очевидно, ничто иное, какъ послѣдній членъ въ уравненіи, корни коего суть квадраты разностей корней $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ уравненія (1).

Такъ какъ § 131:

$$f'(x) = a_0(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots\ldots$$
$$+ (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

то:

$$f'(x_1) = a_0(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots.(x_1-x_n)$$
$$f'(x_2) = a_0(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots.(x_2-x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f'(x_n) = a_0(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots.(x_n-x_{n-1})$$

перемножая, легко видѣть, что:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.a_0^n\Delta_n = f'(x_1)f'(x_2)\ldots.f(x_n) \qquad (35)$$

§ 155. *Функція знакоперемѣнная.* Легко видѣть, что:

$$\begin{array}{r} \sqrt{\Delta_n} = (x_1-x_2)(x_1-x_3) \ldots\ldots (x_1-x_n) \\ (x_2-x_3) \ldots\ldots (x_2-x_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ (x_{n-1}-x_n) \end{array} \qquad (36)$$

есть функція знакоперемѣнная. Въ самомъ дѣлѣ, если сдѣлаемъ въ ней перемѣщеніе (x_1x_2), то первый множитель (x_1-x_2) въ первой линіи измѣнится

въ x_2-x_1, а остальные перейдутъ въ множителей второй линіи, а множители второй линіи перейдутъ въ множителей первой линіи, остальные же множители, очевидно, не измѣнятся, слѣдовательно, функція $\sqrt{\Delta_n}$ измѣнитъ отъ этого перемѣщенія знакъ. Но такъ какъ $\sqrt{\Delta_n}$ составлена одинаково относительно каждаго изъ множителей формы $(x_\lambda-x_\mu)$, то каждое изъ перемѣщеній формы $(x_\lambda x_\mu)$ измѣнитъ знакъ функціи $\sqrt{\Delta_n}$. Изъ этого заключаемъ, что четное число перемѣщеній не измѣняетъ функцію $\sqrt{\Delta_n}$, а нечетное измѣняетъ ея знакъ. Но всякое перестановленіе, какъ мы показали выше (§ 152), состоитъ изъ ряда перемѣщеній, слѣдовательно, каждое подстановленіе, состоящее изъ четнаго числа перемѣщеній, не измѣняетъ функцію $\sqrt{\Delta_n}$, а состоящее изъ нечетнаго числа измѣняетъ ея знакъ. Изъ этого можно вывесть слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Каждое подстановленіе можетъ быть замѣщено только четнымъ или только нечетнымъ числомъ перемѣщеній, въ какомъ бы порядкѣ онѣ не совершались.

§ 156. Изъ сказаннаго видимъ, что каждая знакоперемѣнная функція имѣетъ форму:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\sqrt{\Delta_n} \tag{37}$$

гдѣ $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть цѣлая симметрическая, совершенно произвольная функція, а $\sqrt{\Delta_n}$ есть квадратный корень изъ призначной уравненія:

$$f(x) = 0$$

Убѣдившись въ существованіи знакоперемѣнной функціи, легко показать и существованіе *двузначной*.

Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ есть двузначная функція, пусть φ_1 и φ_2 суть оба ея значенія при перемѣщеніяхъ элементовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, функціи $\varphi_1+\varphi_2$ и $\varphi_1-\varphi_2$, первая симметрическая, а вторая знакоперемѣнная, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$\varphi_1+\varphi_2 = 2\psi_1 \quad , \quad \varphi_1-\varphi_2 = 2\psi_2\sqrt{\Delta_n}$$

гдѣ ψ_1 и ψ_2 суть симметрическія функціи. Откуда, складывая и вычитая, найдемъ:

$$\varphi_1 = \psi_1+\psi_2\sqrt{\Delta_n} \quad , \quad \varphi_2 = \psi_1-\psi_2\sqrt{\Delta_n} \tag{37}$$

Слѣдовательно, общая форма двузначной функціи есть:

$$\varphi = \psi_1+\psi_2\sqrt{\Delta_n} \tag{38}$$

гдѣ ψ_1 и ψ_2 суть симметрическія функціи, а $\sqrt{\Delta_n}$ есть квадратный корень изъ призначной уравненія $f(x)=0$. Обратно, функція, имѣющая предъидущую форму, есть *двузначная*.

§ 157. Легко теперь показать, что всякая двузначная функція есть корень квадратнаго уравненія.

Пусть φ_1 и φ_2 будутъ два значенія функціи φ. Мы выше видѣли, что:

$$\varphi_1+\varphi_2=2\psi_1$$

а соображаясь съ (37'), найдемъ:

$$\varphi_1\varphi_2=\psi^2_1-\psi^2_2\Delta_n$$

слѣдовательно:

$$\varphi^2-2\psi_1\varphi+\psi^2_1-\psi^2_2\Delta_n=0 \tag{39}$$

За двузначной функціей слѣдуютъ функціи многозначныя, о которыхъ будемъ говорить ниже, здѣсь скажемъ еще нѣсколько словъ о функціи знакоперемѣнной и нѣкоторыхъ симметрическихъ функціяхъ разностей корней уравненія.

§ 158. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть корни уравненія:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{40}$$

легко показать, что:

$$\pm\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x^2_1 & x^2_2 & x^2_3 & \ldots & x^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{matrix} (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n) \\ (x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n) \\ (x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{n-1}-x_n) \end{matrix} \tag{41}$$

Въ самомъ дѣлѣ, при $x_\lambda=x_\mu$ предъидущій опредѣлитель обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ λ и μ отъ 1 до n включительно, λ всегда меньше μ. Слѣдовательно, этотъ опредѣлитель составленъ изъ множителей $x_\lambda-x_\mu$, а отличается только коэфиціентомъ независимымъ отъ x_λ. Но если развернемъ опредѣлителя, то найдемъ, что и коэфиціенты одинаковы. Изъ этого видимъ, что опредѣлитель представляетъ знакоперемѣнную функ-

цію $\sqrt{\Delta_n}$. Если его возвысимъ въ квадратъ, то соображаясь съ § 70, найдемъ:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdot & \cdot & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdot & \cdot & s_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{matrix} (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2\dots(x_1-x_n)^2 \\ (x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2\dots(x_2-x_n)^2 \\ (x_3-x_4)^2\dots(x_3-x_n)^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{n-1}-x_{n-2})^2(x_{n-1}-x_n)^2 \\ (x_{n-1}-x_n)^2 \end{matrix} \qquad (42)$$

Если $m<n$, то по § 68, легко видѣть, что существуетъ слѣдующее выраженіе:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & s_m \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdot & \cdot & s_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & s_{m+1} & \cdot & \cdot & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & x_m \\ x^2_1 & x^2_2 & x^2_3 & \cdot & \cdot & x^2_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & x_3^{m-1} & \cdot & \cdot & x_m^{m-1} \end{vmatrix}^2$$

гдѣ символъ Σ обозначаетъ сумму всѣхъ опредѣлителей, которые изъ даннаго получаются выбирая изъ n корней $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ по m корней $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$.

Примѣры:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma(x_1-x_2)^2 \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = \Sigma(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2$$

и т. д.

Это суть симметрическія функціи разностей корней уравненія:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Если предъидущіе опредѣлители означимъ символами:

$$D_2^2(x_1, x_2) \quad , \quad D_3^2(x_1, x_2, x_3) \quad , \quad D_3^2(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad , \quad \ldots\ldots$$

то будемъ имѣть:

$$D_2^2(x_1x_2) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & a_0s_1 + a_1s_0 \\ s_1 & a_0s_2 + a_1s_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} n & (n-1)a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3^2(x_1x_2x_3) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & s_0 & a_0s_1 + a_1s_0 & a_0s_2 + a_1s_1 + a_2s_0 \\ s_0 & a_0s_1 + a_1s_0 & a_0s_2 + a_1s_1 + a_2s_0 & a_0s_3 + a_1s_2 + a_2s_1 + a_3s_0 \\ s_1 & a_0s_2 + a_1s_1 & a_0s_3 + a_1s_2 + a_2s_1 & a_0s_4 + a_1s_3 + a_2s_2 + a_3s_1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_1 \\ n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & (n-3)a_3 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 \end{vmatrix}$$

и т. д.

§ 159. Подобно тому какъ мы нашли выраженіе, составленное изъ квадратовъ разностей корней уравненія, извѣстное подъ именемъ дискриминанта или призначной, существуетъ еще другая зависимость между корнями, составленная изъ произведеній ихъ суммъ; такое выраженіе носитъ названіе *геминанта* (geminant) и представляется формулой:

$$\begin{aligned} G_n = \pm (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4) \;\ldots\ldots\; & (x_1+x_{n-1})(x_1+x_n) \\ (x_2+x_3)(x_2+x_4) \;\ldots\ldots\; & (x_2+x_{n-1})(x_2+x_n) \\ (x_3+x_4) \;\ldots\ldots\; & (x_3+x_{n-1})(x_3+x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & (x_{n-1}+x_n) \end{aligned}$$

Дальнѣйшимъ изслѣдованіемъ свойствъ подобныхъ выраженій мы не займемся.

ГЛАВА XII.

Исключеніе — элиминація.

§ 160. Если дано n однородныхъ уравненій между n перемѣнными или неоднородныхъ между $n-1$ перемѣнными, то всегда можно такъ совокупить эти уравненія, что получится уравненіе $R=0$, не заключающее перемѣнныхъ, и выражающее зависимость только между коэфиціентами уравненій, въ силу которой, данныя уравненія совмѣстно существуютъ, т. е. удовлетворяются всѣ одной системой неизвѣстныхъ. Функція коэфиціентовъ R, выраженная въ цѣлой раціональной формѣ, называется *выводомъ* (resultant или eliminant).

Здѣсь мы займемся въ особенности только двумя уравненіями съ однимъ неизвѣстнымъ. Въ этомъ случаѣ $R=0$ выражаетъ условіе, что два уравненія совмѣстно существуютъ, т. е. оба удовлетворяются одною и тою же величиною перемѣннаго. Покажемъ, для поясненія сказаннаго, на частномъ примѣрѣ какъ получить функцію R.

Пусть будутъ даны два уравненія:

$$a_0x^2+2a_1x+a_2=0 \quad , \quad b_0x^2+2b_1x+b_2=0 \tag{1}$$

рѣшая эти уравненія и приравнивая полученныя выраженія для x, будемъ имѣть:

$$-\frac{a_1}{a_0}+\frac{\sqrt{a_1^2-a_0a_2}}{a_0}=-\frac{b_1}{b_0}+\frac{\sqrt{b_1^2-b_0b_2}}{b_0}$$

помножая обѣ части на a_0b_0, найдемъ:

$$a_0b_1-a_1b_0=a_0\sqrt{b_1^2-b_0b_2}-b_0\sqrt{a_1^2-a_0a_2}$$

возвышая обѣ части въ квадратъ и раздѣляя на a_0b_0 (R не уничтожается съ уничтоженіемъ a_0 или b_0) и возвышая еще разъ въ квадратъ, найдемъ наконецъ:

$$R=4(a_0a_2-a_1^2)(b_0b_2-b_1^2)-(a_0b_2+a_2b_0-2a_1b_1)^2 \tag{2}$$

Такой способъ нахожденія вывода R весьма ограниченъ, такъ какъ вообще нѣтъ возможности выразить алгебраической формулой корень уравненія выше четвертой степени. Слѣдовательно необходимо было искать для этого другіе способы, мы теперь къ этому и приступимъ.

Способъ исключенія съ помощью симметрическихъ функцій.

§ 161. Пусть данныя два уравненія будутъ:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (3)$$

$$f_1(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0 \qquad (4)$$

требуется найти условіе, при которомъ эти уравненія имѣютъ общій корень?

Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ будутъ корни уравненія (3), а $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_m$ корни уравненія (4). Если уравненія (3) и (4) имѣютъ общій корень x_1, то необходимо и достаточно, чтобы уничтожалась одна изъ функцій:

$$f_1(x_1) \;,\; f_1(x_2) \;,\; f_1(x_3) \;,\; \ldots\ldots \;,\; f_1(x_n)$$

а слѣдовательно и ихъ произведеніе:

$$f_1(x_1).f_1(x_2).f_1(x_3) \;\ldots\ldots\; f_1(x_n) \qquad (5)$$

но это произведеніе есть симметрическая функція корней уравненія (3), слѣдовательно, она можетъ быть выражена цѣлой раціональной функціей его коэфиціентовъ. Такимъ образомъ получимъ цѣлую раціональную функцію коэфиціентовъ уравненій (3) и (4), которая и есть искомый *выводъ*.

Такъ какъ мы имѣемъ:

$$f_1(x) = b_0(x-x'_1)(x-x'_2) \;\ldots\ldots\ldots\; (x-x'_m)$$

то:

$$f_1(x_1) = b_0(x_1-x'_1)(x_1-x'_2) \;\ldots\ldots\; (x_1-x'_m)$$

$$f_1(x_2) = b_0(x_2-x'_1)(x_2-x'_2) \;\ldots\ldots\; (x_2-x'_m) \qquad (6)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1(x_n) = b_0(x_n-x'_1)(x_n-x'_2) \;\ldots\ldots\; (x_n-x'_m)$$

Если перемѣнимъ знакъ у nm множителей и перемножимъ эти уравненія, взявъ вмѣстѣ множителей находящихся въ однихъ колоннахъ, то найдемъ:

$$a_0^m f_1(x_1).f_1(x_2)\ldots f_1(x_n) = (-1)^{nm} b_0^n f(x'_1) f(x'_2) \ldots f(x'_m) \qquad (7)$$

слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$R = (-1)^{nm} b_0^n f(x'_1).f(x'_2)\ldots f(x'_m) = a_0^m f_1(x_1) f_1(x_2) \ldots f_1(x_n) \qquad (8)$$

оба эти выраженія для R суть цѣлыя раціональныя функціи коэфиціентовъ уравненій (3) и (4), и уничтожаются только тогда, когда уравненія (3) и (4) имѣютъ общій корень. Онѣ тождественны въ коэфиціентахъ уравненій (3) и (4).

Примѣръ. Найти выводъ уравненій:

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0 \quad , \quad b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

Рѣшеніе. Если x_1 и x_2 суть корни перваго уравненія, то:

$$R=(b_0x_1^2+b_1x_1+b_2)(b_0x_2^2+b_1x_2+b_2)$$

откуда перемножая, найдемъ:

$$R=b_0^2x_1^2x_2^2+b_1^2x_1x_2+b_2^2+b_0b_1\sum x_1^2x_2+b_0b_2s_2+b_1b_2s_1 \tag{9}$$

подставляя вмѣсто симметрическихъ функцій корней x_1 и x_2 ихъ выраженія въ коэфиціентахъ a_0, a_1, a_2 будемъ имѣть:

$$R=(a_0b_2-a_2b_0)^2+(a_1b_0-a_0b_1)(a_1b_2-a_2b_1)$$

§ 162. *Свойства вывода.—Свойство 1.* Порядокъ вывода двухъ уравненій въ ихъ коэфиціентахъ равенъ суммѣ степеней уравненій и при томъ такъ, что коэфиціенты перваго уравненія входятъ въ выводъ въ степени второго, а коэфиціенты второго уравненія входятъ въ степени перваго.

Доказательство. Это видно, разсматривая формы вывода, данныя выраженіями (8). Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе, напр., $a_0f_1(x_1)f_1(x_2)\ldots f_1(x_n)$ относительно коэфиціентовъ $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$, очевидно, n-й степени, но оно есть симметрическая функція корней $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, которая состоитъ изъ симметрическихъ функцій формы:

$$\sum x_1^m x_2^m \ldots\ldots x_n^m$$

а слѣдовательно, m-й степени въ коэфиціентахъ a_0, a_1, a_2, a_n (§ 94).

Свойство 2. Вѣсъ вывода двухъ уравненій n-й и m-й степени равенъ произведенію mn степеней уравненій.

Доказательство. Мы выше видѣли (7), что:

$$\pm R(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots b_n)=a_0^m b_0^m P(x_\lambda-x'_\mu) \tag{10}$$

гдѣ символъ P означаетъ произведеніе линейныхъ множителей $x_\lambda-x'_\mu$ для всѣхъ значеній $\lambda=1, 2, 3, \ldots n$ и $\mu=1, 2, 3, \ldots m$, слѣдовательно, числомъ nm.

Помножимъ корни уравненій (2) и (3) на h, а для этого, какъ мы выше видѣли (§ 49), надобно только коэфиціенты a и b помножить на h въ степени, равной индексу каждаго коэфиціента, слѣдовательно, мы будемъ имѣть:

$$\pm P(a_0, ha_1, ha^2_2, \ldots h^n a_n, b_0, hb_1, h^2 b_2, \ldots h^m b_m) = P(hx_\lambda - hx'_\mu)$$

$$= a_0^m b_0^n h^{nm} P(x_\lambda - x'_\mu)$$

но для этого равенства необходимо, чтобы вѣсъ каждаго члена въ функціи R былъ равенъ nm. Зная, такимъ образомъ, степень вывода въ коэфиціентахъ уравненій и его вѣсъ, можно составить и его форму съ неопредѣленными коэфиціентами, какъ мы это видѣли въ симметрическихъ функціяхъ.

Примѣръ. Пусть данныя уравненія будутъ:

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

Такъ какъ выводъ будетъ втораго порядка относительно коэфиціентовъ каждаго изъ уравненій, а четвертаго относительно коэфиціентовъ обоихъ уравненій, то его членами могутъ быть только произведенія:

$$a_0^2, \quad a^2_1, \quad a^2_2, \quad a_0 a_1, \quad a_0 a_2, \quad a_1 a_2$$

$$b_0^2, \quad b^2_1, \quad b^2_2, \quad b_0 b_1, \quad b_0 b_2, \quad b_1 b_2$$

но вѣсъ вывода долженъ быть 4, слѣдовательно, членами вывода могутъ быть только:

$$a_0^2 b^2_2, \; a^2_2 b_0^2, \; a_0 b_0 a_2 b_2, \; b_0 a^2_1 b_2, \; a_0 a_1 b_1 b_2, \; b_0 a_1 b_1 a_2, \; b_0 b^2_1 a_2, \; a^2_2, \; b^2_2$$

слѣдовательно, форма вывода будетъ:

$$R = Aa^2_1 b^2_2 + Ba^2_2 b_0^2 + Ca_0 b_0 a_2 b_2 + Db_0 a^2_1 b_2 + Ea_0 a_1 b_1 b_2 + Fb_0 a_1 b_1 a_2 +$$

$$+ Gb_0 b^2_1 a_2 + Ha_0^2 a^2_2 + Kb_0^2 b^2_2$$

остается только опредѣлить коэфиціенты.

Свойство 3. Если корни обоихъ данныхъ уравненій увеличимъ однимъ и тѣмъ же количествомъ, то выводъ уравненій не измѣнится:

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ:

$$R = a_0{}^m b_0{}^n P(x_\lambda - x'_\mu) = a_0{}^m b_0{}^n P(x_\lambda + h - x_\mu - h)$$

это очевидно въ силу того, что выводъ есть произведеніе всѣхъ nm разностей между корнями уравненій (3) и (4).

Свойство 4. Выводъ R двухъ уравненій не измѣняется (исключая знака, если nm есть нечетное число), если уравненія будутъ преобразованы въ другія, коихъ корни будутъ обратные корнямъ данныхъ.

Доказательство. Дѣлая данное преобразованіе въ формулѣ:

$$R = a_0^m b_0^n P(x_\lambda - x'_\mu)$$

будемъ имѣть:

$$R_1 = a_n^m b_m^n (-1)^{nm} \frac{P(x_\lambda - x_\mu)}{(x_1 x_2 \ldots x_n)^m (x'_1 x'_2 \ldots x'_m)^n}$$

но:

$$x_1 x_2 x_3 \;.\;.\;.\; x_n = (-1)^n \frac{a^n}{a_0} \quad , \quad x'_1 x'_2 x'_3 \;.\;.\;.\; x'^m = (-1)^m \frac{b_m}{b_0}$$

подставляя, найдемъ:

$$R_1 = a_0^m b_0^n (-1)^{nm} P(x_\lambda - x'_\mu) = (-1)^{nm} R \tag{11}$$

Изъ этого слѣдуетъ, что въ выводѣ двухъ уравненій коэфиціенты съ дополнительными индексами обоихъ уравненій a_0 и a_n, a_1 и a_{n-1}, ..., b_0 и b_m, b_1 и b_{m-1}, ... могутъ быть перемѣщены, отъ чего выводъ не измѣняется.

Свойство 5. Если оба уравненія будутъ преобразованы подставляя вмѣсто x выраженіе:

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{12}$$

и приведены къ цѣлой формѣ помноженіемъ на степень множителя $\gamma x + \delta$, то:

$$R_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{nm} . R$$

гдѣ R_1 есть выводъ преобразованнаго уравненія.

Доказательство. Мы имѣемъ:

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \;.\;.\;.\;.\;.\;. (x - x_n)$$

$$f_1(x) = b_0(x - x'_1)(x - x'_2) \;.\;.\;.\;.\;. (x - x'_m)$$

Преобразуя множители $x-x_2$, $x-x'_2$ найдемъ:

$$x-x_2 \quad \text{сдѣлается} \quad (\alpha-\gamma x_2)\left(x-\frac{\delta x_2-\beta}{\alpha-\gamma x_2}\right)$$

а

$$x-x'_2 \quad \text{сдѣлается} \quad (\alpha-\gamma x'_2)\left(x-\frac{\delta x'_2-\beta}{\alpha-\gamma x'_2}\right)$$

перемножая всѣхъ этихъ множителей, полагая $r=1, 2, 3, \ldots, n$, въ первомъ, и $r=1, 2, 3, \ldots, m$ во второмъ и замѣчая что:

$$a_0 \quad \text{дѣлается} \quad a_0(\alpha-\beta x_1)(\alpha-\beta x_2) \;.\;.\;.\;.\;. (\alpha-\beta x_n)$$

$$b_0 \quad \text{дѣлается} \quad b_0(\alpha-\beta x'_1)(\alpha-\beta x'_2) \;.\;.\;.\;.\;. (\alpha-\beta x'_m)$$

и что x_r и x'_r преобразуются въ

$$\frac{\delta x_2-\beta}{\alpha-\gamma x_2}, \quad \frac{\delta x'_2-\beta}{\alpha-\gamma x'_2}$$

найдемъ:

$$x_2-x'_2 \quad \text{сдѣлается} \quad \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(x_2-x'_2)}{(\alpha-\gamma x_2)(\alpha-\gamma x'_2)}$$

откуда:

$$a_0^m b_0^n P(x_\lambda-x'_\mu) \quad \text{сдѣлается} \quad a_0^m b_0^n(\alpha\delta-\beta\gamma)^{mn}P(x_2-x'_2)$$

т. е. выводъ преобразованнаго уравненія будетъ:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^{nm}.R \tag{13}$$

Свойство 6. Выводъ двухъ уравненій удовлетворяетъ слѣдующему дифференціальному уравненію:

$$na_0\frac{\partial R}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial R}{\partial a_2}+(n-2)a_2\frac{\partial R}{\partial a_3}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial R}{\partial a_n}+$$
$$+mb_0\frac{\partial R}{\partial b_1}+(m-1)b_2\frac{\partial R}{\partial b_2}+\ldots+b_{m-1}\frac{\partial R}{\partial b_m}=0 \tag{14}$$

или:

$$a_0\frac{\partial R}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial R}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial R}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial R}{\partial a_n}+$$
$$+b_0\frac{\partial R}{\partial b_1}+2b_1\frac{\partial R}{\partial b_2}+3b_2\frac{\partial R}{\partial b_3}+\ldots+mb_{m-1}\frac{\partial R}{\partial b_m}=0 \tag{15}$$

если уравненія будутъ даны съ биноміальными коэфиціентами.

Доказательство. Такъ какъ коэфиціенты a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ суть функціи корней x_1, $x_2, \ldots, x_n$, а коэфиціенты b_1, $b_2, \ldots, b_m$ суть функціи корней x'_1, x'_2, $x'_3, \ldots, x'_m$, то мы вообще имѣемъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \frac{\partial R}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} \\ \frac{\partial R}{\partial x'_j} &= \frac{\partial R}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial x'_j} + \frac{\partial R}{\partial b_2}\frac{\partial b_2}{\partial x'_j} + \frac{\partial R}{\partial b_3}\frac{\partial b_3}{\partial x'_j} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial b_m}\frac{\partial b_m}{\partial x'_j} \end{aligned} \qquad (16)$$

Но легко видѣть изъ формы вывода, который имѣетъ форму:

$$R = (x_\lambda - x'_\mu)\,Q$$

что:

$$\frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = Q \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial x'_\mu} = -Q$$

откуда:

$$\frac{\partial R}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial R}{\partial x'_\mu} = 0$$

Слѣдовательно:

$$\sum_1^n \frac{\partial R}{\partial x_i} + \sum_1^m \frac{\partial R}{\partial x'_j} = 0 \qquad (17)$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_1^n \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \frac{\partial R}{\partial a_1}\sum_1^n \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial a_2}\sum_1^n \frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial a_n}\sum_1^n \frac{\partial a_n}{\partial x_i} \\ \sum_1^m \frac{\partial R}{\partial x'_j} &= \frac{\partial R}{\partial b_1}\sum_1^m \frac{\partial b_1}{\partial x'_j} + \frac{\partial R}{\partial b_2}\sum_1^m \frac{\partial b_2}{\partial x'_j} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial b_m}\sum_1^m \frac{\partial b_m}{\partial x'_j} \end{aligned} \qquad (18)$$

гдѣ Σ распространяется на всѣ значенія i отъ 1 до n включительно, и на значенія j отъ 1 до m включительно.

Если теперь примемъ во вниманіе формулы (§ 100, 66 и 67), то найдемъ:

$$\begin{aligned} \sum_1^n \frac{\partial R}{\partial x_i} &= na_0\frac{\partial R}{\partial a_1} + (n-1)a_1\frac{\partial R}{\partial a_2} + (n-2)a_2\frac{\partial R}{\partial a_3} + \ldots + a_{n-1}\frac{\partial R}{\partial a_n} \\ \sum_1^m \frac{\partial R}{\partial x'_j} &= mb_0\frac{\partial R}{\partial b_1} + (m-1)b_1\frac{\partial R}{\partial b_2} + (m-2)b_2\frac{\partial R}{\partial b_3} + \ldots + b_{m-1}\frac{\partial R}{\partial b_m} \end{aligned} \qquad (19)$$

или:

$$\sum_1^n \frac{\partial R}{\partial x_i} = a_0 \frac{\partial R}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial R}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial R}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial R}{\partial a_n}$$

$$\sum_1^m \frac{\partial R}{\partial x'_j} = b_0 \frac{\partial R}{\partial b_1} + 2b_1 \frac{\partial R}{\partial b_2} + 3b_2 \frac{\partial R}{\partial b_3} + \ldots + mb_{m-1} \frac{\partial R}{\partial b_m} \qquad (20)$$

если данныя уравненія будутъ съ биноміальными коэфиціентами.

Складывая уравненія (19) и соображаясь съ уравненіемъ (17), найдемъ уравненіе (14), а складывая уравненіе (20) найдемъ уравненіе (15).

Примѣръ. Для уравненій:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

форма вывода, какъ мы нашли выше:

$$R = Aa_0^2b_2^2 + Ba_2^2b_0^2 + Ca_0a_2b_0b_2 + Da_1^2b_0b_2 + Ea_0a_1b_1b_2 + Fa_1a_2b_0b_2 +$$
$$+ Ga_0a_2b_1^2 + Ha_0^2a_2^2 + Kb_0^2b_2^2$$

выводъ этотъ долженъ удовлетворять уравненію:

$$2a_0 \frac{\partial R}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial R}{\partial a_2} + 2b_0 \frac{\partial R}{\partial b_1} + b_1 \frac{\partial R}{\partial b_2} = 0$$

подставляя въ это уравненіе предъидущее выраженіе для R и приравнивая нулю коэфиціенты у различныхъ членовъ, найдемъ слѣдующія уравненія, изъ которыхъ опредѣлятся коэфиціенты A, B, C, . . .

$$4D+2E+C=0 \quad , \quad 4G+2F+C=0 \quad , \quad A+E=0 \quad , \quad D+F=0$$
$$B+F=0 \quad , \quad E+G=0 \quad , \quad H=0 \quad , \quad R=0$$

откуда:

$$B=A \ , \ C=-2A \ , \ D=A \ , \ E=-A \ , \ F=-A \ , \ G=A \ , \ H=0 \ , \ K=0$$

§ 163. *Опредѣленіе общаго корня двухъ уравненій.* Если мы имѣемъ выводъ:

$$R=0$$

двухъ уравненій:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \\ f_1(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots\ldots + b_{m-1}x + b_m = 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

то легко опредѣлить ихъ общій корень.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ выводъ R есть однородная функція m-й степени въ коэфиціентахъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (§ 161), то онъ имѣетъ форму:

$$a_0\frac{\partial R}{\partial a_0} + a_1\frac{\partial R}{\partial a_1} + a_2\frac{\partial R}{\partial a_2} + \ldots\ldots + a_n\frac{\partial R}{\partial a_n} = mR = 0$$

но мы имѣемъ для общаго корня:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

слѣдовательно степени общаго корня пропорціональны производнымъ функціямъ вывода R по $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. мы имѣемъ:

$$\lambda x^n = \frac{\partial R}{\partial a_0} \quad , \quad \lambda x^{n-1} = \frac{\partial R}{\partial a_1} \quad , \quad \lambda x^{n-2} = \frac{\partial R}{\partial a_2}, \ldots\ldots, \lambda x^{n-r} = \frac{\partial R}{\partial a_r}$$

откуда:

$$x = \frac{\partial R}{\partial a_0} : \frac{\partial R}{\partial a_1} = \frac{\partial R}{\partial a_1} : \frac{\partial R}{\partial a_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial R}{\partial a_r} : \frac{\partial R}{\partial a_{r+1}} \qquad (22)$$

и вообще:

$$x^r = \frac{\partial R}{\partial a_0} : \frac{\partial R}{\partial a_r} \quad \text{или} \quad x^r = \frac{\partial R}{\partial a_p} : \frac{\partial R}{\partial a_{p+r}} \qquad (23)$$

Примѣръ. Мы выше видѣли, что выводъ уравненій:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

есть:

$$R = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_1b_0 - a_0b_1)(a_1b_2 - a_2b_1)$$

слѣдовательно, по предъидущему, общій корень данныхъ уравненій будетъ:

$$x = \frac{\partial R}{\partial a_0} : \frac{\partial R}{\partial a_1} = \frac{2b_2(a_0b_2 - b_0a_2) - b_1(a_1b_2 - b_1a_2)}{b_0(a_1b_2 - a_2b_1) + b_2(a_1b_0 - b_1a_0)}$$

Примѣръ. Положимъ, что уравненія будутъ числовыя:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad , \quad x^2 + 4x + 3 = 0$$

въ этомъ случаѣ:

$$a_0=1 \quad , \quad a_1=3 \quad , \quad a_2=2 \quad , \quad b_0=1 \quad , \quad b_1=4 \quad , \quad b_2=3$$

подставляя найдемъ, какъ и слѣдуетъ, $x=-1$ для общаго корня. Точно также:

$$x^2=\frac{\partial R}{\partial a_0}:\frac{\partial R}{\partial a_2}=\frac{2b_2(a_0b_1-a_1b_0)-b_1(a_1b_2-a_2b_1)}{-2b_0(a_0b_2-a_2b_0)-b_1(a_1b_0-a_0b_1)}$$

и послѣ подстановленія числовыхъ значеній, найдемъ $x^2=+1$, какъ и слѣдуетъ.

§ 164. Результаты предъидущаго параграфа можно еще показать слѣдующимъ образомъ.

Мы выше видѣли (§ 161), что

$$R=f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;f_1(x_n)$$

или

$$R=f(x'_1)f(x'_2)f(x'_3)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;f(x'_m)$$

откуда:

$$\frac{\partial R}{\partial a_p}=\frac{\partial f(x'_1)}{\partial a_p}f(x'_2)f(x'_3)\;.\;.\;.\;.\;.+\frac{\partial f(x'_2)}{\partial a_p}f(x'_1)f(x'_2)\;.\;.\;.\;.+\;.\;.\;.\;.$$

если положимъ, что $x_1=x'_1$ есть общій корень уравненій (21), то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial R}{\partial a_p}=\frac{\partial f(x'_1)}{\partial a_p}f(x'_2)f(x'_3)\;.\;.\;.\;f(x'_m)$$

Но мы имѣемъ, дифференцируя первое изъ уравненій по a_p:

$$\frac{\partial f(x'_1)}{\partial a_p}=x_1^{n-p}$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial R}{\partial a_p}=x_1^{n-p}f(x'_2)f(x'_3)\;.\;.\;.\;.\;.\;f(x'_m)$$

точно также найдемъ:

$$\frac{\partial R}{\partial a_q}=x_1^{n-q}f(x'_2)f(x'_3)\;.\;.\;.\;.\;.\;f(x'_m)$$

Изъ этихъ двухъ выраженій найдемъ:

$$\frac{\partial R}{\partial a_p}:\frac{\partial R}{\partial a_q}=x_1^{q-p}$$

Если $q-p=1$ или $q-p=r$, то будемъ имѣть, какъ выше:

$$x_1=\frac{\partial R}{\partial a_p}:\frac{\partial R}{\partial a_{p+1}} \quad , \quad x_1^2=\frac{\partial R}{\partial a_p}:\frac{\partial R}{\partial a_{p+r}}$$

§ 165. Если уравненія (21) имѣютъ два общихъ корня, т. е. положимъ что $x_1=x'_1$, $x_2=x'_2$, то не только выводъ уничтожается, но и его производныя по каждому изъ коэфиціентовъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ мы выше нашли, что:

$$\frac{\partial R}{\partial a_p}=x_1^{n-p}f(x_2)f(x'_3)\ldots+x_2^{n-p}f(x_1)f(x'_3)\ldots+\ldots \tag{24}$$

какое бы ни было число p. Но по условію $f(x_1)=0$ и $f(x_2)=0$, слѣдовательно очевидно что и:

$$\frac{\partial R}{\partial a_p}=0 \tag{25}$$

Общіе корни уравненій (21) легко получить слѣдующимъ образомъ. Изъ уравненія (24) мы имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p^2}=x_1^{n-p}x_2^{n-p}f(x'_3)f(x'_4)\ldots+x_1^{n-p}x_2^{n-p}f(x'_3)f(x'_4)\ldots+\ldots$$

въ слѣдующіе члены будутъ входить функціи $f(x_1)$, $f((x_2)$, а потому они равны нулю, слѣдовательно, мы имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p^2}=2x_1^{n-p}x_2^{n-p}f(x'_3)f(x'_4)\ldots\ldots\ldots f(x'_m) \tag{26}$$

точно также найдемъ:

$$\frac{\partial^2 R}{a^2\partial_q}=2x_1^{n-q}x_2^{n-q}f(x'_3(f(x'_4)\ldots\ldots\ldots f(x'_m) \tag{27}$$

Если еще возьмемъ производную по a_q отъ выраженія (24), то найдемъ:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p\partial a_q}=(x_1^{n-p}x_2^{n-q}+x_1^{n-q}x_2^{n-p})f(x'_3)f(x'_4)\ldots\ldots f(x'_m) \tag{28}$$

полагая $q>p$ и раздѣляя (26) и (28) на (27), найдемъ:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p^2}:\frac{\partial^2 R}{\partial a_q^2}=(x_1x_2)^{q-p} \quad , \quad 2\frac{\partial^2 R}{\partial a_p\partial a_q}:\frac{\partial^2 R}{\partial a_q^2}=x_1^{q-p}+x_2^{q-p}$$

откуда найдемъ квадратное уравненіе, коего корнями будутъ x_1^{q-p} и x_2^{q-p}:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_q^2} x^2 - 2\frac{\partial^2 R}{\partial a_p \partial a_q} x + \frac{\partial^2 R}{\partial a_q^2} = 0 \qquad (29)$$

Если-бы данныя выше уравненія (21) имѣли три общіе корни: $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$, то легко видѣть, что и вторыя произведенія вывода R по каждому изъ коэфиціентовъ будутъ равны нулю, т. е. мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p^2} = 0 \qquad (30)$$

Обращаясь въ этомъ случаѣ къ производнымъ третьяго порядка, мы найдемъ уравненіе 3-й степени, коего корнями будутъ общіе корни уравненій (21).

§ 166. Если одно изъ данныхъ уравненій (21) есть произведеніе нѣсколькихъ функцій, напримѣръ, если:

$$f_1(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \varphi_r(x)$$

то выводъ уравненій (21) будетъ произведеніе выводовъ уравненій:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = 0 \quad , \quad f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = 0 \; , \; . \; . \; . \; .$$

Пусть выводы этихъ уравненій будутъ:

$$R_1 \;\; , \;\; R_2 \;\; , \;\; R_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; R_r$$

то:

$$R = R_1 R_2 R_3 \; . \; . \; . \; . \; R_r \qquad (31)$$

Въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ (§ 161):

$$\begin{aligned} R = f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; f_1(x_n) = \\ \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\varphi_1(x_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \varphi_1(x_n) \times \\ \varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_2(x_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \varphi_2(x_n) \times \\ \varphi_3(x_1)\varphi_3(x_2)\varphi_3(x_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \varphi_3(x_n) \times \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \times \\ \varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_2(x_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \varphi_2(x_n) \times \end{aligned}$$

Но произведеніе функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots.$ въ горизонталяхъ суть именно выводы $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_r$.

Задача. Показать, соображаясь съ уравненіями (22) и (23), что:

$$\frac{\partial R}{\partial a_p}\cdot\frac{\partial R}{\partial a_q}-\frac{\partial R}{\partial a_s}\cdot\frac{\partial R}{\partial a_r}=0 \tag{32}$$

если $p+q=s+r$.

Другіе способы исключенія.

§ 167. Исключеніе перемѣннаго изъ двухъ уравненій, какъ мы видѣли выше, можетъ быть всегда достигнуто изложеннымъ способомъ, основаннымъ на свойствѣ симметрическихъ функцій, но способъ этотъ весьма сложенъ, а потому математики искали другихъ способовъ, которые вели-бы удобнѣе къ цѣли. Эти способы мы изложимъ въ слѣдующихъ параграфахъ.

§ 168. *Способъ Эйлера.* Если два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ +a_{n-1}x+a_n=0\\ f_1(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ .\ .\ .\ .\ +b_{m-1}x+b_m=0\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

имѣютъ общій корень x_1, то они могутъ быть написаны въ формѣ:

$$f(x)=(x-x_1)\varphi(x)\quad,\quad f_1(x)=(x-x_1)\varphi_1(x) \tag{34}$$

гдѣ:

$$\varphi(x)=\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ .\ +\alpha_{n-1}x+\alpha_n$$

$$\varphi_1(x)=\beta_1x^{m-1}+\beta_2x^{m-2}+\ .\ .\ .\ .\ .\ +\beta_{m-1}x+\beta_m$$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$; $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ суть неопредѣленные коэфиціенты. Помножая первое изъ уравненій (34) на $\varphi_1(x)$, а второе на $\varphi(x)$, найдемъ:

$$f(x)\,.\,\varphi_1(x)=(x-x_1)\varphi(x)\varphi_1(x)\quad,\quad f_1(x)\,.\,\varphi(x)=(x-x_1)\varphi(x)\varphi_1(x)$$

откуда:

$$f(x)\,.\,\varphi_1(x)=f_1(x)\,.\,\varphi(x)$$

это тождество $n+m-1$ й степени. Приравнивая коэфиціенты у различныхъ степеней x въ обѣихъ частяхъ, мы будемъ имѣть $n+m$ однородныхъ уравненій относительно неопредѣленыхъ коэфиціентовъ α и β, изъ которыхъ исключивъ α и β, получимъ выводъ въ формѣ опредѣлителя.

Примѣръ. Пусть данныя два уравненія будутъ:

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0\quad,\quad b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

Мы имѣемъ тождество:

$$(\beta_1 x + \beta_2)(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) \equiv (\alpha_1 x + \alpha_2)(b_0 x^2 + c_1 x + b_2)$$

или:

$$(\beta_1 a_0 - \alpha_1 b_0)x^3 + (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_0 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_0)x^2 +$$
$$+ (\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1 - \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1)x + \beta_2 a_2 - \alpha_2 b_2 = 0$$

откуда, приравнивая нулю коэфиціенты у x^3, x^2, x, найдемъ:

$$\beta_1 a_0 + \beta_2 0 - \alpha_0 b_0 - \alpha_2 0 = 0$$
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_0 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_0 = 0$$
$$\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1 - \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1 = 0$$
$$\beta_1 0 + \beta_2 a_2 - \alpha_1 0 - \alpha_2 b_2 = 0$$

откуда, исключая $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$, найдемъ:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$$

результатъ извѣстный.

§ 169. *Способъ Сильвестра (Silvestre).* Англійскій математикъ Сильвестръ предложилъ способъ, извѣстный подъ именемъ *діалитическаго* или *выдѣленія*. Способъ этотъ приводитъ къ тому же выводу въ формѣ опредѣлителя, какъ и способъ Эйлера, но онъ общнѣе послѣдняго и часто можетъ быть приложенъ къ уравненіямъ со многими неизвѣстными. Пусть данныя два уравненія будутъ:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$f_1(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0$$

умножимъ первое изъ нихъ послѣдовательно на:

$$x^{m-1}\ ,\ x^{m-2}\ ,\ x^{m-3} \ldots\ldots x^2\ ,\ x\ ,\ x^0$$

а второе на:

$$x^{n-1}\ ,\ x^{n-2}\ ,\ x^{n-3} \ldots\ldots x^2\ ,\ x\ ,\ x^0$$

то будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$x^{m-1}f(x)=0\ ,\ x^{m-2}f(x)=0\ \ldots\ x^2f(x)=0\ ,\ xf(x)=0\ ,\ f(x)=0$$

$$x^{n-1}f_1(x)=0\ ,\ x^{n-2}f_1(x)=0\ \ldots\ x^2f_1(x)=0\ ,\ xf_1(x)=0\ ,\ f_1(x)=0$$

числомъ $n+m$, которыхъ достаточно для исключенія:

$$x^{n+m-1}\quad ,\quad x^{n+m-2}\ \ldots\ldots\ x^2\quad ,\quad x\quad ,\quad 1$$

Примѣръ. Возьмемъ два уравненія:

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0\qquad ,\qquad b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

изъ которыхъ будемъ имѣть уравненія:

$$\begin{aligned} a_0x^3+a_1x^2+a_2x+0.1&=0\\ 0x^3+a_0x^2+a_1x+a_21&=0\\ b_0x^3+b_1x^2+b_2x+0.1&=0\\ 0x^3+b_0x^2+b_1x+b_21&=0 \end{aligned}$$

откуда:

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2\\ b_0 & b_1 & b_2 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

§ 170. *Способъ Безу (Bezout).* Покажемъ этотъ способъ на частныхъ случаяхъ, сначала когда уравненія будутъ оба одной степени, а затѣмъ когда они будутъ оба различныхъ степеней.

Возьмемъ два кубическія уравненія:

$$a_0x^3+a_1x_2+a_2x+a_3-0\quad ,\quad b_0x^3+b_1x^3+b_2x+b_3=0$$

Умножимъ послѣдовательно эти уравненія на:

$$b_0 \text{ и } a_0\quad ,\quad b_0x+b_1 \text{ и } a_0x+a_1\quad ;\quad b_0x^2+b_1x+b_2 \text{ и } a_0x_2+a_1x+a_2$$

и вычтемъ, каждый разъ, такъ составленныя произведенія, найдемъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} (a_0b_1)x^2+&\qquad\qquad (a_0b_2)x+(a_0b_3)=0\\ (a_0b_2)x^2+&\{(a_0b_3)+(a_1b_2)\}x+(a_0b_3)=0\\ (a_0b_3)x^2+&\qquad\qquad (a_1b_3)x+(a_2b_3)=0 \end{aligned}$$

исключая изъ этихъ уравненій x^2, x, 1, найдемъ:

$$R = \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_0b_3) \\ (a_0b_2) & (a_0b_3)+(a_1b_2) & (a_1b_3) \\ (a_0b_3) & (a_1b_3) & (a_2b_3) \end{vmatrix}$$

Чтобы яснѣе видѣть законъ образованія вывода, возьмемъ уравненія 4-й степени:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

$$b_0x^4 + a_1x^3 + b_2x^2 + b^3x + b_4 = 0$$

Коши (Cauchy) даетъ слѣдующую форму способу Безу. Предъидущія уравненія даютъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}{b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4}$$

$$\frac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1} = \frac{a_2x^2 + a_3x + a_4}{b_2x^2 + b_3x + b_4}$$

$$\frac{a_0x^2 + a_1x + b_2}{b_0x^2 + b_1x + b_2} = \frac{a_3x + a_4}{b_3x + b_4}$$

$$\frac{a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3}{b^0x^3 + b_1x_3 + b_2x + b_3} = \frac{a_4}{b_4}$$

приводя къ формѣ цѣлыхъ полиномовъ и исключая x^3, x^2, x, 1 мы найдемъ:

$$R = \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_0b_3) & (a_0b_4) \\ (a_0b_2) & (a_0b_3)+(a_1b_2) & (a_0b_4)+(a_1b_3) & (a_1b_4) \\ (a_0b_3) & (a_0b_4)+(a_1b_3) & (a_1b_2)+(a_2b_3) & (a_2b_4) \\ (a_0b_4) & (a_1b_4) & (a_2b_4) & (a_3a_4) \end{vmatrix}$$

Если теперь разсмотримъ два симметрическіе опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_0b_3) & (a_0b_4) \\ (a_0b_2) & (a_0b_3) & (a_0b_4) & (a_1b_4) \\ (a_0b_3) & (a_0b_4) & (a_1b_4) & (a_2b_4) \\ (a_0b_4) & (a_1b_4) & (a_2b_4) & (a_3b_4) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} (a_1b_2) & (a_1b_3) \\ (a_1b_3) & (a_2b_3) \end{vmatrix}$$

коихъ законъ образованія ясенъ, то увидимъ, что выводъ R получится,

прибавляя элементы втораго опредѣлителя къ четыремъ среднимъ элементамъ перваго.

Точно также выводъ двухъ уравненій 5-й степени:

$$a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$$
$$b_0x^5+b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+a_4x+b_5=0$$

получится изъ трехъ симметрическихъ опредѣлителей:

$$\begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_0b_3) & (a_0b_4) & (a_0b_5) \\ (a_0b_2) & (a_0b_3) & (a_0b_4) & (a_0b_5) & (a_1b_5) \\ (a_0b_3) & (a_0b_4) & (a_0b_5) & (a_1b_5) & (a_2b_5) \\ (a_0b_4) & (a_0b_5) & (a_1b_5) & (a_2b_5) & (a_3b_5) \\ (a_0b_5) & (a_1b_5) & (a_2b_5) & (a_3b_5) & (a_4b_5) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} (a_1b_2) & (a_1b_3) & (a_1b_3) \\ (a_1b_3) & (a_1b_4) & (a_2b_4) \\ (a_1b_4) & (a_2b_4) & (a_3b_4) \end{vmatrix} \quad (a_2b_3)$$

прибавляя къ 9-ти центральнымъ элементамъ перваго опредѣлителя элементы втораго, и, наконецъ, къ центральному элементу, такъ образованнаго опредѣлителя, прибавляется послѣдній изъ трехъ опредѣлителей.

Легко распространить это образованіе вывода и вообще.

§ 171. Остается показать способъ Безу когда данныя уравненія будутъ различныхъ степеней. Пусть напримѣръ будутъ даны два уравненія:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \quad , \quad b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

Умножимъ эти уравненія послѣдовательно на:

$$b_0 \quad , \quad a_0x^2$$
$$b_0x+b_1 \quad , \quad (a_0x+a_1)x^2$$

и вычтемъ каждыя такимъ образомъ полученныя произведенія, найдемъ два уравненія:

$$(a_0b_1)x^3+(a_0b_2)x^2-a_3b_0x-a_4b_0=0$$
$$(a_0b_2)x^3+\{(a_1b_2)-(a_3b_0)\}x^2-(a_3b_1+a_4b_0)x-a_4b_1=0$$

Если къ этимъ уравненіямъ присовокупимъ два слѣдующія:

$$b_0x^3+b_1x^2+b_2x=0$$
$$b_0x^2+b_1x^2+b_2 \ =0$$

то будемъ имѣть четыре уравненія изъ коихъ можно исключить x^3, x^2, x, 1.

Результатъ исключенія будетъ:

$$R = \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_3b_0) & (a_4b_0) \\ (a_0b_2) & (a_1b_2)-a_3b_0 & a_3b_1+a_4b_0 & (a_4b_1) \\ b_0 & b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & -b_1 & -b_2 \end{vmatrix}$$

Этотъ опредѣлитель, какъ легко видѣть, второй степени въ коэфиціентахъ перваго уравненія, и четвертой въ коэфиціентахъ втораго, какъ и долженъ быть выводъ, слѣдовательно не заключаетъ въ себѣ посторонняго множителя.

Перейдемъ теперь къ общему случаю, когда даны два уравненія n-й и m-й степени:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

$$f_1(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m = 0$$

гдѣ $n > m$. Умножимъ второе уравненіе на x^{n-m}, то будемъ имѣть уравненіе:

$$f_2(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots\ldots + b_nx^{n-m} = 0$$

также n-й степени. Это уравненіе кромѣ m корней уравненія $f_1(x) = 0$ имѣетъ еще $n-m$ корней равныхъ нулю, слѣдовательно въ выводъ можетъ войти множитель a_n^{n-m} вслѣдствіе подстановленія корней равныхъ нулю въ уравненіе $f(x) = 0$.

Изъ двухъ уравненій $f(x) = 0$ и $f_1(x) = 0$, какъ было показано выше, мы будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_mx^{n-m}}$$

$$\frac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1} = \frac{a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n}{b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \ldots + b_mx^{n-m}}$$

. . . .

$$\frac{a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{b_0x^{n-2} + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{m-1}} = \frac{a_mx^{n-m} + a_{m+1}x^{n-m-1} + \ldots + a_n}{b_mx^{n-m}}$$

которыя, будучи приведены къ формамъ цѣлыхъ полиномовъ, всѣ будутъ

степени $n-1$, слѣдовательно изъ этихъ уравненій и изъ слѣдующихъ:

$$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots\ldots=0$$
$$b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\ldots\ldots=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m=0$$

можно исключить n неизвѣстныхъ $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^2, x, 1$.

Такимъ образомъ получимъ выводъ въ формѣ опредѣлителя n-й степени въ коэфиціентахъ втораго уравненія, и m-й въ коэфиціентахъ перваго, какъ и слѣдуетъ. Изъ этого видимъ, что выводъ не заключаетъ посторонняго множителя и неизмѣняется введеніемъ корней равныхъ нулю.

Примѣчаніе. Если R есть выводъ двухъ уравненій n-й степени:

$$f(x)=0 \quad , \quad f_1(x)=0$$

то выводъ уравненій:

$$\alpha f(x)+\beta f(x)=0 \quad , \quad \gamma f(x)+\delta f(x)=0$$

будетъ:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^n R$$

Въ самомъ дѣлѣ, каждый миноръ $(a_r b_s)$, составляющій элементъ вывода въ формѣ опредѣлителя, полученнаго способомъ Безу, дѣлается въ этомъ случаѣ:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_r+\beta b_s & \gamma a_r+\delta b_s \\ \alpha a_s+\beta b_r & \gamma a_s+\delta b_r \end{vmatrix} = (\alpha\delta-\beta\gamma)(a_r b_s)$$

слѣдовательно:

$$R_1=(\alpha\delta-\beta\gamma)^n . R$$

§ 172. *Способъ Келе (Cayley).* Способъ Безу англійскій математикъ Келе представилъ въ слѣдующей формѣ.

Если два уравненія:

$$f(x)=0 \quad , \quad \varphi(x)=0$$

имѣютъ общій корень, то уравненію:

$$f(x)+\lambda\varphi(x)=0 \qquad (35)$$

можно удовлетворить независимо отъ λ. Положимъ:

$$\lambda = - \varphi(x') : f(x') \tag{36}$$

уравненіе (35) сдѣлается:

$$f(x)\,\varphi(x') - \varphi(x)\,f(x') = 0 \tag{37}$$

если f и φ имѣютъ общаго множителя, то это уравненіе можетъ быть удовлетворено независимо отъ частнаго значенія x'.

Это уравненіе дѣлится на $x-x'$, раздѣляя и приравнивая нулю коэфиціенты у степеней x', получимъ уравненія изъ которыхъ, исключая степени x, получимъ выводъ § 171.

Примѣръ.

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

имѣемъ:

$$(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x'^2+b_1x'+b_2) - (b_0x^2+b_1x+b_2)(a_0x'^2+a_1x'+a_2) = 0$$

раздѣляя на $x - x'$, получимъ:

$$\left\{(a_0b_1)x + (a_0b_2)\right\}x' + \left\{(a_0b_2)x + (a_1b_2)\right\} = 0$$

откуда:

$$(a_0b_1)x + (a_0b_2) = 0 \quad , \quad (a_0b_2)x + (a_1b_2) = 0$$

исключая x получимъ извѣстный выводъ.

§ 173. Изложимъ еще способъ, который часто употребляется, но который имѣетъ то неудобство, что вводитъ въ выводъ посторонняго множителя, если прилагается къ уравненіямъ выше второй степени.

Пусть даны будутъ два уравненія второй степени:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

помножимъ послѣдовательно эти уравненія на:

$$b_0 \text{ и } a_0 \quad , \quad b_2 \text{ и } a_2$$

и вычитая полученныя произведенія, найдемъ два уравненія:

$$(a_0b_1)x + (a_0b_2) = 0 \quad , \quad (a_0b_2)x + (a_1b_2) = 0$$

исключая изъ этихъ уравненій x, будемъ имѣть:

$$R = (a_0b_2)^2 - (a_0b_1)(a_1b_2) = 0$$

Такъ какъ это выводъ четвертой степени и вѣсъ его равенъ четыремъ, то онъ и не заключаетъ посторонняго множителя.

Возьмемъ уравненія 3-й степени и отыщемъ выводъ этимъ способомъ. Пусть данныя уравненія будутъ:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad , \quad b^0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

помножимъ послѣдовательно эти уравненія на:

$$b_0 \text{ и } a_0 \quad , \quad b_3 \text{ и } a_3$$

и вычтемъ произведенія, найдемъ уравненія:

$$(a_0b_1)x^2 + (a_0b_2)x + (a_0b_3) = 0 \quad , \quad (a_0b_3)x^2 + (a_1b_3)x + (a_2b_3) = 0$$

Исключая изъ этихъ двухъ квадратныхъ уравненій x, какъ было показано выше, найдемъ:

$$R_1 = \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_3) \\ (a_0b_3) & (a_2b_3) \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_3) \\ (a_0b_3) & (a_1b_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a_0b_2) & (a_0b_3) \\ (a_0b_3) & (a_2b_2) \end{vmatrix}$$

Степень этой функціи въ коэфиціентахъ есть 8, а вѣсъ 12, но степень вывода должна быть 6, а вѣсъ 9, слѣдовательно, она должна дѣлиться на множителя, коего степень есть 2, а вѣсъ 3, форма этого множителя должна быть поэтому:

$$\lambda(a_1b_2) + \mu(a_0b_3)$$

Легко показать, что этотъ множитель есть (a_0b_3) и найти частное отъ дѣленія на него R_1. Для этого, удерживая только тѣ члены, которые не заключаютъ явно (a_0b_3), мы будемъ имѣть выраженіе:

$$(a_0b_1)(a_2b_3)\{(a_0b_1)(a_2b_3) + (a_2b_0)(a_1b_3)\}$$

которое дѣлится на (a_0b_3), такъ какъ мы имѣемъ тождество:

$$(a_1b_2)(a_0b_3) + (a_2b_0)(a_1b_3) + (a_0b_1)(a_2b_3) \equiv 0$$

и въ самомъ дѣлѣ это тождество есть ничто иное, какъ извѣстное тождество:

$$(\beta-\gamma)(\alpha-\delta) + (\gamma-\alpha)(\beta-\delta) + (\alpha-\beta)(\gamma-\delta) \equiv 0$$

Разлагая определителя R_1 и раздѣляя на (a_0b_2), найдемъ:

$$(a_0b_3)^3-2(a_0b_1)(a_2b_3)(a_0b_3)+(a_1b_3)(a_2b_0)(a_0b_3)+$$
$$+(a_2b_0)^2(a_2b_3)+(a_0b_1)(a_1b_3)^2-(a_0b_1)(a_1b_2)(a_2b_3)$$

эта функція 6-й степени, имѣетъ вѣсъ 9, слѣдовательно, есть выводъ двухъ кубическихъ уравненій.

Точно также мы можемъ найти выводъ двухъ уравненій 4-й степени, выводя изъ нихъ, какъ показано выше, исключеніемъ, два кубическія уравненія, изъ вывода коихъ должно устранить посторонняго множителя 4-й степени, который выражаетъ, что полученныя два кубическія уравненія имѣютъ общій корень, если-бы данныя два уравненія 4-й степени и не имѣли его. И вообще если этимъ способомъ будемъ находить выводъ двухъ уравненій n-й степени, то всегда необходимо устранить посторонній множитель $2n$-й степени. Слѣдовательно, этотъ способъ уступаетъ всѣмъ предъидущимъ и можетъ быть употребляемъ только въ томъ случаѣ, когда, по свойству уравненія, посторонній множитель можетъ быть легко устраненъ.

Примѣръ. Исключить x изъ уравненій:

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0 \quad , \quad x^3-1=0$$

умножая первое уравненіе на x и замѣчая, что $x^3=1$, будемъ имѣть:

$$a_1x^2+a_2x+a_0=0$$

Умножая это послѣднее еще на x и исключая x^3, найдемъ:

$$a_2x^2+a_0x+a_1=0$$

Исключая теперь x^2, x, 1 изъ трехъ уравненій:

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0 \quad , \quad a_1x^2+a_2x+a_0=0 \quad , \quad a_2x^2+a_0x+a_1=0$$

найдемъ, наконецъ:

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}=0$$

Легко видѣть, что выводъ уравненій:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \quad , \quad x^5=1$$

будетъ:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Примѣръ 2. Найти съ помощью способа Эйлера, что два кубическія уравненія:

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$f_1(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

имѣютъ два общіе корня.

Если эти уравненія имѣютъ два общіе корня, то умножая $f(x)$ на третьяго множителя функціи $f_1(x)$, а $f_1(x)$ умножая на третій множитель функціи $f(x)$, найдемъ:

$$(\alpha x + \beta) f(x) = (\gamma x + \delta) f_1(x)$$

α, β, γ, δ суть неопредѣленные коэфиціенты. Приравнивая коэфиціенты у x, это тождество дастъ слѣдующія условія:

$$\alpha a_0 + \beta 0 - \gamma b_0 - \delta b = 0$$

$$\alpha a_1 + \beta a_0 - \gamma b_1 - \delta b_0 = 0$$

$$\alpha a_2 + \beta a_1 - \gamma b_2 - \delta b_1 = 0$$

$$\alpha a_3 + \beta a_2 - \gamma b_3 - \delta b_2 = 0$$

$$\alpha 0 + \beta a_3 - \gamma 0 - \delta b_3 = 0$$

Комбинируя эти пять уравненій по четыре и исключая α, β, γ, δ, получимъ пять опредѣлителей, которые и будутъ искомыя условія. Эти пять опредѣлителей обозначаютъ слѣдующимъ символомъ:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 \\ 0 & a_3 & 0 & b_3 \end{Vmatrix} = 0$$

въ которомъ надобно выбрасывать каждую изъ горизонталей и приравнивать нулю оставшійся опредѣлитель 4-го порядка, это и будутъ искомыя пять условій.

§ 174. Остается показать какъ исключить одно изъ неизвѣстныхъ изъ двухъ уравненій n-й и m-й степеней съ двумя неизвѣстными. Самое общее уравненіе n-й степени съ двумя неизвѣстными есть:

$$\begin{array}{r} a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+a_3x^{n-3}y^3+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2y^{n-2}+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n \\ +b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}y+b_2x^{n-3}y^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+b_{n-2}xy^{n-2}+b_{n-1}y^{n-1} \\ +c_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}y+\ldots\ldots\ldots\ldots+c_{n-3}xy^{n-3}+c_{n-2}y^{n-2} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +d_0x^3+d_1x^2y+d_2xy^2+d_3y^3 \\ +e_0x^2+e_1xy+e_2y^2 \\ +f_0x+f_1y \\ +g=0 \end{array} \quad (39)$$

какъ видно оно состоитъ изъ $n+1$ членовъ n-го измѣренія, изъ n членовъ $n-1$ измѣренія и т. д., изъ 4-хъ членовъ третьяго измѣренія, изъ 3-хъ членовъ втораго, изъ 2-хъ членовъ перваго и одного члена нулеваго измѣренія, слѣдовательно всего членовъ будетъ:

$$1+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

Расположивъ это уравненіе (39) по степенямъ x, найдемъ:

$$\begin{array}{l} a_0x^n+(a_1y+b_0)x^{n-1}+(a_2y^2+b_1y+c_0)x^{n-2}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{n-1}y^{n-1}+b_{n-2}y^{n-2}+c_{n-3}y^{n-3}+\ldots+e_1y+f_0)x+ \\ +a_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+c_{n-2}y^{n-2}+\ldots+e_2y^2+f_1y+g=0 \end{array} \quad (40)$$

или:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x+A_n=0 \quad (41)$$

гдѣ коэфиціенты A_1, A_2, $A_3,\ldots$, суть полиномы отъ y такой степени какой индексъ при A. Для симметріи мы положили $a_0=A_0$.

Пусть теперь будутъ даны два уравненія съ двумя неизвѣстными x и y n-й и m-й степени формы (41):

$$\begin{aligned} A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0 \\ B_0x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \ldots + B_{m-1}x + B_m = 0 \end{aligned} \qquad (42)$$

гдѣ A_0, A_1, $A_2, \ldots$; B_0, B_1, $B_2, \ldots$ суть полиномы отъ y, коихъ степень равна индексу у коэфиціента.

Разсматривая коэфиціенты этихъ уравненій какъ количества постоянныя, найдемъ выводъ, какъ было показано выше (§§ 171 и 172), вѣсъ котораго равенъ $n.m$; но такъ какъ коэфиціенты суть полиномы отъ y, коихъ степень равна индексу коэфиціента, то выводъ будетъ полиномъ отъ y nm-й степени. Слѣдовательно, результатъ исключенія перемѣннаго x изъ уравненій (42) будетъ уравненіе nm-й степени относительно y. Пусть это уравненіе будетъ:

$$C_0y^{nm} + C_1y^{nm-1} + C_2y^{nm-2} + \ldots + C_{nm-1}y + C_{nm} = 0 \qquad (43)$$

гдѣ C_0, C_1, $C_2, \ldots, C_{nm}$ суть функціи коэфиціентовъ данныхъ уравненій. Означимъ его корни чрезъ $y_1, y_2, y_3, \ldots$, всѣхъ числомъ nm.

Подставивъ въ уравненія (42) вмѣсто y одинъ изъ предъидущихъ корней, получимъ два уравненія въ x, рѣшая которыя, найдемъ изъ одного n значеній для x, а изъ другаго m значеній для x, соотвѣтствующихъ подставленному корню уравненія (43). Но какое значеніе x соотвѣтствуетъ значенію y, мы такимъ образомъ не опредѣлимъ, а надобно поступать слѣдующимъ образомъ: возьмемъ, напримѣръ, первый корень y_1 и вставимъ вмѣсто y въ оба уравненія (42). Эти уравненія должны имѣть общій корень, который опредѣлится, разыскавъ общаго наибольшаго дѣлителя между ними, и означивъ его чрезъ x_1, будемъ имѣть пару величинъ (x_1y_1) удовлетворяющихъ данныя два уравненія; поступая также съ каждымъ изъ другихъ корней уравненія (43), найдемъ $n.m$ паръ:

$$x_1y_1 \quad , \quad x_2y_2 \quad , \quad x_3y_3 \quad , \quad x_4y_4 \; , \ldots\ldots$$

величинъ для x и y, удовлетворяющихъ совокупноданнныя два уравненія.

Примѣръ. Найти координаты точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій;

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y_2 + 2d_1x + 2e_1y + f = 0$$

или:

$$ax^2 + 2(by + d)x + cy^2 + 2ey + f = 0$$

$$a_1x^2 + 2(b_1y + d_1)x + c_1y^2 + 2e_1y + f = 0$$

откуда, соображаясь съ § 162, примѣръ, найдемъ, если положимъ:

$$a_0 = a \quad , \quad a_1 = 2(by + d) \quad , \quad a_2 = cy^2 + 2ey + f$$

$$b_0 = a_1 \quad , \quad b_1 = 2(b_1y + d_1) \quad , \quad b_2 = c_1y^2 + 2e_1y + f_1$$

$$\left\{(ac_1 - a_1c)y^2 + 2(ae_1 - a_1e)y + af_1 - a_1f\right\}^2 +$$

$$+ 4\left\{(ba_1 - b_1a)y + (da_1 - d_1a\right\}\left\{(by + d)(c_1y^2 + 2e_1y + f_1) -\right.$$

$$\left. - (b_1y + d_1)(cy^2 + 2ey + f)\right\} = 0$$

уравненіе 4-й степени относительно y.

§ 175. Симметрическая функція корней, удовлетворяющихъ два уравненія съ двумя неизвѣстными, можетъ быть выражена въ коэфиціентахъ обѣихъ уравненій.

Пусть данныя уравненія будутъ:

$$\begin{array}{l} A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots . + A_{n-1}x + A^n = 0 \\ A_0x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \ldots . + B_{m-1}x + B_n = 0 \end{array} \qquad (44)$$

корни, удовлетворяющіе эти уравненія, пусть будутъ:

$$x_1y_1 \quad , \quad x_2y_2 \quad , \quad x_3y_3 \; , \ldots \ldots$$

Для этого возьмемъ слѣдующее выраженіе:

$$t = \lambda x + \mu y$$

гдѣ λ и μ суть произвольныя величины и съ помощью этого уравненія исключимъ изъ уравненій (44) величину y, получимъ два уравненія въ t и x; между этими уравненіями исключимъ x, получимъ одно уравненіе въ t nm степени. Коэфиціенты этого уравненія будутъ функція коэфиціентовъ данныхъ уравненій и отъ λ и μ. Пусть $t_1, t_2, t_3, \ldots$, будутъ корни уравненія въ t. Составимъ форму p-хъ степеней отъ этихъ корней:

$$t_1^p + t_2^p + t_3^p + \ldots . = (\lambda x_1 + \mu y_1)^p + (\lambda x_2 + \mu y_2)^p + \ldots . \qquad (45)$$

Первая часть есть симметрическая функція корней уравненія въ t, слѣдо-

вательно, есть функція отъ коэфиціентовъ уравненій (44) и отъ λ и μ. Разлагая вторую часть уравненія (45) по степенямъ λ и μ и приравнивая коэфиціенты при одинаковыхъ степеняхъ λ и μ, найдемъ симметрическія функціи:

$$\Sigma x_1^p \quad , \quad \Sigma x_1^{p-1}y_1 \quad , \quad \Sigma x_1^{p-2}y_1^2 \quad , \quad \Sigma x_1^{p-3}y_1^3 \; \ldots \; \Sigma y_1^p$$

которыя суть коэфиціенты во второй части уравненія (45) при величинахъ: $\lambda^p, \lambda^{p-1}\mu, \lambda^{p-2}\mu^2, \lambda^{p-3}\mu^3, \ldots, \mu^p$.

§ 176. *Призначная.* Призначною какого-нибудь уравненія въ анализѣ называютъ простѣйшую функцію въ коэфиціентахъ уравненія, приведенную въ цѣлую раціональную форму, уничтоженіе которой выражаетъ условіе, что данное уравненіе имѣетъ равные корни. Мы уже познакомились выше (§ 149) съ этой функціей, а здѣсь займемся общими ея свойствами.

Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (46)$$

Если это уравненіе имѣетъ двойной корень, то этотъ корень долженъ принадлежать (§ 46) и производной:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} = 0 \quad (47)$$

слѣдовательно призначная есть *выводъ* уравненій (46) и (47).

Легко видѣть, что двойной корень долженъ быть и корнемъ уравненія:

$$nf(x) - xf'(x) = a_1x^{n-1} + 2a_2x^{n-2} + 3a_3x^{n-3} + \ldots +$$
$$+ (n-2)a_{n-2}x^2 + (n-1)a_{n-1}x + na_n = 0 \qquad (48)$$

Означимъ эту функцію $n-1$ степени чрезъ $f_1(x)$, т. е.

$$f_1(x) = nf(x) - xf'(x) = 0 \qquad (49)$$

Изъ этого видимъ, что призначная есть выводъ уравненій:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f_1(x) = 0 \qquad (50)$$

Такъ какъ оба эти уравненія $n-1$ степени, то призначная будетъ $2(n-1)$ степени въ коэфиціентахъ. Если-бы индексы въ коэфиціентахъ въ $f_1(x)$ были 0, 1, 2, 3,..., то вѣсъ призначной былъ-бы $(n-1)^2$, но индексы коэфиціентовъ въ $f_1(x)$ повышены на единицу, какъ видно изъ (48), слѣдовательно къ $(n-1)^2$ надобно прибавить $n-1$, т. е. вѣсъ призначной будетъ $(n-1)^2 + (n-1) = n(n-1)$.

§ 177. Если уравненіе (46) напишемъ въ однородной формѣ:

$$f(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots +$$
$$+ a_{n-2} x^2 y^{n-2} + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0 \qquad (51)$$

то функція $f_1(x)$ есть ничто иное какъ производная функція функціи $f(x,y)$ по y, въ которой положено $y=1$. Слѣдовательно призначная есть выводъ уравненій:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

изъ которыхъ исключается x, положивъ $y=1$, или исключается просто отношеніе $x:y$.

§ 178. Такъ какъ призначная есть выводъ уравненій:

$$f(x) = 0 \quad , \quad f'(x) = 0 \qquad (53)$$

а этотъ выводъ есть симметрическая функція корней $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ перваго изъ уравненій (53), какъ показано выше (§ 160), т. е.

$$R = f'(x_1).f'(x_2).f'(x_3) \;\ldots\; f'(x_n)$$

то по § 154:

$$f'(x_1).f'(x_2).f'(x_3) \;\ldots\; f'(x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n \Delta_n$$

гдѣ Δ_n есть произведеніе квадратовъ разностей корней даннаго уравненія, слѣдовательно призначная есть Δ_n.

Примѣръ 1. Найти призначную кубическаго уравненія:

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

Она есть результатъ исключенія x изъ уравненій:

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0 \quad \text{и} \quad a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 = 0$$

соображаясь съ § 128, найдемъ:

$$\Delta_3 = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 = 0$$

или въ формѣ опредѣлителя:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Примѣръ 2. Выразить призначную уравненія 4-й степени въ формѣ опредѣлителя? Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

призначная есть выводъ уравненій:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \quad , \quad a_1x^3 + 3a_2x^2 + 3a_3x + a_4 = 0$$

а выводъ этихъ уравненій есть:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

этотъ опредѣлитель какъ увидимъ ниже равенъ выраженію $J_1^3 - 27J_2^2$.

Примѣръ 3. Показать, что $J_1 = 0$ есть условіе равенства трехъ корней уравненія:

$$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

Тройной корень этого уравненія есть двойной производной его:

$$f'(x) = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

слѣдовательно онъ долженъ быть общимъ корнемъ уравненій:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad a_1x^2 + 2a_2x + a_3 = 0$$

Но мы имѣемъ тождество:

$$f(x) = x^2(a_0x^2 + 2a_1x + a_2) + 2x(a_1x^2 + 2a_2x + a_3) + a_2x^2 + 2a_3x + a_4$$

слѣдовательно тройной корень долженъ удовлетворить и уравненіе:

$$a_2x^2 + 2a_3x + a_4 = 0$$

слѣдовательно тройной корень уравненія $f(x) = 0$ удовлетворяетъ три уравненія:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad a_1x^2 + 2a_2x + a_3 = 0 \quad , \quad a_2x^2 + 2a_3x + a_4 = 0$$

откуда, исключая x, найдемъ искомое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = J_1 = 0$$

§ 179. Призначная, какъ мы видѣли, есть выводъ уравненій:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f'(x) = 0$$

или уравненій:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f_1(x) = 0$$

или наконецъ есть выводъ уравненій:

$$f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f_1(x) = 0$$

Легко видѣть, что выводы, полученные такимъ образомъ, будутъ всѣ равны выраженію Δ_n умноженному на различные коэфиціенты.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе:

$$nf(x) = xf'(x) + f_1(x) \tag{54}$$

вставимъ послѣдовательно корни $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, то получимъ рядъ уравненій:

$$\begin{aligned} x_1 f'(x_1) &= -f_1(x_1) \\ x_2 f'(x_2) &= -f_1(x_2) \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n f'(x_n) &= -f_1(x_n) \end{aligned}$$

перемножая которыя, найдемъ:

$$x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n f'(x_1) . f'(x_2) \ldots f'(x_n) = (-1)^n f_1(x_1) . f_1(x_2) \ldots . f_1(x_n)$$

или помня, что $a_0 x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_n$, найдемъ:

$$a_n f'(x_1) . f'(x_2) \ldots . f'(x_n) = a_0 f_1(x_1) . f_1(x_2) \ldots . f_1(x_n) \tag{55}$$

Но произведенія $f'(x_1) . f'(x_2) \ldots f'(x_n)$ и $f_1(x_1) . f_1(x_2) \ldots f_1(x_n)$ суть выводы, первое между уравненіями $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$, а второе между уравненіями $f(x) = 0$ и $f_1(x) = 0$. Подставляя значеніе перваго произведенія (§ 114, 35) въ предъидущее (55) тождество, найдемъ:

$$f_1(x_1) f_1(x_2) \ldots f_1(x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}} a_0^{n-1} . a_n . \Delta_n \tag{56}$$

Означимъ корни уравненія $f'(x)=0$ чрезъ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$, а корни уравненія $f_1(x)=0$ чрезъ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, и вставимъ послѣдовательно $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ въ уравненіе (54), то найдемъ рядъ уравненій:

$$nf(y_1)=f_1(y_1) \quad , \quad nf(y_2)=f_1(y_2) \; \ldots\ldots \; nf(y_{n-1})=f_1(y_{n+1})$$

которыя, перемножая найдемъ:

$$n^{n-1}.f(y_1).f(y_2)\ldots.f(y_{n-1})=f_1(y_1).f_1(y_2)\ldots.f_1(y_{n-1}) \qquad (57)$$

первая часть этого уравненія есть выводъ уравненій $f(x)=0$ и $f'(x)=0$, а вторая есть выводъ уравненій $f'(x)=0$ и $f_1(x)=0$.

Но мы имѣемъ (§ 161, 7):

$$a_0^{n-1}f(y_1).f(y_2)\ldots.f(y_{n-1})=n^n.a_0^n.f'(x_1).f'(x_2)\ldots.f'(x_n)$$

или:

$$f(y_1).f(y_2)\ldots.f(y_{n-1})=n^n.a_0f'(x_1).f'(x_2)\ldots.f'(x_n)$$

или:

$$f(y_1).f(y_2)\ldots.f(y_{n-1})=(-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}}.n^n.a_0^{n+1}.\Delta_n$$

подставляя въ (57), найдемъ:

$$f_1(y_1).f_1(y_2)\ldots.f_1(y_{n-1})=(-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}}.n^{2n-1}.a_0^{n+1}.\Delta_n \qquad (58)$$

§ 180. Такъ какъ призначная есть выводъ уравненій $f(x)=0$ и $f'(x)=0$ n-й и $n-1$ степеней, то въ силу § 162 (св. 4) она не измѣняется, если данное уравненіе преобразуемъ въ другое, котораго корни суть обратные корнямъ даннаго. Но такъ какъ такое преобразованіе дѣлается измѣняя коэфиціенты на дополнительные, т. е. вообще a_r на a_{n-r}, то изъ этого слѣдуетъ, что отъ такого замѣщенія призначная не измѣняется.

§ 181. Призначная есть симметрическая функція разностей корней даннаго уравненія, слѣдовательно, она должна удовлетворять слѣдующимъ уравненіямъ въ частныхъ дифференціалахъ:

$$na_0\frac{\partial\Delta_n}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial\Delta_n}{\partial a_2}+(n-2)a_2\frac{\partial\Delta_n}{\partial a_3}+\ldots.+a_{n-1}\frac{\partial\Delta_n}{\partial a_n}=0 \qquad (59)$$

если же уравненіе написано съ биноміальными коэфиціентами, то оно удов-

летворяетъ уравненію:

$$a_0 \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_3} + \dots + na_{n-1} \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_n} = 0 \qquad (60)$$

Слѣдовательно, такъ какъ степень и вѣсъ признaчной извѣстны, то ея форму можно построить съ неопредѣленными коэфиціентами, которые затѣмъ легко опредѣлить съ помощью уравненій (59) или (60).

§ 182. *Предложеніе.* Если функція есть произведеніе двухъ функцій:

$$f(x) = f_1(x) \,.\, f_2(x)$$

то признaчная функціи $f(x)$ есть произведеніе признaчныхъ функцій $f_1(x)$ и $f_2(x)$, помноженное на квадратъ вывода уравненій $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$.

Доказательство. Пусть признaчная функціи $f(x)$ будетъ $\Delta_{1,2}$, признaчныя функцій $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пусть будутъ Δ_1 и Δ_2, пусть выводъ уравненій $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ будетъ $R_{1,2}$, требуется доказать, что:

$$\Delta_{1,2} = \Delta_1 \cdot \Delta_2 \,.\, R^2_{1,2} \qquad (61)$$

Признaчная уравненія $f(x) = 0$ есть произведеніе квадратовъ разностей корней этого уравненія, слѣдовательно, она состоитъ изъ произведенія квадратовъ разностей корней уравненія $f_1(x) = 0$ и произведенія квадратовъ разностей корней уравненія $f_2(x) = 0$ и, наконецъ, изъ квадратовъ разностей между корнями уравненій $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$. Первыя два произведенія суть признaчныя Δ_1 и Δ_2, а послѣднее есть квадратъ вывода $R^2{}_{1,2}$ Слѣдовательно, мы имѣемъ уравненіе (61).

§ 183. *Предложеніе.* Признaчная функціи:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (62)$$

имѣетъ форму:

$$\Delta_n = a_n \,.\, \Phi + a^2_{n-1} \,.\, \Delta_{n-1} \qquad (63)$$

гдѣ Δ_{n-1} есть признaчная функціи:

$$a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-2} x + a_{n-1} = 0 \qquad (64)$$

Доказательство. Замѣтимъ, что признaчная получится одна и та-же, возьмемъ-ли признaчную формы (62) и сдѣлаемъ въ ней $a_n = 0$, или сдѣлаемъ сначала въ формѣ (62) $a_n = 0$ и возьмемъ признaчную. Но если въ формѣ (62) сдѣлаемъ $a_n = 0$, то она сдѣлается:

$$x(a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-2} x + a_{n-1}) \qquad (65)$$

Слѣдовательно, она есть произведеніе двухъ функцій, а потому и ея призначная равна произведенію призначной Δ_{n-1} на квадратъ вывода уравненій $x=0$ и уравненія (64), но квадратъ этого вывода есть a^2_{n-1}, слѣдовательно, мы имѣемъ уравненіе (63).

Точно также легко показать, что:

$$\Delta_n = a_0 \Phi + a_1^2 \Delta_{n-1} \qquad (66)$$

ГЛАВА XIII.

Неизмѣнныя и соизмѣнныя (инваріанты и коваріанты).

§ 184. Цѣлую раціональную однородную функцію двухъ перемѣнныхъ количествъ x и y будемъ называть *двоичною формою* n-го порядка или степени, если наивысшая степень перемѣннаго будетъ n. Общій видъ такой формы съ биноміальными коэфиціентами есть:

$$f(x,y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n \qquad (1)$$

мы будемъ ее обозначать, согласно Келе, символомъ:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \between x, y)^n \qquad (2)$$

или еще проще символомъ:

$$(1, n \between n, y)^n \qquad (3)$$

Если въ формѣ (1) сдѣлаемъ $y=1$, то мы будемъ ее обозначать символомъ $f(x,1) = U_n$ вмѣсто f_n, какъ означено выше въ § 52; при такомъ обозначеніи производныя формы $f(x,1)$ по x будутъ, какъ мы видѣли выше (§ 52): $n U_{n-1}, n(n-1) U_{n-2}, \ldots\ldots$

§ 185 Возьмемъ форму:

$$f(x,1) = a_0 x^n + a a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n \qquad (4)$$

если приравняемъ эту форму нулю и означимъ чрезъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ кор-

ни такого уравненія, то будемъ имѣть слѣдующее тождество:

$$a_0x^n + na_1x^{n-1} + \ldots + na_{n-1}x + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \qquad (5)$$

Преобразуемъ это тождество въ другое подстановленіемъ:

$$x = \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{\alpha_2 X + \beta_2} \qquad (6)$$

такое преобразованіе называется *проэктивнымъ*. Легко видѣть, что обратно имѣемъ:

$$X = \frac{\beta_2 x - \beta_1}{-\alpha_2 x + \alpha_1} \qquad (7)$$

Опредѣлитель $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = (\alpha_1\beta_2)$ не долженъ быть равенъ нулю, такъ какъ въ этомъ случаѣ $x = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (§ 60). Означимъ чрезъ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ значенія X, когда въ уравненіе (7) вмѣсто x подставимъ послѣдовательно корни $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Подставимъ въ (5) вмѣсто x его выраженіе (6), то первая его часть приметъ форму:

$$\frac{A_0X^n + nA_1X^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}A_2X^{n-2} + \ldots + nA_{n-1}X + A_n}{(\alpha_2 X + \beta_2)^n} \qquad (8)$$

гдѣ:

$$A_0 = a_0\alpha_1^n + na_1\alpha_1^{n-1}\alpha_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2\alpha_1^{n-2}\alpha_2^2 + \ldots + na_{n-1}\alpha_1\alpha_2^{n-1} + a_n\alpha_2^n \qquad (9)$$

или:

$$A_0 = a_0(\alpha_1 - \alpha_2x_1)(\alpha_1 - \alpha_2x_2)(\alpha_1 - \alpha_2x_3) \ldots\ldots (\alpha_1 - \alpha_2x_n) \qquad (10)$$

Преобразуемъ теперь 2-ю часть тождества (5). Для этого возьмемъ какой нибудь изъ ея множителей, напримѣръ $x - x_i$ и подставимъ въ него выраженія:

$$x = \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{\alpha_2 X + \beta_2} \quad \text{и} \quad x_i = \frac{\alpha_1 X_i + \beta_1}{\alpha_2 X_i + \beta_2} \qquad (11)$$

найдемъ:

$$x - x_i = \frac{(\alpha_1\beta_2)(X - X_i)}{(\alpha_2X+\beta_2)(\alpha_2X_i+\beta_2)} \qquad (12)$$

полагая послѣдовательно $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ и подставляя эти значенія въ:

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots\ldots (x-x_i)$$

найдемъ:

$$\frac{a_0(\alpha_1\beta_2)^n(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)\ldots\ldots(X-X_n)}{(\alpha_2X+\beta_2)^n.(\alpha_2X_1+\beta_2)(\alpha_2X_2+\beta_2)\ldots\ldots(\alpha_2X_n+\beta_2)} \qquad (13)$$

приравнивая это выраженію (8) будемъ имѣть:

$$A_0X^n+nA_1X^{n-1}+\ldots\ldots+A_{n-1}X+A_n=\frac{a_0(\alpha_1\beta_2)^n.(X-X_1)(X-X_2)\ldots\ldots(X-X_n)}{(\alpha_2X_1+\beta_2)(\alpha_2X_2+\beta_2)\ldots\ldots(\alpha_2X_n-\beta_2)}$$

но мы вообще имѣемъ:

$$\alpha_2X_i+\beta_2=\frac{(\alpha_1\beta_2)}{\alpha_1-\alpha_2x_i} \quad \text{или} \quad (\alpha_1-\alpha_2x_i)(\alpha_2X_i+\beta_2)=(\alpha_1\beta_2) \qquad (14)$$

полагая $i=1, 2, 3, 4, \ldots, n$ и подставляя въ предъидущее тождество, найдемъ:

$$A_0X^n+nA_1X^{n-1}+\ldots+A_n=a_0(\alpha_1-\alpha_2x_1)\ldots(\alpha_1-\alpha_2x_n)(X-X_1)\ldots(X-X_n)$$

$$=A_0(X-X_1)(X-X_2)\ldots\ldots(X-X_n) \qquad (15)$$

гдѣ A_0 имѣетъ форму (10).

§ 186. Если возьмемъ однородную форму:

$$a_0x^n+na_1x^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}y^2+\;\ldots\;+na_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n \qquad (16)$$

и напишемъ ее въ формѣ:

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n+na_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}+\ldots+na_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right)+a_n=(a_0a_1\ldots a_n)\left(\frac{x}{y}\;1\right)^n$$

и въ проэктивномъ преобразованіи (6) замѣнимъ x и X отношеніями $\frac{x}{y}$ и $\frac{X}{Y}$, то оно сдѣлается:

$$\frac{x}{y}=\frac{\alpha_1X+\beta_1Y}{\alpha_2X+\beta_2Y}$$

тогда, очевидно, проэктивное преобразованіе формы (16) можетъ быть сдѣлано двумя линейными преобразованіями:

$$x=\alpha_1X+\beta_1Y \quad , \quad y=\alpha_2X+\beta_2Y \qquad (17)$$

и такимъ образомъ избѣгаютъ дробныхъ преобразованій.

Такое преобразованіе даетъ:

$$a_0x^n + na_1x^{n-1}y + \ldots + na_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n =$$
$$= A_0X^n + nA_1X^{n-1}Y + \ldots + nA_{n-1}XY^{n-1} + A_nY^n \qquad (18)$$

или

$$a_0(x-x_1y)(x-x_2y)\ldots(x-x_ny) = A_0(X-X_1Y)(X-X_2Y)\ldots(X-X_nY) \qquad (19)$$

гдѣ:

$$A_0 = a_0(\alpha_1-x_1\alpha_2)(\alpha_1-x_2\alpha_2)\ \ldots\ (\alpha_1-x_n\alpha_2)$$

Преобразованіе двоичной формы:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \between x, y)^n$$

подстановленіями:

$$x = \alpha_1X + \beta_1Y \quad \text{и} \quad y = \alpha_2X + \beta_2Y \qquad (20)$$

въ форму:

$$(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \between X, Y)^n$$

назывютъ *линейнымъ преобразованіемъ*.

Изъ (20) мы будемъ имѣть обратное преобразованіе:

$$(\alpha_1\beta_2)X = \beta_2x - \beta_1y \quad \text{и} \quad (\alpha_1\beta_2)Y = -\alpha_2x + \alpha_1y \qquad (21)$$

Опредѣлитель $(\alpha_1\beta_2)$ называется *модулемъ* линейнаго преобразованія.

§ 187. *Опредѣленіе.* Пусть:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, \ldots, x^n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n) \qquad (22)$$

будетъ цѣлая, однородная, симметрическая функція s-го порядка разностей корней уравненія:

$$U_n = f(x) = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-1} + \ldots + na_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (23)$$

Такая функція, очевидно, не измѣняется, если корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ замѣстимъ разностями $x_1 - x$, $x_2 - x$, ..., $x_n - x$.

Если въ функціи (22) подставимъ вмѣсто корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравненія (23) ихъ обратныя значенія:

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_3} \ldots\ldots \frac{1}{x_n}$$

вслѣдствіе чего коэфиціенты $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ измѣнятся въ $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, то найдемъ:

$$a_n^s \varphi\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2} \dots \dots \frac{1}{x_n}\right) = F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \qquad (24)$$

или, приводя къ одному знаменателю, который всегда можетъ быть сдѣланъ равнымъ $(x_1 x_2 \dots x_n)^s$, будемъ имѣть:

$$\frac{a_n^s \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(x_1 x_2 \dots x_n)^s} = F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$$

$\psi(x_1, x_2, \dots, x^n)$ есть цѣлая симметрическая функція корней. Замѣчая теперь, что:

$$a_0^s (x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^s = (-1)^n a_n$$

получимъ:

$$a_0^s \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \pm F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \qquad (25)$$

Если полученная функція $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будетъ опять симметрическая функція разностей корней уравненія, то функція $a_0^s \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, или ея выраженіе въ коэфиціентахъ $F(a_0, a_1, \dots, a_n)$, называется *неизмѣнной* или *инваріантомъ* (invariant) формы (23) и, обозначается символомъ $J_{n,s}$, гдѣ n есть степень формы, а s порядокъ неизмѣнной въ коэфиціентахъ; слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ мы имѣемъ:

$$J_{n,s} = a_0^s \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = F(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (26)$$

Если же полученная функція $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не будетъ симметрическая функція разностей корней, то замѣщая корни $x_1, x_2, \dots, x_n$ разностями x_1-x, $x_2-x, \dots x_n-x$, вслѣдствіе чего коэфиціенты $a_0, a_1, \dots a_n$ измѣняются въ $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$, мы найдемъ функцію:

$$a_0^s \psi(x_1-x, x_2-x, \dots, x_n-x) = F(U_n, U_{n-1}, \dots, U_1, U_0) \qquad (27)$$

которая называется *соизмѣнной* или *коваріантомъ* (covariant) формы (23) и обозначается символомъ $C_{n,s}$, слѣдовательно:

$$C_{n,s} = a_0^s \psi(x_1-x, x_2-x, \dots, x_n-x) = F(U_n, U_{n-1}, \dots, U_1, U_0) \qquad (28)$$

Первая часть даетъ соизмѣнную въ корняхъ и въ перемѣнномъ, а вторая часть есть ея выраженіе въ перемѣнномъ и въ коэфиціентахъ формы.

Первыя основы теоріи инваріантовъ были положены англійскимъ геометромъ Келе въ 1845 году. Дальнѣйшее развитіе она получила, благодаря изслѣдованіямъ нѣмецкаго геометра Гессе (Hesse).

Функція $a_0^n\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ называется *источникомъ* (source) соизмѣнной. Названіе это дано англійскимъ математикомъ Робертсомъ (Roberts).

Легко видѣть когда симметрическая функція разностей корней даетъ неизмѣнную и когда соизмѣнную. Если всѣ члены функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ одного типа, каждый содержитъ всѣ корни формы, и каждый корень въ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ входитъ въ одной и той же степени, то эта функція даетъ неизмѣнную, въ противномъ случаѣ мы будемъ имѣть источникъ $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который даетъ соизмѣнную (28).

§ 188. Это опредѣленіе неизмѣнной и соизмѣнной можно распространить и на тотъ случай, когда функція φ будетъ функція разностей корней нѣсколькихъ уравненій, входящихъ симметрично. Тѣ же преобразованія дадутъ или неизмѣнную или соизмѣнную системы формъ.

Примѣръ. Возьмемъ форму 2-й степени:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 \tag{29}$$

пусть ея корни будутъ x_1, x_2. Единственная симметрическая функція разностей корней этой формы есть:

$$a_0^2(x_1 - x_2)^2 = a_1^2 - a_0a_2 = -H \tag{30}$$

Замѣнимъ x_1 и x_2 обратными величинами $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, то будемъ имѣть:

$$\frac{a_2^2(x_2 - x_1)^2}{(x_1x_2)^2} = a_1^2 - a_0a_2$$

но $a_0^2(x_1x_2)^2 = a_2^2$, слѣдовательно:

$$a_0^2(x_2 - x_1)^2 = a_1^2 - a_0a_2 = a_0^2\psi(x_1, x_2)$$

гдѣ источникъ $\psi(x_1, x_2)$ есть опять функція разностей корней, слѣдовательно это есть неизмѣнная квадратной формы (29):

$$J_{2.2} = a_0^2(x_2 - x_1)^2 = a_1^2 - a_0a_2 = -H \tag{31}$$

она второго порядка въ коэфиціентахъ. Это единственная функція квадратной формы, которая имѣетъ выше указанныя свойства. Форма 2-й степени не имѣетъ соизмѣнныхъ, если не считать ее саму себѣ соизмѣнной.

Примѣръ 2. Пусть будутъ даны двѣ квадратныя формы:

$$a_0x^2+2a_1x+a_2\quad,\quad b_0x^2+b_1x+b_2 \tag{32}$$

ихъ выводъ въ функціи корней и коэфиціентовъ есть:

$$a_0^2b_0^2(x_1-x'_1)(x_1-x'_2)(x_2-x'_1)(x_2-x'_2)=$$
$$=(a_0b_2-a_2b_0)^2-4(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1) \tag{33}$$

x_1, x_2, x'_1, x'_2 суть корни формъ. Замѣщая x_1, x_2, x'_1, x'_2 обратными $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x'_1}$, $\frac{1}{x'_2}$, а коэфиціенты дополнительными, имѣемъ:

$$\frac{a_2^2b_2^2(x'_1-x_1)(x'_2-x_1)(x'_1-x_2)(x'_2-x_2)}{(x_1x_2)^2(x'_1x'_2)^2}=(a_2b_0-a_0b_2)^2-4(a_2b_1-a_1b_2)(a_1b_0-a_0b_1)$$

или замѣчая что $a_0x_1x_2=a_2$, $b_0x'_1x'_2=b_2$, найдемъ:

$$a_0^2b_0^2(x_1-x'_1)(x_1-x'_2)(x_2-x'_1)(x_2-x'_2)=$$
$$=(a_0b_2-a_2b_0)^2-4(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1)$$

слѣдовательно функція (33) есть неизмѣнная системы (32).

Примѣръ 3. Возьмемъ еще симметрическую функцію разностей корней формъ (32):

$$a_0b_0\{(x_1-x'_1)(x_2-x'_1)+(x_1-x'_2)(x_2-x'_1)\}=2(a_0b_2+a_2b_0-2a_1b_1) \tag{34}$$

Дѣлая, указанныя выше преобразованія, найдемъ что функція (34) есть неизмѣнная системы формъ (32).

§ 189. Перейдемъ къ кубической формѣ:

$$U_2=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3 \tag{35}$$

пусть ея корни будутъ x_1, x_2, x_3.

Примѣръ 1. Возьмемъ симметрическую функцію:

$$a_0^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=$$
$$=27(3a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_0a_2^3+6a_0a_1a_2a_3-a_0^2a_3^2) \tag{36}$$

Это есть призначная (§ 147, 10) формы (35). Если сдѣлаемъ указанныя выше преобразованія, то найдемъ, что эта функція есть неизмѣнная кубической формы третьяго порядка:

$$\Delta_3=J_{3,4}=3a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_0a_2^3+6a_0a_1a_2a_3-a_0^2a_3^2 \tag{37}$$

Какъ увидимъ ниже, кубическая форма имѣетъ только эту одну неизмѣнную, всѣ остальныя суть функціи этой послѣдней.

Примѣръ 2. Возьмемъ систему формъ:

$$U_3 = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 \quad , \quad U_2 = b_0x^2 + b_1x + b_2 \qquad (38)$$

Легко видѣть, что функція:

$$\begin{aligned} a_0^2b_0\{ (x_2-x_3)^2(x_1-x'_1)(x_1-x'_2) + \\ + (x_3-x_1)^2(x_2-x'_1)(x_2-x'_2) + (x_1-x_2)^2(x_3-x'_1)(x_3-x'_2)\} = \\ = -9\{b_0(a_1a_3-a^2{}_2) - b_1(a_0a_3-a_1a_2) + b_2(a_0a_2-a^2{}_1)\} = \\ = -9(b_0H_2 - 2b_1H_1 + b_2H) \end{aligned}$$

есть неизмѣнная системы (8).

Примѣръ 3. Возьмемъ двѣ кубическія формы:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 \quad , \quad b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3 \qquad (38')$$

легко показать, что:

$$\begin{aligned} a_0b_0\{(x_1-x'_1)(x_1-x'_2)(x_3-x'_1) + (x_1-x'_2)(x_2-x'_3)(x_3-x'_1) + \\ + (x_1-x'_3)(x_2-x'_1)(x_3-x'_2)\} = a_0b_0\{(x_1-x'_1)(x_2-x'_3)(x_3-x'_2) + \\ + (x_1-x'_2)(x_2-x'_1)(x_3-x'_3) + (x_1-x'_3)(x_2-x'_2)(x_3-x'_1)\} = \\ = 3\{(a_0b_3-a_3b_0) - 3(a_1b_2-a_2b_1)\} \end{aligned} \qquad (39)$$

есть неизмѣнная системы (38').

Легко видѣть, что выводъ системы (38') есть неизмѣнная этой системы.

§ 190. Возьмемъ теперь симметрическую функцію разностей корней кубической формы, которая не удовлетворяетъ условіямъ неизмѣнной, т. е. такую въ каждый членъ которой, не входятъ всѣ корни уравненія и слѣдовательно такую, которая даетъ соизмѣнную.

Примѣръ. Одна изъ самыхъ простыхъ такихъ функцій есть (§ 145, прим. 1):

$$a_0^2\sum(x_2-x_3)^2 = 18(a^2{}_1 - a_0a_2) = -18H \qquad (40)$$

измѣнимъ x_1, x_2, x_3 на $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$; коэфиціенты a_0, a_1, a_2, a_3 на a_3,

a_2, a_1, a_0, то найдемъ:

$$a_3^2\sum\frac{(x_3-x_2)^2}{x_2^2x_3^2}=18(a_2^2-a_1a_3)$$

или:

$$a_3^2\sum\frac{x_1^2(x_3-x_2)^2}{(x_1x_2x_3)^2}=18(a_2^2-a_1a_3)$$

но $a_0(x_1x_2x_3)=-a_3$, слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$a_0^2\sum(x_2-x_3)^2x_1^2=18(a_2^2-a_1a_3) \quad (41)$$

и такъ симметрическая функція $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не есть функція разностей корней, а поэтому она есть источникъ соизмѣнной.

Если измѣнимъ въ уравненіи (41) x_1, x_2, x_3 на x_1-x, x_2-x, x_3-x и коэфиціенты a_0, a_1, a_2, a_3 на U_0, U_1, U_2, U_3, то найдемъ соизмѣнную кубической формы втораго порядка въ коэфиціентахъ и 2-го въ перемѣнныхъ, именно:

$$a_0^2\sum(x_2-x_3)^2(x_1-x)^2=18(U_2^2-U_1U_3)$$

но:

$$U_3=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a^3,\quad U_2=a_0x^2+2a_1x+a_2,\quad U_1=a_0x+a_1,\quad U_0=a_0$$

подставляя и сокращая найдемъ:

$$a_0^2\sum(x_2-x_3)^2(x_1-x)^2=(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)x+(a_1a_3-a_2^2) \quad (42)$$

эта соизмѣнная называется *гессевской* (hessian) и обозначается символомъ $H_{3,x}=C_{3,x}$, т. е.:

$$H_{3,x}=(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)x+(a_1a_3-a_2^2)=Hx^2+2H_1x+H_2 \quad (43)$$

Примѣръ. Мы нашли выше (§ 145, пр. 3):

$$a_0^3(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)=-27(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3) \quad (44)$$

Измѣняя x_1, x_2, x_3 на $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_3}$; коэфиціенты a_0, a_1, a_2, a_3 на дополнительные a_3, a_2, a_1, a_0, найдемъ:

$$a_3^3\left(\frac{2}{x_1}-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{2}{x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{2}{x_3}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=-27(a_0a_3^2-3a_1a_2a_3+2a_2^3)$$

откуда:

$$a_3^3\frac{(2x_2x_3-x_1x_3-x_1x_2)(2x_1x_3-x_1x_2-x_2x_3)(2x_1x_2-x_1x_3-x_2x)}{(x_1x_2x_3)^3}=$$

$$=-27(a_0a_3^2-3a_1a_2a_3+2a_2^3)$$

но $a_0x_1x_2x_3=-a_3$, $x_1x_2+x_1x_2=\frac{3a_2}{a_0}$, откуда:

$$27(a_0x_1x_2-a_3)(a_0x_1x_3-a_3)(a_0x_2x_3-a_3)=-27(a_0a_3^2-3a_1a_2a_3+2a_2^3)$$

Слѣдовательно, источникъ соизмѣнной есть:

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=(a_3-a_0x_1x_2)(a_3-a_0x_1x_3)(a_3-a_0x_2x_3)$$

измѣняя въ немъ x_1, x_2, x_3 на x_1-x, x_2-x, x_3-x, а $a_0a_1a_2a_3$ на U_0, U_1, U_2, U_3 найдемъ соизмѣнную третьяго порядка въ коэфиціентахъ и 3-го порядка въ перемѣнномъ:

$$\{a_3-a_0(x_1-x)(x_2-x)\}\{a_3-a_0(x_1-x)(x_3-x)\}\{a_3-a_0(x_2-x)(x_3-x)\}=$$

$$=U_0U_3^2-3U_1U_2U_3+2U_2^3$$

подставляя значенія $U_3U_2U_1U_0$, найдемъ, означивъ эту соизмѣнную символомъ $G_{3,x}$:

$$G_{3,x}=(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)x^3+3(a_0a_1a_3+a_1^2a_2-2a_0a_2^2)x^2-$$

$$-3(a_0a_2a_3+a_1a_2^2-2a_1^2a_2)x-(a_0a_3^2-3a_1a_2a_3+2a_2^3) \qquad (45)$$

Мы ниже увидимъ, что кубическая форма имѣетъ только эти двѣ $H_{3,x}$ и $G_{3,x}$ соизмѣнныя, которыя называются *основными*; другія суть функція этихъ двухъ.

§ 191. Перейдемъ къ формѣ 4-й степени:

$$U_4=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4 \qquad (46)$$

пусть ея корни будутъ x_1, x_2, x_3, x_4. Мы въ § 145 (пр. 5 и пр. 7) нашли, что:

$$a_0^2\sum(x_2-x_3)^2(x_1-x_4)^2=24(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2) \qquad (47)$$

и

$$a_0^3\{(x_3-x_1)(x_2-x_4)-(x_1-x_2)(x_3-x_4)\}\{(x_1-x_2)(x_3-x_4)-$$

$$-(x_2-x_3)(x_1-x_4)\}\{(x_2-x_3)(x_2-x_4)-(x_3-x_1)(x_2-x_4)\}=$$

$$=-432(a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3) \qquad (48)$$

если оба эти уравненія преобразуемъ, какъ было показано выше, то найдемъ, что обѣ эти функціи суть неизмѣнныя одна 2-го, другая 3-го порядковъ биквадратной формы (46). Одну изъ нихъ мы означили чрезъ J_1, а другую чрезъ J_2:

$$J_1 = J_{4,2} = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 \tag{49}$$

$$J_2 = J_{4,3} = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 \tag{50}$$

Биквадратная форма имѣетъ только эти двѣ неизмѣнныя, остальныя суть функціи этихъ двухъ, такова напримѣръ призначная. Выводъ двухъ биквадратныхъ формъ есть также неизмѣнная системы.

§ 192. Возьмемъ теперь функцію (§ 145, пр. 8):

$$a_0^2 \Sigma (x_1 - x_2)^2 = 48(a_0a_2 - a_1^2) \tag{51}$$

гдѣ знакъ Σ распространяется на всѣ корни биквадратнаго уравненія.

Подставимъ вмѣсто $x_1, x_2 \ldots.$ обратныя значенія $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2} \ldots.$ и измѣнивъ коэфиціенты на дополнительные, найдемъ:

$$a_4^2 \Sigma \frac{(x_1 - x_2)^2 x^2_3 x^2_4}{x^2_1 x^2_2 x^2_3 x^2_4} = 48(a_2a_4 - a^2_3)$$

или

$$a_0^2 \Sigma (x_1 - x_2)^2 x^2_3 x^2_4 = 48(a_2a_4 - a^2_3)$$

слѣдовательно функція:

$$a_0^2 \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_0^2 \Sigma (x_1 - x_2)^2 x^2_3 x^2_4 = 48(a_2a_4 - a^2_3)$$

не есть симметрическая функція разностей корней, слѣдовательно, замѣщая x_1, x_2, x_3, x_4 разностями $x_1 - x$, $x_2 - x$, $x_3 - x$, $x_4 - x$, найдемъ соизмѣнную биквадратной формы:

$$a_0^2 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_3 - x)^2 (x_4 - x)^2 = 48(U_2 U_4 - U_3^2)$$

Подставляя вмѣсто U_2, U_4, U_3 ихъ значенія, найдемъ соизмѣнную, которая называется *гессевскою* биквадратной формы и означается чрезъ $H_{4,x}$. Она втораго порядка въ коэфиціентахъ и 4-й степени въ перемѣнномъ:

$$H_{4,x} = (a_0a_2 - a^2_1)x^4 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)x^3 + (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a^2_2)x^2 + \\ + 2(a_1a_4 - a_2a_3)x + (a_2a_4 - a^2_3) \tag{52}$$

Точно также найдемъ вторую соизмѣнную третьяго порядка въ коэфиціен-

тахъ и 6-й степени въ перемѣнномъ, исходя изъ симметрической функціи разностей корней (§ 145, пр. 9):

$$a_0^3(x_2+x_3-x_1-x_4)(x_3+x_1-x_2-x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)=$$
$$=32(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)=32G$$

Преобразуя это уравненіе, какъ выше, найдемъ:

$$a_4^3\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_4}\right)\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}\right)=$$
$$=32(a_1a^2{}_4+2a^3{}_3-3a_2a_3a_4)$$

уничтожая общаго знаменателя и замѣщая $x_1, x_2\ldots$ разностями x_1-x, $x_2-x,\ldots$, а коэфиціенты $a_0, a_1,\ldots$ выраженіями $U_0, U_1,\ldots$, найдемъ соизмѣнную:

$$a_0^3\psi(x_1-x,\, x_2-x,\, x_3-x,\, x_4-x)=32(U_1U_4{}^2+2U_3{}^3-3U_2U_3U_4) \quad (53)$$

эту соизмѣнную обозначаютъ символомъ $G_{x,3}$:

$$G_{x,3}=U_1U_4{}^2+2U_3{}^3-3U_2U_3U_4$$

Если ее разложить по степенямъ перемѣннаго x, то будемъ имѣть полиномъ 6-й степени:

$$G_{x,3}=A_0x^6+A_1x^5+A_2x^4+A_3x^3+A_4x^2+A_5x+A_6 \quad (55)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned}
A_0&=-a_0^2a_3+3a_0a_1x_2-2a^3{}_1\\
A_1&=-a_0^2a_4-2a_0a_1a_3-6a^2{}_1a_2+9a_0a^2{}_2\\
A_2&=-5a_0a_1a_4-10a^2{}_1a_3+15a_0a_2a_3\\
A_3&=10a_0a^3{}_2-10a^2{}_1a_4 \qquad (56)\\
A_4&=5a_0a_3a_4+10a_1a^2{}_3-15a_1a_2a_4\\
A_5&=a_0a^2{}_4+2a_1a_3a_4+6a^2{}_3a_2-9a^2{}_2a_4\\
A_6&=a_1a^2{}_4-3a_2a_3a_4+2a^3{}_3
\end{aligned}$$

Форма 4-й степени имѣетъ только эти двѣ соизмѣнныя, которыя называются *основными;* всѣ остальныя суть функціи этихъ двухъ.

Примѣръ. Въ § 145 пр. 9 мы нашли:

$$a_0^4\Sigma(x_1-x_2)^4=16\{48(a_0a_2-a^2{}_1)-a_0^2(a_0a_4-4a_1a_3+3a^2{}_2)\} \quad (57)$$

дѣлая извѣстныя преобразованія найдемъ:

$$a_0^4 \Sigma (x_1 - x_2)^4 x^4{}_3 x^4{}_4 = 16 \{ 48(a_2 a_4 - a^2{}_3)^2 - a^2{}_4 (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a^2{}_2) \}$$

откуда найдемъ соизмѣнную:

$$a_0^4 \psi(x_1 x_2 x_3 x_4) = \Sigma (x_1 - x_3)^4 (x_3 - x)^4 (x_4 - x)^4 =$$

$$= 16 \{ 48 (U_2 U_4 - U^2{}_3)^2 - U^2{}_4 (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a^2{}_2) \}$$

или:

$$a_0^4 \Sigma (x_1 - x_2)^4 (x_3 - x)^4 (x_4 - x)^4 = 16 \{ 48 H^3_{4,x} - J_{4,2} . U_4^2 \} \tag{58}$$

Таково происхожденіе и таковы общія свойства этихъ замѣчательныхъ функцій въ анализѣ. Перейдемъ теперь къ болѣе подробному изслѣдованію ихъ свойствъ.

§ 193. Объяснимъ почему были даны названія *неизмѣнная* (invariante) и *соизмѣнная* (covariante) функціямъ корней уравненія полученнымъ выше изложеннымъ способомъ. Пусть уравненіе:

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + n a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{59}$$

будетъ преобразовано проэктивнымъ подстановленіемъ:

$$x = \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{\alpha_2 X + \beta_2} \tag{60}$$

въ уравненіе:

$$A_0 X^n + n A_1 X^{n-1} + \ldots\ldots + n A_{n-1} X + A_n = 0 \tag{61}$$

гдѣ, какъ мы видѣли (10):

$$A_0 = a_0 (\alpha_1 - x_0 \alpha_2)(\alpha_1 - x_2 \alpha_2) \ldots\ldots (\alpha_1 - x_n \alpha_2) \tag{62}$$

x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ суть корни уравненія (59), а X_1, $X_2, \ldots, X$ суть корни преобразованнаго уравненія (61).

Предложеніе. Если:

$$J = a_0^s \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0^s \Sigma (x_1 - x_2)^p (x_2 - x_3)^q \ldots (x_1 - x_n)^t =$$
$$= F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{63}$$

будетъ неизмѣнная формы (59), а

$$J' = A_0^s \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = A_0^s \Sigma (X_1 - X_2)^p (X_2 - X_3)^q \ldots (X_1 - X_n)^t =$$
$$= F(A_0, A_1, \ldots, A_n) \tag{64}$$

та же неизмѣнная только въ корняхъ и коэфиціентахъ преобразованнаго уравненія (62), то:

$$J' = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^k J \tag{65}$$

или:

$$F(A_0, A_1, \ldots, A_n) = (\alpha_1\beta_2)^k \cdot F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{66}$$

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ (11) мы имѣемъ:

$$X_i - X_j = \frac{(\alpha_1\beta_2)(x_i - x_j)}{(\alpha_1 - x_i\alpha_2)(\alpha_1 - x_j\alpha_2)} \tag{67}$$

подставляя въ (64) вмѣсто разностей $X_i - X_j$ ихъ выраженія (67), найдемъ, если сократимъ знаменателя A_0^s, уравненіе (66).

Опредѣленіе. Изъ этого слѣдуетъ, что неизмѣнная есть такая функція коэфиціентовъ формы, которая, будучи составлена изъ коэфиціентовъ проэктивно-преобразованной формы, будетъ равна начальной умноженной на модуль преобразованія. Мы выше видѣли (§ 185, 17), что проэктивное преобразованіе можетъ быть замѣщено двумя линейными:

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y \quad , \quad y = \alpha_2 X + \beta_2 Y \tag{68}$$

если сдѣлать форму однородною, замѣняя x отношеніемъ $\frac{x}{y}$.

Примѣръ. Преобразуя форму:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

подстановленіями (68), найдемъ:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = A_0X^2 + 2A_1XY + A_2Y^2$$

Такъ какъ $a_1^2 - a_0a_2$ есть неизмѣнная этой формы (§ 188), то мы имѣемъ:

$$A_1^2 - A_0A_2 = (\alpha_1\beta_2)^2(a_1^2 - a_0a_2)$$

что легко показать преобразованіемъ.

Примѣръ 2. То-же преобразованіе даетъ:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 = A_0x^3 + 3A_1x^2y + 3A^2xy^2 + A^3y_3$$

Мы видѣли (§ 189), что призначная:

$$a_0^6(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

есть неизмѣнная кубической формы, слѣдовательно, имѣемъ (27):

$$A_0A_3^2 - 6A_0A_1A_2A_3 + 4A_0A_2^3 + 4A_1^3A_3 - 3A_1^2A_2^2 =$$
$$= (\alpha_1\beta_2)^6(a_0a_3^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2)$$

Примѣръ 3. Если преобразуемъ форму 4-й степени:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between x_1 y)^4 = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \between X_1 Y)^4$$

то будемъ имѣть:

$$A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2 = (\alpha_1\beta_2)^4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)$$

такъ какъ это выраженіе есть неизмѣнная (47).

Свойство неизмѣнной, выражаемое уравненіемъ:

$$F(A_0, A_1, \ldots, A_n) = (\alpha_1\beta_2)^k F(a_0, a_1, \ldots a_n)$$

было мотивомъ названія такого рода функцій, которыя не измѣняются линейнымъ преобразованіемъ, а получаютъ только множителя, зависящаго отъ коэфиціентовъ линейнаго преобразованія.

§ 194. *Предложеніе.* Если:

$$a_0^s\psi(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_n - x) = \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n, x)$$

есть соизмѣнная формы (59), а

$$A_0^s\psi(X_1 - X, X_2 - X, \ldots, X_n - X) = \Phi(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, X)$$

есть та-же функція, составленная изъ преобразованной формы (61), то мы имѣемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, X) = (\alpha_1\beta_2)^k\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n, x) \qquad (69)$$

Доказательство. Такъ какъ $a_0^s\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть источникъ соизмѣнной, то она имѣетъ форму:

$$a_0^s\psi(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_n, x) =$$
$$= a_0^s\,\Sigma\,(x_1 - x_2)^a.(x_2 - x_3)^e\ldots(x_1 - x)^p.(x_2 - x)^q\ldots \qquad (70)$$

слѣдовательно:

$$a_0^s\psi(X_1 - X, X_2 - X, \ldots, X_n - X) =$$
$$= A_0^s\,\Sigma(X_1 - X_2)^a.(X_2 - X_3)^e\ldots.(X_1 - X)^p.(X_2 - X)^q\ldots \qquad (71)$$

преобразуя это выраженіе съ помощью формулы (60) и замѣчая, что множители $a_1 - x_1\alpha_2$, $\alpha_1 - x_2\alpha_2$, ... всѣ входятъ въ знаменателя въ одинаковой степени s, такъ какъ въ источникъ каждый корень входитъ въ степень s, то получимъ послѣ сокращеній съ A_0 выраженіе (69), умноженное только на k-ю степень модуля преобразованія.

Опредѣленіе. Изъ этого слѣдуетъ, что соизмѣнная есть такая функція коэфиціентовъ и перемѣннаго данной формы, которая пріобрѣтаетъ только множителя—модуль преобразованія въ извѣстной степени, когда въ нее будутъ подставлены коэфиціенты и перемѣнныя линейно-преобразованной формы (61).

§ 195. Не трудно видѣть, въ каждомъ частномъ случаѣ, приводитъ-ли преобразованіе функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ къ неизмѣнной или соизмѣнной. Если преобразованіе приводитъ къ неизмѣнной, то мы имѣемъ:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \pm a_0^s\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

или:

$$F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \pm F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$$

т. е. $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не измѣняется, если корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$) замѣстимъ ихъ обратными величинами или измѣняетъ только знакъ. Но такое замѣщеніе корней равносильно замѣщенію коэфиціентовъ a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ дополнительными коэфиціентами. Слѣдовательно, если функція цѣлая раціональная коэфиціентовъ уравненія есть неизмѣнная, то она не измѣняется, исключая знака, если коэфиціенты ея составляющіе замѣщаются ихъ дополнительными.

Примѣръ 1. Функція:

$$a_0a_2 - a^2_1$$

есть неизмѣнная квадратной формы, слѣдовательно не измѣняется если a_0, a_1, a_2 замѣстимъ a_2, a_1, a_0.

Примѣръ 2. Функція:

$$a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a^2_1$$

есть неизмѣнная формы 4-й степени, слѣдовательно она не измѣняется если a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 замѣстить чрезъ a_4, a_3, a_2, a_1, a_0. Легко провѣрить это на всѣхъ выше найденныхъ неизмѣнныхъ.

§ 196. Въ § 148 мы видѣли, что если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть цѣлая однородная s-го порядка симметрическая функція разностей корней фор-

мы f, то изъ нее получимъ соизмѣнную, измѣнивъ корни x_1, x_2,... на $\frac{1}{x_1-x}$, $\frac{1}{x_2-x}$,... и умноживъ на f^s, т. е. соизмѣнная будетъ:

$$f^s\varphi\left(\frac{1}{x_1-x}, \frac{1}{x_2-x}, \ldots, \frac{1}{x_n-x}\right) \tag{72}$$

которую можно написать въ формѣ:

$$\frac{f^s}{x^k}\varphi\left(\frac{x}{x_1-x}, \frac{x}{x_2-x}, \ldots, \frac{x}{x_n-x}\right) \tag{73}$$

гдѣ s есть порядокъ, а k вѣсъ функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Такъ какъ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть функція разностей корней, то мы можемъ къ каждому изъ отношеній $\frac{x}{x_2-x}$ прибавить по 1, въ силу чего это отношеніе сдѣлается $\frac{x_2}{x_2-x}$, откуда функція приметъ форму:

$$\frac{f^s}{x^k}\varphi\left(\frac{x_1}{x_1-x}, \frac{x_2}{x_2-x}, \ldots, \frac{x_n}{x_n-x}\right)$$

которую, помножая каждое изъ отношеній на x, можно написать такъ:

$$\frac{f^s}{x^{2k}}\varphi\left(\frac{x_1x}{x_1-x}, \frac{x_2x}{x_2-x}, \ldots, \frac{x_nx}{x_n-x}\right)$$

а этой послѣдней можно дать форму:

$$(-1)^k f_{,,}^s x^{ns-2k}\varphi\left(\frac{1}{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x}}, \frac{1}{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x}}, \ldots, \frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x}}\right)$$

гдѣ:

$$f_{,,}=a_n\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_n}\right)$$

Слѣдовательно:

$$f^s\varphi\left(\frac{1}{x_1-x}, \frac{1}{x_2-x}, \ldots, \frac{1}{x_n-x}\right)=$$

$$=(-1)^k f_{,,}^s x^{ns-2k}\varphi\left(\frac{1}{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x}}, \frac{1}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x}}, \ldots, \frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x}}\right) \tag{74}$$

откуда видимъ, что соизмѣнная не измѣняется, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x замѣстимъ обратными величинами, а коэфиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ дополнительными $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ и результатъ умножимъ на $(-1)^k x^{ns-2k}$.

§ 197. Пусть теперь:

$$(B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n \between x, 1)^m \tag{75}$$

будетъ соизмѣнная m-й степени формы (26), $B_0, B_1, \ldots, B_m$ суть функціи коэфиціентовъ $a_0, a_1, \ldots, a_n$, по предъидущему эта соизмѣнная не измѣняется если $a_0, a_1, \ldots, a_n$, x замѣстимъ чрезъ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, $\frac{1}{x}$ и умножимъ на $(-1)^k x^{ns-2k}$, чрезъ это форма (75) приметъ форму.

$$(-)^k x^{ns-2k}(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)\left(\frac{1}{x}, 1\right)^m \tag{76}$$

и такъ какъ это функція цѣлая и такой же формы какъ и (75), то необходимо чтобы

$$m = ns - 2k \quad , \quad B_0 = (-1)^k C_m \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad B_2 = (-1)^k C_{m-2} \tag{17}$$

Эти равенства опредѣляютъ степень соизмѣнной въ функціи ея порядка и вѣса и показываютъ въ какой зависимости находятся коэфиціенты соизмѣнной равно-отстоящіе отъ концовъ. Эта зависимость выражается слѣдующимъ образомъ.

Если $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ есть какой-нибудь изъ коэфиціентовъ соизмѣнной, то его сопряженный или равноотстоящій отъ конца будетъ:

$$(-1)^k F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

Изъ равенства $m = ns - 2k$ выводимъ слѣдующія весьма важныя свойства:

1. Если $a_n^s \varphi$ есть неизмѣнная, то мы имѣемъ $ns = 2k$.

Въ самомъ дѣлѣ, соизмѣнная есть неизмѣнная нулеваго порядка, слѣдовательно $ns - 2k = 0$, откуда $ns = 2k$. Или еще, такъ какъ функціи φ и ψ тождественны, то ихъ вѣсъ k и $ns - k$ должны быть равны, откуда $ns = 2k$.

2. Всѣ неизмѣнныя формы нечетной степени должны быть четнаго порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіи $ns = 2k$ число n нечетное, то s должно быть число четное, а k множитель числа n.

3. Всѣ соизмѣнныя формы четной степени должны быть сами четной степени.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіи $m=ns-2k$ n есть число четное, то и m есть четное число.

4. Выводъ двухъ соизмѣнныхъ всегда будетъ четной степени въ коэфиціентахъ начальной формы.

Въ самомъ дѣлѣ, степень вывода, выраженная въ функціи порядка и вѣса соизмѣнныхъ, какъ мы видѣли выше (§ 121, (7)) есть:

$$s(ns'-2k')+s'(ns-2k)=2(nss'-sk'-sk)$$

Примѣръ 1. Показать что выводъ двухъ уравненій есть неизмѣнная системы?

Примѣръ 2. Показать что призначная есть неизмѣнная формы?

Примѣръ 3. Доказать что какая-нибудь функція разностей корней соизмѣнной:

$$f^s(x)\,\varphi\left(\frac{1}{x_1-x},\frac{1}{x_2-x},\ldots,\frac{1}{x_n-x}\right)$$

приравненной нулю есть функція разностей корней $x_1,x_2,\ldots,x_n$ формы?

Примѣръ 4. Пусть x_1,x_2,x_3 и x'_1,x'_2 будутъ корни уравненій:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0\quad,\quad b_0x^2+2b_1x+b_2=0$$

выразить въ коэфиціентахъ уравненій функцію корней:

$$\varphi=(x_2-x_3)^2(x_1-x'_1)(x_1-x'_2)+$$
$$+(x_3-x_1)^2(x_2-x'_1)(x_2-x'_2)+(x_1-x_2)(x_3-x'_1)(x_3-x'_2)$$

Легко найти что:

$$-a_0^2b_0\varphi=9\left\{b_0(a_1a_2-a_2^2)-b_1(a_0a_2-a_1a_2)+b_2(a_0a_2-a_1^2)\right\}$$

и убѣдиться, соображаясь съ опредѣленіемъ неизмѣнной (§ 148), что это есть неизмѣнная системы.

Примѣръ 5. Показать, если x_1,x_2,x_3, x'_1,x_2',x'_3 суть корня уравненій:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0\quad,\quad b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$$

что функція:

$$(x_1-x'_1)(x_2-x'_2)(x_3-x'_3)+(x_1-x'_2)(x_2-x'_3)(x_3-x'_1)+$$
$$+(x_1-x'_3)(x_2-x'_1)(x_3-x'_2)$$

или въ иномъ порядкѣ:

$$(x_1-x'_1)(x_2-x'_3)(x_3-x'_2)+(x_1-x'_2)(x_2-x'_3)(x_3-x'_3)+$$
$$+(x_1-x'_3)(x_2-x'_2)(x_3-x'_1)$$

есть неизмѣнная и, выраженная въ коэфиціентахъ формъ, имѣетъ форму:

$$3\left\{(a_0b_3-a_3b_0)-3(a_1b_2-b_1a_2)\right\}$$

Примѣръ 6. Если x_1, x_2, x_3, x_4, x'_1, x_2', x_3', x_4' суть корни уравненій:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_1x+a_4=0 \quad , \quad b_0x^4+4b_1x^3+6b_2x^2+4b_3x+b_4=0$$

показать что функція:

$$a_0b_0\,\Sigma(x_1-x'_1)(x_2-x'_2)(x_3-x'_3)(x_4-x'_4)=$$
$$=24\left\{a_0b_4+a_4b_0-4(a_1b_3+a_3b_1)+6a_2b_2\right\}$$

есть неизмѣнная системы?

Примѣръ 7. Найти выраженія функцій:

$$a_0b_0^2\,\Sigma(x'_1-x_1)(x'_1-x_2)(x'_2-x_3)(x'_2-x_4)$$

и

$$a_0^2b_0^2\,\Sigma(x_1-x_2)^2(x_3-x'_1)(x_4-x'_2)(x_3-x'_2)(x_4-x'_1)$$

въ коэфиціентахъ уравненій:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \quad , \quad b_0x^2+2b_1x+b_2=0$$

и показать, что это суть неизмѣнныя системы?

§ 198. Мы видѣли выше (§ 142), что если:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

гдѣ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть цѣлая однородная симметрическая функція корней уравненія, то мы имѣемъ:

$$a_0^s\delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a_0\frac{\partial F}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial F}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial F}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial F}{\partial a_n} \quad (78)$$

если уравненіе (4) дано съ биноміальными коэфиціентами и

$$a_0^s\delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=na_0\frac{\partial F}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial F}{\partial a_2}+(n-2)a_2\frac{\partial F}{\partial a_3}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial F}{\partial a_n} \quad (79)$$

безъ биноміальныхъ коэфиціентовъ. Если мы представимъ коэфиціенты $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_2, \ldots, a_n$ функціями такого фиктивнаго перемѣнннаго ξ, что:

$$\frac{\partial a_1}{\partial \xi} = a_0 \ , \ \frac{\partial a_2}{\partial \xi} = 2a_1 \ , \ \frac{\partial a_3}{\partial \xi} = 3a_2 \ , \ldots , \frac{\partial a_2}{\partial \xi} = ra_{2-1} , \ldots , \frac{\partial a_n}{\partial \xi} = na_{n-1} \quad (80)$$

то тождество (78) можно написать въ формѣ:

$$a_0^2 \delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (81)$$

слѣдовательно, символъ D (§ 142) замѣщается символомъ $\frac{\partial}{\partial \xi}$. Если же уравненіе написано безъ биноміальныхъ коэфиціентовъ, то фиктивное перемѣнное, которое мы означимъ чрезъ η, должно имѣть такое свойство:

$$\frac{\partial a_1}{\partial \eta} = na_0 \ , \ \frac{\partial a_2}{\partial \eta} = (n-1)a_1$$
$$\frac{\partial a_3}{\partial \eta} = (n-2)a_2 , \ldots , \frac{\partial a_2}{\partial \eta} = (n-r+1)a_{2-1} , \ldots , \frac{\partial a_n}{\partial \eta} = a_{n-1} \quad (82)$$

при такихъ условіяхъ тождество (79) напишется въ формѣ:

$$a_0^2 \delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial \eta} F(a_0, a_1, \ldots, a_n) \quad (83)$$

Примѣръ. Пусть будетъ дана функція:

$$a_0^2 \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 2a_1 a_5 - 2a_2 a_4 + a_3^2 - 2a_0 a_6 \quad (84)$$

дѣйствуя символомъ δ надъ первою частью и символомъ $\frac{\partial}{\partial \eta}$ надъ второю, найдемъ:

$$a_0^2 \delta \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 = \frac{\partial}{\partial \eta} (2a_1 a_5 - 2a_2 a_4 + a_3^2 - 2a_0 a_6)$$

откуда:

$$a_0^2 \delta \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 5a_0 a_5 + 2(n-4)a_1 a_4 - 2(n-1)a_1 a_4 + 2a_2 a_3 \quad (85)$$

такъ какъ формула (84) вычислена для уравненія безъ биноміальныхъ коэфиціентовъ.

§ 199. Замѣтивъ это, мы возвратимся къ нашему предмету. Въ § 144 мы видѣли, что:

$$a_0^2 \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n) \quad (86)$$

гдѣ φ есть цѣлая однородная симметрическая функція ρ-го порядка разностей корней уравненія:

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (87)$$

откуда мы имѣемъ:

$$a_0^\rho \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \qquad (87)$$

измѣняя $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_n - x$ будемъ имѣть соизмѣнную:

$$a_0^\rho \psi(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_n - x) = F(U_n, U_{n-1}, \ldots, U_1, U_0) \qquad (89)$$

функція $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть источникъ соизмѣнной. Такъ какъ источникъ ψ есть цѣлая однородная симметрическая функція, то имѣемъ:

$$a_0^\rho \delta\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \qquad (90)$$

Но вообще мы имѣемъ:

$$\psi(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_n - x) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) -$$

$$- x\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$+ \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) -$$

$$- \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$+ \ldots + \frac{x^2}{1.2.3\ldots 2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (91)$$

или, замѣчая, что:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} = -\delta$$

найдемъ:

$$\psi(x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_n - x) = \psi(x_1, \ldots, x_n) + x\delta\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \frac{x^2}{1.2}\delta^2\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r}\delta^r\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (92)$$

помножая обѣ части на a_0^ϱ и замѣчая, что:

$$a_0^\varrho \delta^p \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n = \frac{\partial^p}{\partial \xi^p} F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$$

найдемъ:

$$a_0^\varrho \psi(x_1-x, x_2-x, \ldots, x_n-x) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) +$$

$$+ x\frac{\partial}{\partial \xi} F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) + \frac{x^2}{1.2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{x^r}{1.2\ldots r}\frac{\partial^r}{\partial \xi^r} F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$$

или:

$$F(U_n, U_{n-1}, \ldots, U_1, U_0) = F + x\frac{\partial}{\partial \xi} F + \frac{x^2}{1.2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \ldots + \frac{x^r}{1.2\ldots r}\frac{\partial^r}{\partial \xi^r} F \qquad (93)$$

Изъ этого видимъ, что имѣя источникъ соизмѣнной въ функціи коэфиціентовъ формы, мы послѣдовательнымъ дѣйствіемъ $\frac{\partial}{\partial \xi}$ получимъ всѣ коэфиціенты соизмѣнной; послѣднимъ коэфиціентомъ будетъ начальная функція $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, изъ которой былъ образованъ источникъ, дѣйствіе надъ ней символа $\frac{\partial}{\partial \xi}$ даетъ въ результатѣ нуль, такъ какъ она есть симметрическая функція разностей корней (§ 144). Соотвѣтственно, дѣйствіе δ надъ источникомъ $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ понижаетъ всякій разъ степень корней, пока не получится начальная симметрическая функція $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ только разностей корней, надъ которой дѣйствіе δ даетъ въ результатѣ нуль. Совокупныя дѣйствія символовъ δ и $\frac{\partial}{\partial \xi}$ надъ $a_0^3\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ даютъ зависимость между корнями и коэфиціентами формы числомъ равнымъ числу коэфиціентовъ въ соизмѣнной.

Такъ какъ символъ $\frac{\partial}{\partial \xi}$ понижаетъ вѣсъ функціи на единицу, то очевидно, что степень m соизмѣнной равна разности вѣсовъ крайнихъ членовъ т. е. равна числу дѣйствій δ надъ $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для того чтобы получить начальную функцію $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если вѣсъ функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть k, а вѣсъ функціи $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть, какъ мы видѣли (§ 197) $ns-k$, то степень соизмѣнной будетъ:

$$m = ns - s - k = ns - 2k$$

какъ выше было показано.

Примѣръ 1. Возьмемъ кубическое уравненіе:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

мы нашли выше (§ 145, 80):

$$a_0^2\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_0^2\Sigma(x_2-x_3)^2 = 18(a^2{}_1-a_0a_2)$$

откуда будемъ имѣть источникъ $\psi(x_1, x_2, x_3)$, какъ было показано (§ 188):

$$a_0^2\psi(x_1, x_2, x_3) = a_0^2\Sigma x^2{}_1(x_2-x_3)^2 = 18(a^2{}_2 - a_1a_3)$$

откуда дѣйствуя символомъ $\delta = \frac{\partial}{\partial\xi}$, найдемъ:

$$-a_0^2\Sigma 2x_1(x_2-x_3)^2 = 18(a_1a_2 - a_0a_3)$$

дѣйствуя еще разъ найдемъ:

$$a_0^2\Sigma 2(x_2-x_3)^2 = 36(a^2{}_1-a_0a_2)$$

слѣдующее дѣйствіе $\delta = \frac{\partial}{\partial\xi}$ обращаетъ обѣ части въ нуль, слѣдовательно искомая соизмѣнная есть:

$$(a_1a_3-a^2{}_2) + (a_0a_3-a_1a_2)x + (a_0a_2-a^2{}_1)x^2$$

это соизмѣнная, найденная выше (42), она называется *гессевской* соизмѣнной кубической формы.

Примѣръ 2. Взявъ за источникъ:

$$a_0a^2{}_3-3a_1a_2a_3 + 2a^3{}_1$$

будемъ имѣть соизмѣнную 3-ей степени кубической формы:

$$G_{3,x} = (a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a^3{}_1)x^3 + 3(a_0a_1a_3+a^2{}_1a_2-2a_0a^2{}_2)x^2 -$$
$$-(a_0a^2{}_2-3a_1a_2a_3+2a^3{}_2) - 3(a_0a_2a_3-a_1a^2{}_2-2a^2{}_1a_3)x$$

Примѣръ 3. Для формы четвертой степени:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

то будемъ имѣть:

$$a_0^2\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_0^2\Sigma(x_3-x_4)^2 = 18(a^2{}_1-a_0a_2)$$

откуда будемъ имѣть источникъ:

$$a_0^2\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_0^2 \Sigma x^2_1 x^2_2 (x_3-x_4)^2 = 18(a^2_3-a_2a_4)$$

Дѣйствуя символомъ $\frac{\partial}{\partial\xi}$ надъ источникомъ:

$$a^2_3 - a_2a_4$$

найдемъ послѣдовательно коэфиціенты соизмѣнной:

$$a^2_3 - a_2a_3$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(a^2_3-a_2a_3) = 2(a_2a_3-a_1a_4) \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(a_1a_4-a_2a_3) = 3a^2_2 - 2a_1a_3 - a_0a_4$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}(a^3_2-a_1a_3) = 2(a_1a_2-a_0a_3) \quad , \quad \frac{\partial^4}{\partial\xi^4}(a^2_3-a_2a_3) = a^2_1 - a_0a_2$$

слѣдовательно соизмѣнная будетъ 4-й степени, она называется *гессевской* формы 4-й степени:

$$H_{4,x} = (a^2_1 - a_0a_2)x^4 + 2(a_1a_2-a_0a_3)x^3 + (3a^2_2-2a_1a_3-a_0a_4)x^2 +$$
$$+ 2(a_2a_3-a_1a_4)x + (a^2_3-a_2a_3) \qquad (94)$$

Замѣтимъ, что послѣдніе два коэфиціента получаются изъ первыхъ двухъ замѣщеніемъ коэфиціентовъ ихъ дополнительными (§ 197).

§ 200. Если:

$$a_0^2\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

есть источникъ соизмѣнной:

$$\Phi(x) = b_0x^m + mb_1x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}b_2x^{m-2} + \ldots + mb_{m-1}x + b_m \qquad (95)$$

формы:

$$U_n = f(x) = a_0x_n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x_{n-2} + \ldots + na_{n-1}x + a_n \qquad (96)$$

гдѣ $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ суть функціи коэфиціентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, то будемъ имѣть (28):

$$a_0^2\psi(x_1-x, x_2-x, \ldots, x_n-x) = F(U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots, U_1, U_0) = \Phi(x) \qquad (97)$$

Возьмемъ производную отъ обѣихъ частей предъидущаго уравненія по x:

$$-a_0^\xi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\ .\ .\ .\ +\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\psi(x_1-x, x_2-x, \ldots, x_n-x)=\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)$$

или (§ 142):

$$a_0^\xi\delta\psi(x_1-x, x_2-x, \ldots, x_n-x)=\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)$$

но мы видѣли выше (90), что:

$$a_0^\xi\delta\psi(x_1-x, x_2-x, \ldots, x_n-x)=\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(x)$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)=\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(x) \tag{98}$$

или:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)=\left(a_0\frac{\partial}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial}{\partial a_3}+\ .\ .\ .\ +na_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_n}\right)\Phi(x) \tag{99}$$

въ первой части производная взята по x, а во второй части символъ ξ относится къ коэфиціентамъ соизмѣнной $\Phi(x)$. Такому дифференціальному уравненію удовлетворяетъ соизмѣнная.

Если въ уравненіе (98) представимъ соизмѣнную въ формѣ полинома (95), то найдемъ:

$$\begin{aligned}
&mb_0x^{m-1}+m(m-1)b_1x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}b_2x^{m-3}+\\
&\quad+\ .\ .\ .\ +m(m-1)b_{m-2}x+mb_{m-1}=\\
&=x^m\frac{\partial}{\partial\xi}b_0+x^{m-1}\frac{\partial}{\partial\xi}b_1+x^{m-2}\frac{\partial}{\partial\xi}b_2+\ .\ .\ .\ .\ .\ +\\
&\quad+x^2\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{\partial}{\partial\xi}b_{m-2}+xm\frac{\partial}{\partial\xi}b_{m-1}+\frac{\partial}{\partial\xi}b_m
\end{aligned} \tag{100}$$

сравнивая коэфиціенты у этого тождества, найдемъ:

$$\frac{\partial b_0}{\partial\xi}=0\ ,\ \frac{\partial b_1}{\partial\xi}=b_0\ ,\ \frac{\partial b_2}{\partial\xi}=2b_1\ ,\ \frac{\partial b_3}{\partial\xi}=3b_2\ ,\ .\ .\ .\ \frac{\partial b_m}{\partial\xi}=mb_{m-1} \tag{101}$$

слѣдовательно, если будетъ извѣстенъ послѣдній коэфиціентъ b_m соизмѣнной, то всѣ остальные получатся послѣдовательнымъ дѣйствіемъ $\frac{\partial}{\partial\xi}$.

Но такъ какъ мы имѣемъ:

$$a_0^\rho\psi(x_1-x,\ x_2-x, \ldots, x_n-x) = b_0x^m + mb_1x^{m-1} + \ldots + mb_{m-1}x + b_m \quad (102)$$

то, полагая въ этомъ тождествѣ $x=0$, найдемъ:

$$b_m = a_0^\rho\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \quad (103)$$

т. е. коэфиціентъ b_m есть источникъ соизмѣнной. Слѣдовательно, если имѣемъ источникъ соизмѣнной, то легко построить всѣ ея коэфиціенты, какъ мы показали выше (101). Такъ какъ $\frac{\partial b_0}{\partial \xi}=0$, то b_0 или первый коэфиціентъ соизмѣнной, есть симметрическая функція разностей корней.

§ 201. Преобразуемъ уравненіе (87) въ уравненіе:

$$a_ny^n + na_{n-1}y^{n-1} + \ . \ . \ . + na_1y + a_0 = 0 \quad (104)$$

коего корни суть обратные его корнямъ. Соизмѣнная (95) преобразуется въ:

$$b_my^m + mb_{m-1}y^{m-1} + \ . \ . \ . \ . + mb_1y + b_0 \quad (105)$$

Если функція:

$$a_0^\rho\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n) \quad (106)$$

была та симметрическая функція разностей корней уравненія (96), изъ которой получился источникъ:

$$a_0^\rho\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \quad (107)$$

соизмѣнной, то очевидно, что:

$$a_n^\rho\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \quad (108)$$

будетъ та функція разностей корней уравненія (144), изъ которой получится источникъ:

$$a_n^\rho\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

для соизмѣнной (105).

Но очевидно, что:

$$a_n^\rho\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_0^\rho\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

слѣдовательно $a_0^\rho\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть источникъ для соизмѣнной (105).

Но соизмѣнная (105) получается изъ источника $a_n^2\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ измѣняя $y_1, y_2, \ldots, y_n$ на $y_1-y, y_2-y, \ldots, y_n-y$, слѣдовательно:

$$a_n^2\psi(y_1-y, y_2-y, \ldots, y_n-y) = b_m y^m + mb_{m-1}y^{m-1} + \ldots + mb_1 y + b_0$$

полагая $y=0$, найдемъ:

$$a_n^2\psi(y_1, y, \ldots, y_n) = b_0 = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

Дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ соизмѣнная (105), соотвѣтствующее уравненію (98), очевидно, если положимъ:

$$x^m\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \Phi_1(x) \tag{109}$$

будетъ имѣть форму:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = \left(a_n\frac{\partial}{\partial a_{n-1}} + 2a_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_{n-2}} + 3a_{n-2}\frac{\partial}{\partial a_{n-3}} + \ldots + na_1\frac{\partial}{\partial a_0}\right)\Phi_1 \tag{110}$$

Обозначая символъ второй части чрезъ $\frac{\partial}{\partial\eta}$, найдемъ:

$$\frac{\partial\Phi_1.(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\eta}\Phi_1(x) \tag{111}$$

подставляя въ это уравненіе соизмѣнную (105) найдемъ, какъ выше:

$$\frac{\partial b_m}{\partial\eta} = 0\ ,\quad \frac{\partial b_{m-1}}{\partial\eta} = b_m\ ,\quad \frac{\partial b_{m-2}}{\partial\eta}\ ,\ \ldots\ldots,\ \frac{\partial b_0}{\partial\eta} = mb_1 \tag{112}$$

изъ этого видимъ, что изъ функціи:

$$a_0^n\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

послѣдовательнымъ дѣйствіемъ символа $\frac{\partial}{\partial\eta}$ могутъ быть получены всѣ коэфиціенты соизмѣнной.

Примѣръ. Для соизмѣнной формы 3-й степени источникъ былъ полученъ изъ функціи:

$$a_0^2\Sigma(x_2-x_3)^2 = 18(a^2{}_1-a_0a_2) = F(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

Символъ $\frac{\partial}{\partial\eta}$ относительно этой формы будетъ:

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = a_3\frac{\partial}{\partial a_3} + 2a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + 3a_1\frac{\partial}{\partial a_0}$$

или символъ $\frac{\partial}{\partial\eta}$ имѣетъ слѣдующее свойство:

$$\frac{\partial a_{n-1}}{\partial\eta}=a_n \quad , \quad \frac{\partial a_{n-2}}{\partial\eta}=2a_{n-1}$$

$$\frac{\partial a_{n-3}}{\partial\eta}=3a_{n-2} \quad , \; . \; . \; . \; . \; , \quad \frac{\partial a_1}{\partial\eta}=(n-1)a_2 \quad , \quad \frac{\partial a_0}{\partial\eta}=na_1$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial F}{\partial\eta}=18(a_1a_2-a_0a_3) \quad , \quad \frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}=36(a_2^2-a_1a_3) \quad , \quad \frac{\partial^3F}{\partial\eta^3}=0$$

Изъ этого видимъ, что дѣйствуя послѣдовательно символомъ $\frac{\partial}{\partial\eta}$ надъ источникомъ:

$$a_0^{\varrho}\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)=F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$$

мы послѣ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ дѣйствій, найдемъ:

$$\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)=F(a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{113}$$

и обратно:

$$\frac{\partial^m}{\partial\eta^m}F(a_0, a_1, \ldots, a_n)=F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \tag{114}$$

число дѣйствій для этого покажетъ степень соизмѣнной.

§ 202. Если функція коэфиціентовъ формы будетъ неизмѣнная:

$$\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

то она должна удовлетворять слѣдующимъ двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$a_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\ldots\ldots+na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\equiv 0$$

и (115)

$$a_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}}+2a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-2}}+3a_{n-2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-3}}+\ldots\ldots+na_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}\equiv 0$$

Это слѣдуетъ изъ того, что неизмѣнная есть соизмѣнная 0-й степени, т. е. не зависитъ отъ перемѣннаго x, слѣдовательно, въ (98) и (111):

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x}=0$$

т. е.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}=0$$

§ 203. Въ § 197 было показано, что если форма будетъ n-й степени, s порядокъ, а k вѣсъ источника, то степень m соизмѣнной данной формы будетъ:

$$m = ns - 2k \tag{116}$$

Если степень соизмѣнной $m = 0$, то соизмѣнная будетъ неизмѣнная и мы будемъ имѣть:

$$2k = ns \tag{117}$$

откуда:

$$k = \tfrac{1}{2} ns \tag{118}$$

Слѣдовательно, если будетъ дана форма извѣстной степени n и порядокъ s неизмѣнной, то будетъ данъ и вѣсъ ея k. На основаніи этихъ данныхъ можно построить всѣ члены неизмѣнной съ неопредѣленными коэфиціентами, которые затѣмъ можно опредѣлить совершенно такъ, какъ мы опредѣляли симметрическія функціи, зная порядокъ и вѣсъ. Пусть, напримѣръ, требуется составить неизмѣнную формы 4-й степени, который-бы порядокъ былъ равенъ 3? Изъ формулы (118) сейчасъ видно, что вѣсъ искомой неизмѣнной долженъ быть равенъ 6-ти, а слѣдовательно, неизмѣнная будетъ:

$$J = A_1 a_0 a_2 a_4 + A_2 a_1^2 a_4 + A_3 a_0 a_3^2 + A_4 a_1 a_2 a_3 + A_5 a_2^3 \tag{119}$$

порядокъ каждаго члена этой функціи есть 3, а вѣсъ 6. Остается опредѣлить коэфиціенты A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Мы видѣли выше (115), что неизмѣнная должна удовлетворять слѣдующему дифференціальному уравненію:

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = 0 \tag{120}$$

гдѣ:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots\ldots + na_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} \tag{121}$$

дѣйствуя символомъ $\frac{\partial}{\partial \xi}$ надъ J, найдемъ:

$$(2A_1 + 2A_2) a_0 a_1 a_4 + (4A_1 + 6A_3 + A_4) a_0 a_2 a_3 + (4A_2 + A_4) a_1^2 a_3 + \\ + (3A_4 + 6A_5) a_1 a_2^2 = 0 \tag{122}$$

откуда, полагая $A_1 = 1$, найдемъ:

$$A_2 = -1 \quad , \quad A_3 = -1 \quad , \quad A_4 = 2 \quad , \quad A_5 = -1$$

слѣдовательно:

$$J = a_0a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 \qquad (123)$$

Когда мы опредѣляемъ этимъ способомъ неизмѣнную даннаго порядка, то приходится опредѣлить нѣсколько неизвѣстныхъ коэфиціентовъ, что дѣлается съ помощью нѣсколькихъ условій, получаемыхъ дифференціальнымъ уравненіемъ, которому должна удовлетворять неизмѣнная. Теперь очевидно, что если число этихъ условій больше числа неизвѣстныхъ коэфиціентовъ, то вообще составить неизмѣнную невозможно, если-же число условій равно числу коэфиціентовъ, то можно составить только одну неизмѣнную даннаго порядка; наконецъ, если это число меньше числа коэфиціентовъ, то можно составить нѣсколько неизмѣнныхъ даннаго порядка.

Изъ всего сказаннаго выше, видимъ, что число членовъ въ неизмѣнной, которое однимъ больше числа неизвѣстныхъ коэфиціентовъ, равно числу способовъ, въ которыхъ вѣсъ $\frac{1}{2}ns$ неизмѣнной можетъ быть написанъ какъ сумма чиселъ числомъ s, изъ коихъ ни одно не превышаетъ числа n, т. е. сколькими способами можно удовлетворить уравненію:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_s = \tfrac{1}{2}ns \qquad (124)$$

гдѣ каждое изъ чиселъ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_s$ не больше n. Но дѣйствіе символа $\frac{\partial}{\partial\xi}$ надъ неизмѣнною J уменьшаетъ вѣсъ ея на единицу, слѣдовательно, число условій, которымъ должны удовлетворять неизвѣстные коэфиціенты, будетъ равно числу способовъ, въ которыхъ число $\frac{1}{2}ns - 1$ можетъ быть написано какъ сумма чиселъ числомъ s, изъ коихъ ни одно не превышаетъ числа n, т. е. сколькими способами можно удовлетворить уравненію:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_s = \tfrac{1}{2}ns - 1 \qquad (125)$$

гдѣ каждое изъ чиселъ $u_1, u_2, u_3, \ldots u_s$ не превышаетъ числа n. Въ предъидущемъ примѣрѣ число условій, которымъ должны удовлетворять коэфиціенты неизмѣнной, равно числу способовъ, въ которыхъ число 5 можетъ быть написано, какъ сумма трехъ чиселъ отъ 0 до 4 включительно.

Вообще, чтобы рѣшить, когда неизмѣнная даннаго порядка извѣстной формы можетъ быть составлена и когда такихъ неизмѣнныхъ больше одной, надобно сравнить числа рѣшеній уравненій (124) и (125).

§ 204. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будетъ симметрическая функція цѣлая, однородная s-го порядка разностей корней уравненія:

$$a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + na_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (126)$$

то будемъ имѣть:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

дѣлая преобразованіе, замѣщая $x_1, x_2, \ldots$ величинами обратными $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots$ найдемъ, какъ было сказано выше (§ 187), неизмѣнную или источникъ соизмѣнной:

$$a_0^s\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \tag{128}$$

Если вѣсъ функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть k, а степень соизмѣнной m, то: вѣсъ функціи $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ будетъ:

$$k = \tfrac{1}{2}(ns - m) \tag{129}$$

Если $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ суть индексы въ какомъ нибудь изъ членовъ F, то имѣемъ:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots = \tfrac{1}{2}(ns - m)$$

если теперь въ $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ замѣстимъ коэфиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ихъ дополнительными, то индексы въ разсматриваемомъ членѣ сдѣлаются:

$$n - \alpha + n - \beta + n - \gamma + \ldots = ns - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) =$$

$$= ns - \tfrac{1}{2}(ns - m) = \tfrac{1}{2}(ns + m)$$

т. е. вѣсъ функціи $F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ есть:

$$\tfrac{1}{2}(ns + m)$$

Если для краткости положимъ:

$$F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) = A_m$$

то соизмѣнная будетъ:

$$A_m + \frac{\partial A_m}{\partial \xi} x + \frac{\partial^2 A_m}{\partial \xi^2} x^2 + \ldots + \frac{\partial^m A_m}{\partial \xi^m} x^m$$

Мы видѣли (101), что:

$$\frac{\partial^m A_m}{\partial \xi^m} = F(a_0, a_1, \ldots, a_n) = A_0 \tag{130}$$

и что:

$$A_0 x^m + \frac{\partial A_0}{\partial \eta} x^{m-1} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial \eta^2} x^{m-2} + \ldots + \frac{\partial^m A_0}{\partial \eta^m} \tag{131}$$

будетъ таже соизмѣнная, но въ коей коэфиціенты получились изъ функціи $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Такъ какъ порядокъ источника коэфиціента $A_m = F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ или коэфиціента $A_0 = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ данъ, и дана степень соизмѣнной, то вѣсъ функцій $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ или $F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_n)$ будетъ также данъ:

$$\tfrac{1}{2}(ns - m) \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{2}(ns + m)$$

слѣдовательно зная порядокъ и вѣсъ этихъ коэфиціентовъ, можно построить ихъ члены съ неопредѣленными коэфиціентами, которые опредѣлятся, какъ было показано выше или съ помощью символа $\frac{\partial}{\partial\xi}$, если былъ построенъ коэфиціентъ A_0, или съ помощью символа $\frac{\partial}{\partial\eta}$ если былъ построенъ коэфиціентъ A_m.

Примѣръ 1. Требуется составить такую соизмѣнную кубической формы, которая была-бы 2-й степени относительно перемѣннаго и 2-го порядка въ коэфиціентахъ данной формы?

Рѣшеніе. Пусть искомая соизмѣнная будетъ:

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0$$

вѣсъ коэфиціентовъ A_0 и A_2 будетъ:

$$k = \tfrac{1}{2}(ns - m) = 2 \quad , \quad k' = \tfrac{1}{2}(ns + m) = 4$$

слѣдовательно:

$$A_0 = Aa_0a_2 + Ba^2_1 \quad , \quad A_2 = A'a_1a_3 + B'a^2_2$$

Съ помощью символа $\frac{\partial}{\partial\xi}$ опредѣлятся коэфиціенты у A_0, а съ помощью символа $\frac{\partial}{\partial\eta}$ коэфиціенты у A_2:

$$\frac{\partial A_0}{\partial\xi} = 2Aa_0a_1 + 2Ba_0a_1 \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial A_2}{\partial\eta} = 2A'a_2a_3 + 2B'a_2a_3 \equiv 0$$

откуда, полагая $A = 1$ и $A' = 1$, найдемъ:

$$B = -1 \quad , \quad B' = -1$$

слѣдовательно:

$$A_0 = a_0a_2 - a^2_1 \quad , \quad A_2 = a_1a_3 - a^2_2$$

опредѣливъ одинъ изъ этихъ коэфиціентовъ A_0 или A_2 мы найдемъ всѣ коэфиціенты соизмѣнной, дѣйствуя послѣдовательно символомъ $\frac{\partial}{\partial\eta}$ надъ A_0 или символъ $\frac{\partial}{\partial\xi}$ надъ A_m. Слѣдовательно мы имѣемъ:

$$A_0 = a_0a_2-a_1^2 \quad , \quad A_1 = \frac{\partial}{\partial\eta} A_0 = a_0a_3-a_1a_2 \quad , \quad A_2 = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} A_0a_1a_3-a_2^2$$

откуда искомая соизмѣнная будетъ:

$$(a_0a_2-a_1^2)x^2 + (a_0a_3-a_1a_2)x + a_1a_3-a_2^2 = H_{3,x}$$

это гессевская кубической формы.

Примѣръ 2. Найти соизмѣнную 3-й степени относительно перемѣннаго и 3-го порядка въ коэфиціентахъ кубической формы?

Рѣшеніе. Пусть искомая соизмѣнная будетъ:

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$$

такъ какъ порядокъ ея въ коэфиціентахъ есть 3, то вѣсъ коэфиціентовъ A_0 и B_3 будетъ:

$$k = \tfrac{1}{2}(ns-m) = 3 \quad , \quad k' = \tfrac{1}{2}(ns+m) = 6$$

Зная вѣсъ и порядокъ коэфиціента A_0, можно написать его форму:

$$A_0 = Aa_0^2a_3 + Ba_0a_1a_2 + Ca_1^3$$

откуда, дѣйствуя символомъ $\frac{\partial}{\partial\xi}$, найдемъ:

$$\frac{\partial A_0}{\partial\xi} = (3A+B)a_0^2a_2 + (2B+3C)a_0a_1^2 = 0$$

слѣдовательно:

$$3A + B = 0 \quad , \quad 2B + 3C = 0$$

полагая $A = 1$, найдемъ $B = -3$, $C = 2$, слѣдовательно:

$$A_0 = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3 = G$$

всѣ остальные коэфиціенты соизмѣнной будутъ:

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial\eta} A_0 \quad , \quad A_2 = \frac{\partial}{\partial\eta^2} A_0 \quad , \quad A_3 = \frac{\partial}{\partial\eta^3} A_0$$

и мы имѣемъ соизмѣнную кубической формы $G_{3,x}$.

Мы выше видѣли, что вѣсъ крайнихъ коэфиціентовъ A_0 и A_m соизмѣнной m-й степени есть:

$$k = \tfrac{1}{2}(ns - m) \quad , \quad k' = \tfrac{1}{2}(ns + m)$$

откуда:

$$k' - k = m$$

слѣдовательно, степень соизмѣнной равна разности вѣса крайнихъ коэфиціентовъ ея.

§ 205. Изъ сказаннаго выше видимъ, что извѣстная форма n-й степени имѣетъ соизмѣнныхъ m-й степени, относительно перемѣннаго и s-го порядка въ коэфиціентахъ столько, сколько можно составить функцій A_0 вѣса $\tfrac{1}{2}(ns-m)$, удовлетворяющихъ уравненію $\frac{\partial A_0}{\partial \xi} = 0$, и видимъ (§164), что это число равно разности чиселъ способовъ, которыми числа $\tfrac{1}{2}(ns-m)$ и $\tfrac{1}{2}(ns-m)-1$ могутъ быть выражены какъ суммы s чиселъ отъ 0 до n включительно.

Очевидно, m можетъ быть нечетнымъ числомъ только тогда, когда s и n суть числа нечетныя. Слѣдовательно, только формы нечетной степени могутъ имѣть соизмѣнныя нечетной степени въ коэфиціентахъ и въ перемѣнныхъ.

§ 206. *Предложеніе.* Источникъ произведенія двухъ соизмѣнныхъ есть произведеніе ихъ источниковъ.

Доказательство. Если A_0 и B_0 будутъ источники двухъ соизмѣнныхъ m-й и p-й степени, то соизмѣнныя могутъ быть написаны въ формѣ:

$$\begin{aligned} & A_0 x^m + \frac{\partial A_0}{\partial \eta} x^{m-1} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial \eta^2} x^{m-2} + \ldots + \frac{\partial^m A_0}{\partial \eta^m} \\ & B_0 x^p + \frac{\partial B_0}{\partial \eta} x^{p-1} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial \eta^2} x^{p-2} + \ldots + \frac{\partial^p B_0}{\partial \eta^p} \end{aligned} \qquad (132)$$

перемножая эти полиномы, легко найдемъ:

$$A_0 B_0 x^{m+p} + \frac{\partial (A_0 B_0)}{\partial \eta} x^{m+p-1} + \frac{\partial^2 (A_0 B_0)}{\partial \eta^2} \cdot \frac{x^{m+p-2}}{1.2} + \ldots \qquad (133)$$

слѣдовательно источникъ этой соизмѣнной есть $A_0 B_0$.

Изъ этого предложенія заключаемъ, что если нѣсколько функцій A_0, B_0, C_0, ... разностей корней связаны извѣстнымъ условіемъ, то тѣмъ же условіемъ связаны и соизмѣнныя, коихъ онѣ суть источники.

Примѣчаніе. Келе въ основу своего опредѣленія соизмѣнныхъ взялъ условіе (98):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\Phi(x)=0 \tag{134}$$

гдѣ $\Phi(x)$ соизмѣнная. Легко провѣрить, напримѣръ, что:

$$\frac{\partial}{\partial x}G_x=\frac{\partial}{\partial \xi}G_x \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)G_x=0$$

§ 207. Пусть:

$$f(xy)=a_0x^n+na_1x^{n-1}y+\ldots+na_{n-1}xy^{n-1}+a_ny \tag{135}$$

будетъ форма n-й степени, а

$$\varphi(a_0,a_1,\ldots,a_n) \quad \text{и} \quad \Phi(a_0,a_1,\ldots,a_n,x,y) \tag{136}$$

одна изъ ея неизмѣнныхъ и одна изъ соизмѣнныхъ. Преобразуемъ форму (135) линейнымъ преобразованіемъ:

$$x=\alpha_1X+\beta_1Y \quad , \quad y=\alpha_2X+\beta_2Y \tag{137}$$

въ другую:

$$f(X,Y)=A_0X^n+nA_1X^{n-1}Y+\ldots+nA_{n-1}XY^{n-1}+A_nY^n \tag{138}$$

неизмѣнная и соизмѣнная (136) примутъ форму относительно преобразованной формы (138):

$$\varphi(A_0,A_1,\ldots,A_n) \quad , \quad \Phi(B_0,B_1,\ldots,B_m,X,Y) \tag{139}$$

$A_0,A_1,\ldots,A_n$, $B_0,B_1,\ldots,B_m$ суть функціи коэфиціентовъ $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Основное свойство этихъ функцій выражается, какъ мы видѣли, слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(A_0,A_1,\ldots,A_n)&=(\alpha_1\beta_2)^p\,\varphi(a_0,a_1,\ldots,a_n)\\ \Phi(B_0,B_1,\ldots,B_m,X,Y)&=(\alpha_1\beta_2)^p\,\Phi(a_0,a_1,\ldots,a_n,x,y)\end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Полагая для краткости $(\alpha_1\beta_2)=M$ и рѣшая уравненія (137) относительно X и Y найдемъ:

$$MX=\beta_2x-\beta_1y \quad , \quad MY=-\alpha_2X+\alpha_1Y \tag{141}$$

откуда:

$$M\frac{\partial X}{\partial x}=\beta_2\ ,\quad M\frac{\partial X}{\partial y}=-\beta_1\ ,\quad M\frac{\partial Y}{\partial x}=-\alpha_2\ ,\quad M\frac{\partial Y}{\partial y}=\alpha_1 \tag{142}$$

Пусть $u=\Phi(x,y)$ будетъ соизмѣнная формы (135); u можетъ быть и сама форма (135). Пусть $U=\Phi(X,Y)$ будетъ таже форма линейно преобразованная. Такъ какъ:

$$u=\Phi(\alpha_1 X+\beta_1 Y\ ,\ \alpha_2 X+\beta_2 Y)=\Phi_1(X,Y)=U \tag{143}$$

то:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial U}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{1}{M}\left(+\beta_2\frac{\partial U}{\partial X}-\alpha_2\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial U}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(-\beta_1\frac{\partial U}{\partial X}+\alpha_1\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\end{aligned} \tag{144}$$

эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\alpha_1\left(\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial X}\right)\\ -\frac{\partial u}{\partial x}&=\alpha_2\left(\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+\beta_2\left(-\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial X}\right)\end{aligned} \tag{145}$$

Изъ этихъ выраженій видимъ, что дифференціальные символы:

$$M\frac{\partial}{\partial y}\quad \text{и}\quad -M\frac{\partial}{\partial x}$$

преобразовываются въ линейномъ подстановленіи совершенно подобно перемѣннымъ x и y такъ, что если имѣемъ, напримѣръ:

$$\Phi(x,y)=\Phi_1(X,Y) \tag{146}$$

то будемъ имѣть также:

$$M^p.\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ -\frac{\partial}{\partial x}\right)=\Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial Y}\ ,\ -\frac{\partial}{\partial X}\right) \tag{147}$$

преобразованіе, подобно епреобразованію соизмѣнной. Слѣдовательно будемъ имѣть дифференціальный символъ, который можетъ служить для нахожденія неизмѣнныхъ и соизмѣнныхъ формы, если этимъ символомъ будемъ дѣйствовать надъ самою формою или надъ ея соизмѣнными. Если,

напримѣръ, $F(x, y)$ будетъ другая соизмѣнная формы, то будемъ имѣть:

$$M^p.\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x,y) = \Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial Y}, -\frac{\partial}{\partial X}\right)F(X, Y) \qquad (148)$$

Примѣръ 1. Если будетъ дана форма второй степени:

$$u = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

то имѣемъ:

$$u = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = A_0X^2 + 2A_1XY + A_2Y^2 = U$$

слѣдовательно будемъ имѣть также:

$$M^2\left(a_0\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2a_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + a_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = \left(A_0\frac{\partial^2}{\partial Y^2} - 2A_1\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y} + A_2\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right)$$

дѣйствуя этимъ символомъ надъ самою данною формою u, найдемъ:

$$M^2\left(a_0\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2a_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + a_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \left(A_0\frac{\partial^2}{\partial Y^2} - 2A_1\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y} + A_2\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right)U$$

или:

$$M^2(a_0a_2 - a^2_1) = A_0A_2 - A^2_1$$

слѣдовательно функція $a_0a_2 - a^2_1$ есть неизмѣнная, какъ уже видѣли выше.

Примѣръ 2. Если будетъ дана форма 4-й степени:

$$u = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

то дифференціальный символъ будетъ:

$$a_0\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4a_1\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} + 6a_2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} - 4a_3\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} + a_4\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

дѣйствіе этого символа надъ самой формой u дастъ:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 u = 48(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a^2_2)$$

очевидно неизмѣнная, какъ видѣли выше.

Примѣръ 3. Если предъидущимъ символомъ будемъ дѣйствовать надъ гессевской $H_{4,x}$ (94), то найдемъ неизмѣнную:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)\left(\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ -\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 H_{4,x} = 72(a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a^2{}_1a_4-a_2^3)$$

Примѣръ 4. Дѣйствуя символомъ:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)\left(\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ -\frac{\partial}{\partial x}\right)^3$$

надъ соизмѣнной $G_{3,x}$, найдемъ:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)\left(\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ -\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 G_{3,x} =$$

$$= -12(a_0^2a^2{}_3-6a_0a_1a_2a_3+4a_0a^3{}_2+4a^3{}_0a_3-3a^2{}_1a^2{}_2) = -12\,\Delta_3$$

Примѣръ 5. Найти выраженіе для:

$$(a_0a_2-a_1^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-(a_0a_3-a_1a_2)\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+(a_1a_3-a_2^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

если

$$u=(a_0\ ,a_1, a_2\ ,a_3\between x\ ,y)^3$$

Отвѣтъ: $-9H_{3,x}^2$.

Примѣръ 6. Каждая форма четной степени имѣетъ неизмѣнную втораго порядка. Пусть данная форма будетъ:

$$u=(a_0\ ,a_1, a_2\ ,\ldots\ ,a_n\between x\ ,y)^n$$

дѣйствуя надъ нею символомъ:

$$(a_0\ ,a_1,\ \ldots\ ,a_n)\left(\frac{\partial}{\partial y}\ ,-\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

найдемъ неизмѣнную:

$$a_0a_n-na_1a_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2a_{n-2}-\ \ldots\ .$$

Если этотъ способъ приложимъ къ формѣ 3-й степени, то въ результатѣ получимъ нуль. Но приложенный къ двумъ формамъ 3-й степени:

$$u=a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3\quad,\quad v=b_0x^3+3b_1x^2y+3b_2xy^2+b_3y^3$$

даетъ неизмѣнную системы:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)v = (a_0b_3 - a_3b_0) - 3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

или вообще приложенный къ двумъ формамъ нечетной степени:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \between x, y)^n = u \quad , \quad (b_0, b_1, \ldots, b_n \between x, y)^n = v$$

даетъ неизмѣнную:

$$(a_0b_n - a_nb_0) - n(a_1b_{n-1} - a_{n-1}b_1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(a_2b_{n-2} - a_{n-2}b_2) - \ldots .$$

§ 208. *Предложеніе.* Если $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ есть неизмѣнная формы:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \between x, y)^n \tag{149}$$

а $u = \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n, x, y)$ соизмѣнная, которою можетъ быть и сама форма, или соизмѣнная высшей степени, то:

$$\varphi\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) \tag{150}$$

будетъ неизмѣнная или соизмѣнная формы.

Доказательство. Пусть:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \beta_1 Y \quad , \quad y = \alpha_2 X + \beta_2 Y \\ x' &= \alpha_1 X' + \beta_1 Y' \quad , \quad y' = \alpha_2 X' + \beta_2 Y' \end{aligned} \tag{151}$$

двѣ системы перемѣнныхъ, которые преобразуются совмѣстно.

Преобразованіе предъидущаго параграфа даетъ:

$$x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} = X'\frac{\partial}{\partial X} + Y'\frac{\partial}{\partial Y} \tag{152}$$

и вообще:

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \left(X'\frac{\partial}{\partial X} + Y'\frac{\partial}{\partial Y}\right)^n \tag{153}$$

гдѣ, возвышая степень надъ символомъ $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r$ замѣщается порядкомъ $\frac{\partial^r}{\partial x^r}$.

Такъ какъ u есть соизмѣнная, то имѣемъ:

$$U = M^p . u$$

откуда:

$$\left(X' \frac{\partial}{\partial X} + Y' \frac{\partial}{\partial Y}\right)^n U = M^p . \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}\right)^n . u$$

или:

$$\frac{\partial^n U}{\partial X^n} X'^n + n \frac{\partial^n U}{\partial X^{n-1} \partial Y} X'^{n-1} Y' + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\partial^n U}{\partial X^{n-2} \partial Y^2} X'^{n-2} Y'^2 + \ldots + \frac{\partial^n U}{\partial Y^n} y'^n =$$

$$= M^p \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} x'^n + n \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} x'^{n-1} y' + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2} \partial y^2} x'^{n-2} y'^2 + \ldots + \frac{\partial^n u}{\partial y^n} y'^n\right) \quad (154)$$

Если въ этомъ уравненіи будемъ разсматривать x и y, какъ постоянныя величины, а x' и y' какъ перемѣнныя, то коэфиціентамъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ въ формѣ (149) соотвѣтствуютъ $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial u^n}$, и какъ $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a^n)$ есть неизмѣнная формы (149), то очевидно функція (150) будетъ неизмѣнная или соизмѣнная той же формы.

Примѣръ 1. Форма 2-й степени:

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y = A_0 X^2 + 2A_1 XY + A_2 Y^2$$

имѣетъ неизмѣнную:

$$A_0 A_2 - A_1^2 = M^2 (a_0 a_2 - a_1^2)$$

прилагая преобразованія (153) къ соизмѣнной $U = M^p . u$ будемъ имѣть:

$$X'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + 2X'Y' \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + y'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = M^p \left(x'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

разсматривая $x'y'$ какъ перемѣнныя, мы имѣемъ неизмѣнную этой квадратной формы:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}\right)^2 = M^{2p} \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}$$

которая есть соизмѣнная данной — это гессевская данной формы.

Примѣръ 2. Гессевская формы 3-й степени:

$$u = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

въ которой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(a_0x + a_1y) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} 6\,(a_2x + a_3y) \quad , \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,.\partial y} 6(a_1x + a_2y)$$

будетъ:

$$36\left\{(a_0x + a_1y)(a_2x + a_3y) - (a_1x + a_2y)^2\right\}$$

или опуская числовой множитель 36:

$$H_{3,x} = (a_0a_2 - a^2{}_1)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a^2{}_2)y$$

Примѣръ 3. Для формы 4-й степени:

$$u = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_2x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_1a^2 + 2a_2xy + a_3y^2$$

откуда, гессевская будетъ:

$$H_{4,x} = (a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2)(a_2x^2 + 2a_3xy + a_4y^2) - (a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2)^2$$

или

$$H_{4\,x} = (a_0a_2 - a^2{}_1)x^4 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)x^3y + (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a^2{}_2)x^2y^2 +$$
$$+ 2(a_1a_4 - a_2a_3)xy^3 + (a_2a_4 - a^2{}_3)y^4$$

§ 209. *Предложеніе.* Если составимъ соизмѣнную формы:

$$U + \lambda(xy' - x'y)^n \tag{155}$$

то коэфиціенты у различныхъ степеней λ будутъ соизмѣнныя формы U; x', y' суть также перемѣнныя.

Доказательство. Преобразуемъ линейно форму U, то будемъ имѣть:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \between x, y)^n = (A_0, A_1, \ldots, A_n \between X, Y)^n \tag{156}$$

если перемѣнныя x, y и x', y' преобразуемъ совокупно, то найдемъ:

$$xy' - x'y = M(XY' - X'Y)$$

откуда форма:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \between x, y)^n + \lambda(xy' - x'y)^n$$

преобразуется въ

$$(A_0, A_1, \ldots, A_n \between X, Y)^n + \lambda M^n (XY' - X'Y)^n$$

составляя неизмѣнную обѣихъ этихъ формъ, найдемъ:

$$(a_0', a'_1, \ldots, a'_p \between 1, \lambda)^p = M^k (A_0', A'_1, \ldots, A'_p \between 1, M^n\lambda)^p$$

откуда найдемъ, что вообще:

$$a'_r = M^q A'_r$$

слѣдовательно коэфиціенты $a_0', a'_1, \ldots$ суть соизмѣнныя формы U.

Если выраженіе $(xy' - x'y)^n$ замѣнить формою $(b_0, b_1, \ldots, b_n \between x, y)^n$, то предъидущее предложеніе сдѣлается:

Предложеніе. Если $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ есть неизмѣнная формы

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \between x, y)^n$$

то всѣ коэфиціенты у λ въ:

$$\varphi(a_0 + \lambda b_0, a_1 + \lambda b_1, \ldots, a_n + \lambda b_n)$$

суть неизмѣнныя системы формъ:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \between x, y)^n \quad , \quad (b_0, b_1, \ldots, b_n \between x, y)^n$$

или что тоже:

$$\left(b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial a_n}\right)\varphi \quad \text{и т. д.}$$

суть неизмѣнныя системы.

Примѣръ. Пусть данныя двѣ функціи будутъ:

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 \quad , \quad b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2$$

неизмѣнная первой формы есть:

$$a_0 a_2 - a^2_1$$

а формы:

$$(a_0 + \lambda b_0) x^2 + 2(a_1 + \lambda b_1) xy + (a_2 + \lambda b_2) y^2$$

будетъ:

$$(a_0 + \lambda b_0)(a_2 + \lambda b_2) - (a_1 + \lambda b_1)^2$$

или:

$$(a_0 a_2 - a^2_1) + \lambda(a_0 b_2 - a_2 b_0 - 2a_1 b_1) + \lambda^2(b_0 b_2 - b^2_1)$$

слѣдовательно:

$$a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_2$$

есть неизмѣнная системы.

§ 210. *Предложеніе.* Если $f(x,y)$ и $f_1(x,y)$ суть двѣ однородныя формы, то опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{157}$$

есть соизмѣнная системы.

Доказательство. Преобразуемъ линейно данныя формы, подстановленіемъ:

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y \quad , \quad y = \alpha_2 X + \beta_2 Y$$

пусть формы $f(x,y)$ и $f_1(x,y)$ сдѣлаются:

$$F(X, Y) = f(x, y) \quad , \quad F_1(X, Y) = f_1(x, y)$$

дифференцируя, найдемъ:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F_1}{\partial X} = \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F_1}{\partial Y} = \alpha_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial X} & \frac{\partial F_1}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y} \ , & \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial y} \\ \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \ , & \alpha_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix} = (\alpha_1 \beta_2) \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

слѣдовательно предложеніе доказано.

Опредѣлитель (157) называется *функціональнымъ* или *якобіевскимъ* и обозначается часто символомъ $J(f, f_1)$.

Примѣръ.

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2=f$$

$$b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2=f_1$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0x+a_1y \ , & a_1x+a_2y \\ b_0x+b_1y \ , & b_1x+b_2y \end{vmatrix} =$$

$$=(a_0b_1-a_1b_0)x^2+(a_0b_2-a_0b)xy+(a_1b_2-a_2b_1)y^2$$

§ 211. *Предложеніе.* **Всякая функція разностей корней двухъ соизмѣнныхъ есть симметрическая функція разностей корней начальной формы.**

Доказательство. Пусть данная форма будетъ:

$$f(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\ .\ .\ .\ .\ +na_{n-1}x+a_n$$

двѣ ея соизмѣнныя пусть будутъ:

$$\Phi_1(x)=b_0x^p+pb_1x^{p-1}+\ .\ .\ .\ .\ +pb_{p-1}x+b_p$$

$$\Phi_2(x)=c_0x^q+qc_1x^{q-1}+\ .\ .\ .\ .\ +qb_{q-1}x+b_q$$

Если одинъ изъ корней первой соизмѣнной будетъ x'_r, то будемъ имѣть тождество:

$$b_0x'^p_r+pb_1x'^{p-1}_r+\frac{p(p-1)}{1.2}b_2x'^{p-2}_r+\ .\ .\ .\ .\ +pb_{p-1}x'_r+b_p\equiv 0$$

$b_0, b_1, b_2, \ldots$ суть функціи коэфиціентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Совершимъ надъ этимъ тождествомъ дѣйствіе $\delta=\frac{\partial}{\partial\xi}$, будемъ имѣть (101):

$$(pb_0x'^{p-1}_r+p(p-1)b_1x'^{p-2}_r+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}b_2x'^{p-3}_r+\ldots+pb_{p-1})\,\delta x'_r+$$

$$+(pb_0x'^{p-1}_r+p(p-1)b_1x'^{p-2}_r+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}b_2x'^{p-3}_r+\ldots+pb_{p-1})\equiv 0$$

откуда:

$$p\left\{b_0x'^{p-1}_r+(p-1)b_1x'^{p-1}_r+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}b_2x'^{p-3}_r+\ldots+b_{p-1}\right\}(1+\delta x'_r)\equiv 0$$

откуда:

$$\delta x'_r=-1$$

Если назовемъ одинъ изъ корней второй соизмѣнной чрезъ x_s'', то точно также найдемъ:

$$\delta x_s'' = -1$$

изъ этихъ двухъ послѣднихъ уравненій, найдемъ:

$$\delta x'_r - \delta x_s'' = \delta(x'_r - x_s'') = 0$$

что показываетъ, что $x'_r - x_s''$ есть функція разностей корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ данной формы.

§ 212. *Предложеніе.* Неизмѣнная или соизмѣнная соизмѣнной данной формы есть неизмѣнная или соизмѣнная этой формы.

Доказательство. Это непосредственно слѣдуетъ изъ опредѣленія этого рода функцій.

Примѣръ. Пусть данная форма будетъ:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3$$

гессевская соизмѣнная этой формы есть:

$$(a_0a_2 - a^2_1)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)x + (a_1a_3 - a^2_2) = Hx^2 + 2H_1x + H_2$$

неизмѣнная этой послѣдней формы 2-й степени есть:

$$4(a_0a_2 - a^2_1)(a_1a_3 - a^2_2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2 = HH_2 - H^2_1$$

а это есть призначная данной формы.

§ 213. *Примѣры.* Закончимъ настоящую главу примѣрами.

Примѣръ 1. Показать что если $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n$ суть неизмѣнныя s-го порядка формъ:

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_1}, \quad \frac{\varphi(x)}{x - x_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\varphi(x)}{x - x_n}$$

гдѣ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть корни уравненія $\varphi(x) = 0$, то:

$$\sum_{r=1}^{r=n} J_r(x - x_2)^s$$

есть соизмѣнная формы $\varphi(x)$.

Примѣръ 2. Если $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$ суть корни кубическихъ уравненій.

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \quad , \quad b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3 = 0$$

то:

$$a_0b_0\Sigma\left\{(x_3-x_2)(x'_1-x'_2)+(x_2-x'_3)(x'_2-x_3)\right\}(x-x_1)(x-x'_1)$$

есть соизмѣнная, форма которой въ коэфиціентахъ есть:

$$-18\left\{(a_0b_2+a_2b_0-2a_1b_1)x^2+(a_0b_3+a_3b_0-a_1b_2-a_2b_1)x+(a_1b_3+a_3b_1-2a_2b_2)\right\}$$

Примѣръ 3. Найти тождественную зависимость между тремя квадратными формами въ функціи ихъ неизмѣнныхъ?

Пусть будутъ три квадратныя формы:

$$U=a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2=0\ ,\ V=a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2\ ,\ W=a_3x^2+2b_3xy+c_3y^2$$

перемножимъ два слѣдующіе опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ y^2 & -xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} c_1 & -2b_1 & a_1 & 0 \\ c_2 & -2b_2 & a_2 & 0 \\ c_3 & -2b_3 & a_3 & 0 \\ x^2 & 2xy & y^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Если положимъ вообще $a_pc_q+a_qc_p-2b_pb_q=J_{q,p}$, то по перемноженіи найдемъ:

$$\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & U \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & V \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & W \\ U & V & W & 0 \end{vmatrix}$$

развертывая опредѣлителя, въ которомъ $J_{p,q}=J_{q,p}$, найдемъ искомую тождественную зависимость:

$$(J_{22}J_{33}-J_{23}^2)U^2+(J_{11}J_{33}-J_{12}^2)V^2+(J_{11}J_{22}-J_{12}^2)W^2+2(J_{21}J_{12}-J_{11}J_{23})VW+$$
$$+2(J_{23}J_{12}-J_{22}J_{31})WU+2(J_{23}J_{31}-J_{33}J_{12})UV\equiv 0 \qquad (158)$$

Здѣсь могутъ представиться слѣдующіе частные случаи:

Случай 1. Если три квадратныя формы взаимно гармоничны, то въ этомъ случаѣ:

$$J_{23}=0\quad,\quad J_{31}=0\quad,\quad J_{12}=0$$

подставляя эти значенія въ уравненіе (158), будемъ имѣть:

$$\frac{U^2}{J_{11}}+\frac{V^2}{J_{22}}+\frac{W^2}{J_{33}}=0$$

Случай 2. Если уравненіе $W=0$ даетъ формы инволюціи точекъ данныхъ двумя другими уравненіями $U=0$ и $V=0$, то въ этомъ случаѣ $J_{13}=0$, $J_{23}=0$, дѣлая эти подстановленія въ уравненіе (158), найдемъ:

$$(J_{12}^2-J_{11}J_{22})W^2=J_{33}(J_{22}U^2-2J_{12}UV+J_{11}V^2)$$

Но изъ уравненій $J_{13}=0$ и $J_{23}=0$ найдемъ:

$$a_3=k(a_1b_2)\quad,\quad -2b_3=k(c_1a_2)\quad,\quad c_3=k(b_1c_2)$$

откуда:

$$4(a_3c_3-b_3^2)=k^2\left\{(a_1b_2)(b_1c_2)-(c_1a_2)^2\right\}$$

или:

$$2J_{33}=k^2(J_{11}J_{22}-J_{12}^2)$$

полагая $k=1$ и сокращая, найдемъ:

$$-2W^2=J_{22}U^2-2J_{12}UV+J_{11}V^2$$

Примѣръ 4. Показать, что функціи:

$$a_0a_2-a_1^2\quad,\quad a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2\quad,\quad a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^2$$

которыя зависятъ отъ разностей корней уравненія:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \between x, y)^n=0$$

даютъ происхожденіе соизмѣннымъ степеней $2n-4$, $2n-8$, $3n-6$?

Примѣръ 5. Показать, что коэфиціентъ у предпослѣдняго члена въ уравненіи квадратовъ разностей корней даннаго уравненія даетъ происхожденіе соизмѣнной 4-й степени относительно перемѣнныхъ?

Примѣръ 6. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ суть корни уравненій:

$$U=(a_0, a_1, \ldots a_n \between x, y)^n=0 \quad \text{и} \quad V=(b_0, b_1, \ldots, b_n \between x, y)^n=0$$

требуется изъ простѣйшей функціи разностей корней $\sum(x_p-x'_q)$ вывесть соизмѣнную системы U и V?

Этотъ вопросъ будетъ рѣшенъ, если выразимъ:

$$UV\sum\frac{x_p-x'_q}{(x-x_p)(x-x'_q)}$$

въ коэфиціентахъ формъ U и V.

Для этого мы имѣемъ:

$$\sum \frac{x_p - x'_q}{(x-x_p)(x-x_q)} = \sum \frac{x_1}{x-x_1} \sum \frac{1}{x-x'_1} - \sum \frac{x'_1}{x-x'_1} \sum \frac{1}{x-x_1}$$

если U и V напишемъ въ однородной формѣ, то:

$$\sum \frac{1}{x-x_1 y} = \frac{\partial lg U}{\partial x} \quad , \quad \sum \frac{1}{x-x_1 y} = -\frac{\partial lg U}{\partial y} \text{ и т. д.}$$

подставляя эти выраженія въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$UV \sum \frac{x_p - x'_q}{(x-x_1 y)(x-x'_1 y)} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}$$

а это есть Якобіевская соизмѣнная системы U и V. Замѣтимъ, что первый коэфиціентъ у $J(U,V)$ есть $(a_0 b_1)$.

Примѣръ 7. Показать, что форма:

$$f(xy) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

подстановленіями:

$$x = \lambda X + \mu Y \quad , \quad y = \lambda' X + \mu' Y$$

можетъ быть преобразована въ

$$f(\lambda\lambda') X^4 + f(\mu\mu') Y^4 + 63 M^2 X^2 Y^2$$

гдѣ:

$$4s^3 - J_1 s + J_2 = 0 \quad \text{а} \quad M = (\lambda\mu')$$

Примѣръ 8. Показать, что двойной множитель двухъ формъ U и V есть также двойной множитель и Якобіевской этихъ формъ $J(U,V)$?

Примѣръ 9. Найти выводъ кубическихъ формъ U и V исключеніемъ изъ:

$$U=0 \quad , \quad V=0 \quad , \quad \frac{\partial J(U,V)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial J(U,V)}{\partial y} = 0 \,?$$

Примѣръ 10. Показать, что двойной множитель формы U есть двойной множитель и ея гессевской:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2$$

ГЛАВА XIV.

Свойства двучленныхъ уравненій.

§ 214. Двучленнымъ уравненіемъ n-й степени называется уравненіе формы:

$$a_0x^n + a_1 = 0 \tag{1}$$

гдѣ a_0 и a_1 суть цѣлыя числа. Это уравненіе можно преобразовать слѣдующимъ образомъ: помножимъ обѣ его части на a_0^{n-1}, то будемъ имѣть:

$$(a_0x)^n + a_0^{n-1}a_1 = 0$$

полагая $a_0x = y$ и $a_0^{n-1}a_1 = -A$, найдемъ:

$$y^n = A \tag{2}$$

полагая наконецъ $y = z\sqrt[n]{A}$, найдемъ:

$$z^n = 1 \tag{3}$$

$\sqrt[n]{A}$ есть число, которое будучи возвышено въ n-ю степень даетъ число A. Слѣдовательно если рѣшимъ уравненіе (8), то будемъ имѣть и рѣшеніе уравненія (1). Изслѣдуемъ свойства корней этого уравненія.

§ 215. Если степень уравненія (3) есть число четное, то, очевидно, его корнями будутъ $+1$ и -1; если же степень будетъ число нечетное, то корнемъ его будетъ $+1$. Посмотримъ, какіе будутъ другіе его корни?

Предложеніе 1. Если два двучленныя уравненія:

$$x^m - 1 = 0 \quad , \quad x^n - 1 = 0 \tag{4}$$

имѣютъ общіе корни, то эти корни будутъ корнями и уравненія:

$$x^\theta - 1 = 0 \tag{5}$$

гдѣ θ есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ m и n.

Доказательство. Пусть α будетъ общій корень уравненій (4), то:

$$\alpha^m = 1 \quad , \quad \alpha^n = 1$$

полагая $m > n$ раздѣлимъ m на n, то будемъ имѣть:

$$m = qn + r_1$$

но такъ какъ мы имѣемъ $\alpha^n = 1$, то $\alpha^{nq} = 1$, слѣдовательно:

$$\alpha^{r_1} = 1$$

откуда видимъ, что если $r_1, r_2, \ldots, \theta$ суть остатки при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя между числами m и n, то будемъ имѣть:

$$\alpha^{r_1} = 1 \quad , \quad \alpha^{r_2} = 1 \quad , \quad \alpha^{r_3} = 1 \; \ldots\ldots \; \alpha^{\theta} = 1$$

слѣдовательно общій корень уравненій (4) будетъ и корнемъ уравненія (5).

Очевидно также, что корни уравненія (5) будутъ корнями и уравненій (4).

Слѣдствіе. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если степени m и n уравненій (4) суть числа взаимно-простыя, то эти уравненія не могутъ имѣть общаго корня, исключая единицы, ни съ какимъ уравненіемъ той же формы, но низшей степени.

Предложеніе 2. Если α есть корень уравненія:

$$x^n = 1 \tag{6}$$

то и всѣ его степени будутъ корнями того же уравненія.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, если α есть корень уравненія (6), то имѣемъ:

$$\alpha^n = 1$$

возвышая обѣ части въ k-ю степень, найдемъ:

$$\alpha^{kn} = 1 \quad \text{или} \quad (\alpha^k)^n = 1$$

слѣдовательно α^k есть корень уравненія (6). Число k можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ. Слѣдовательно всѣ члены ряда:

$$\alpha \quad , \quad \alpha^2 \quad , \quad \alpha^3 \quad , \quad \alpha^4 \; , \ldots\ldots$$

суть корни уравненія (6). Но такъ какъ

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n . \alpha = \alpha \quad , \quad \alpha^{n+2} = \alpha^n . \alpha^2 = \alpha^2 \; , \ldots .$$

и вообще:

$$\alpha^m = \alpha^r$$

(если $m \equiv r(Mn)$), то въ ряду (7) будетъ не болѣе n различныхъ величинъ, именно:

$$\alpha \; , \; \alpha^2 \; , \; \alpha^3 \; \ldots\ldots \; \alpha^{n-1} \; , \; \alpha^n = 1 \tag{8}$$

Слѣдствіе. Если n есть число простое, а α не равна единицѣ, то всѣ члены ряда (8) различны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, если бы они не были всѣ различны, то мы имѣли бы, напр. $\alpha^{m'} = \alpha^{m'+m}$ (m' и $m'+m<1$), изъ этого уравненія будемъ имѣть:

$$\alpha^m = 1$$

т. е. α есть корень уравненій:

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^m - 1 = 0$$

гдѣ числа n и m суть взаимно-простыя, что противорѣчитъ предложенію первому.

Предложеніе 3. Если n есть число простое p, а α есть одинъ изъ корней уравненія:

$$x^p - 1 = 0 \tag{9}$$

исключая единицы, то всѣ корни этого уравненія будутъ:

$$1\,,\ \alpha\,,\ \alpha^2\,,\ \alpha^3\,,\ \alpha^4\,,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ \alpha^{p-1} \tag{10}$$

вмѣсто чиселъ 1, 2, 3, . . . , $p-1$ не сравниваемыхъ по модулю p, если g есть одинъ изъ первообразныхъ корней простаго числа p (§ 109), можно поставить степени: 1, g, g^2, g^3 и g^{p-2}, тогда корни уравненія (9) будутъ:

$$1\,,\ \alpha^g,\ \alpha^{g^2},\ \alpha^{g^3},\ .\ .\ .\ .\ ,\ \alpha^{g^{p-2}} \tag{10'}$$

Это предложеніе не имѣетъ мѣста, если n есть число составное, но оно будетъ имѣть мѣсто и въ этомъ случаѣ, если α будетъ однимъ изъ корней уравненія (6), не принадлежащій ни одному изъ уравненій такой-же формы, но низшей степени (§ 215, слѣд.).

Первообразными корнями уравненія (6) называютъ такіе корни, которые не удовлетворяютъ уравненіямъ такой же формы, но низшей степени. Если n есть число простое, то всѣ корни уравненія $x^n=1$, исключая единицы, суть *первообразные*. Слѣдовательно, каждый первообразный корень уравненія (6), какое-бы ни было число n простое или составное, имѣетъ свойство давать своими степенями всѣ корни уравненія.

§ 216. Если n есть число простое, то, какъ выше сказано, всѣ корни уравненія (9), исключая единицы, суть первообразные. Посмотримъ, имѣетъ-ли уравненіе (6) первообразные корни, если n есть число составное? Положимъ сначала, что $n=p^\mu$, т. е. число n есть степень простаго числа p. Не первообразный корень уравненія:

$$x^{p^\mu} = 1 \tag{11}$$

долженъ принадлежать уравненію:

$$x^{\theta} = 1 \tag{12}$$

гдѣ θ есть дѣлитель числа p^{μ}, но каждый дѣлитель числа p^{μ} есть, очевидно, и дѣлитель числа $p^{\mu-1}$, слѣдовательно, корни уравненія, т. е. всѣ не первообразные корни уравненія (11) должны быть корнями уравненія:

$$x^{p^{\mu-1}} = 1$$

Но такъ какъ всѣ корни этого уравненія принадлежатъ и уравненію (11), то всѣхъ не первообразныхъ корней будетъ $p^{\mu-1}$, а слѣдовательно, число первообразныхъ корней уравненія (11) будетъ:

$$p^{\mu} - p^{\mu-1} = p^{\mu}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{13}$$

а это послѣднее выраженіе есть ничто иное, какъ число, показывающее сколько есть чиселъ меньшихъ отъ p^{μ} и взаимно простыхъ съ нимъ (§ 89).

§ 217. Посмотримъ теперь, какъ рѣшить уравненіе:

$$x^{p^{\mu}} - 1 = 0 \tag{14}$$

и какъ найти его первообразные корни?

Пусть β_1 будетъ одинъ изъ корней уравненія:

$$x^{p} = 1$$

слѣдовательно:

$$\beta_1^{p} = 1 \tag{15}$$

Пусть β_2 будетъ одинъ изъ корней уравненія:

$$x^{p} = \beta_1 \quad \text{т. е.} \quad \beta_2^{p} = \beta_1 \tag{16}$$

Пусть β_3 будетъ одинъ изъ корней уравненія:

$$x^{p} = \beta_2 \quad \text{т. е.} \quad \beta_3^{p} = \beta_2 \tag{17}$$

и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ корень β_{μ} послѣдняго уравненія:

$$x^{p} = \beta_{\mu-1} \quad \text{т. е.} \quad \beta_{\mu}^{p} = \beta_{\mu-1} \tag{18}$$

Если теперь положимъ:

$$\alpha = \beta_1\beta_2\beta_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \beta_{\mu-1}\beta_{\mu} \qquad 19)$$

то α будетъ имѣть p^{μ} значеній и даетъ всѣ корни уравненія (11).

Во первыхъ β_1 имѣетъ p значеній, каждому изъ этихъ значеній соотвѣтствуетъ p значеній β_2, а каждому β_2 соотвѣтствуетъ p значеній β_3 и т. д., всего очевидно p^μ. Что α будетъ корнемъ уравненія (11) слѣдуетъ изъ того, что мы имѣемъ:

$$\beta_1^p = 1 \quad , \quad \beta_2^{p^2} = 1 \quad , \quad \beta_3^{p^3} = 1 \ \ldots . \ \beta_{\mu-1}^{p^{\mu-1}} = 1 \quad , \quad \beta_\mu^{p^\mu} = 1 \qquad (20)$$

откуда:

$$\beta_1^{p^\mu} = 1 \quad , \quad \beta_2^{p^\mu} = 1 \quad , \quad \beta_3^{p^\mu} = 1 \ \ldots . \ \beta_{\mu-1}^{p^\mu} = 1 \quad , \quad \beta_\mu^{p^\mu} = 1$$

перемножая, найдемъ:

$$(\beta_1\beta_2\beta_3 \ . \ . \ . \ \beta_\mu)^{p^\mu} = \alpha^{p^\mu} = 1$$

Остается показать, что p^μ значеній α всѣ различны. Положимъ, что два изъ такимъ образомъ составленныхъ для α значеній, равны:

$$\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots\ldots \beta_{\mu-1}\beta_\mu = \beta'_1\beta'_2\beta'_3 \ldots\ldots \beta'_{\mu-1}\beta'_\mu \qquad (21)$$

возвышая въ p-ю степень и замѣчая, что:

$$\beta_1^p = 1 \quad , \quad \beta_2^p = \beta_1 \ \ldots\ldots \ \beta_\mu^p = \beta_{\mu-1}$$

$$\beta'^p_1 = 1 \quad , \quad \beta'^p_2 = \beta'_1 \ \ldots\ldots \ \beta'^p_\mu = \beta'_{\mu-1}$$

найдемъ:

$$\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots\ldots \beta_{\mu-1} = \beta'_1\beta'_2\beta'_3 \ldots\ldots \beta'_{\mu-1} \qquad (22)$$

раздѣляя (21) на (22), найдемъ:

$$\beta_\mu = \beta'_\mu$$

Поступая съ уравненіемъ (22) точно такъ какъ мы поступали съ (21), найдемъ:

$$\beta_{\mu-1} = \beta'_{\mu-1}$$

и продолжая подобнымъ образомъ увидимъ, что равенство (21) можетъ только тогда существовать, когда количества $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\mu$ равны количествамъ $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \ldots, \beta'_\mu$. Слѣдовательно выраженіе α (19) дастъ всѣ корни уравненія (14).

Покажемъ теперь какіе изъ этихъ корней суть первообразные:

Мы выше видѣли, что всѣ не первообразные корни уравненія (14) суть корни уравненія:

$$x^{p^{\mu-1}} - 1 = 0$$

Если положимъ, что $\alpha = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\mu$ есть не первообразный корень уравненія (14), то имѣемъ:

$$(\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots\ldots \beta_{\mu-1}\beta_\mu)^{p^{\mu-1}} = 1$$

удаляя всѣ множители равные единицѣ, каковы:

$$\beta_1^{p^{\mu-1}} = 1\ ,\ \beta_2^{p^{\mu-1}} = 1\ , \ldots\ldots ,\ \beta_{\mu-1}^{p^{\mu-1}} = 1$$

найдемъ:

$$\beta_\mu^{p^{\mu-1}} = 1 \tag{23}$$

но изъ уравненій (20) имѣемъ:

$$\beta_\mu^{p^{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}^{p^{\mu-2}} = \beta_{\mu-2}^{p^{\mu-3}} = \ldots\ldots\ldots = \beta_3^{p^2} = \beta_2^p = \beta_1 \tag{24}$$

слѣдовательно $\beta_1 = 1$. Изъ этого видимъ что α, данное выраженіемъ (19), будетъ первообразнымъ или не первообразнымъ корнемъ уравненія (14), смотря по тому будетъ-ли β_1 отлично отъ единицы или равно единицѣ.

Изъ всего выше-изложеннаго видимъ, что рѣшеніе двучленнаго уравненія:

$$x^{p^\mu} - 1 = 0$$

сводится на опредѣленіе одного изъ корней β_1 уравненія $x^p = 1$, одного изъ корней β_2 уравненія $x^p = \beta_1$; одного изъ корней β_3 уравненія $x^p = \beta_2$ и т. д.

Найдя этимъ способомъ одинъ изъ первообразныхъ корней уравненія (14) мы будемъ имѣть и всѣ его корни, возвышая его во всѣ степени отъ 1 до n включительно.

§ 218. Пояснимъ теперь сказанное примѣрами. Рѣшимъ сначала уравненія, коихъ степени простыя числа 2, 3, 5.

Примѣръ 1. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$x^2 - 1 = 0$$

корни этого уравненія суть $+1$ и -1, изъ коихъ -1 есть первообразный, его вторая степень даетъ $+1$, т. е. другой корень.

Примѣръ 2. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$x^3 - 1 = 0 \tag{25}$$

его можно написать въ формѣ:

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

откуда:

$$x-1=0 \quad \text{и} \quad x^2+x+1=0$$

эти два уравненія даютъ слѣдующіе корни уравненія (25):

$$1 \;,\; \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \;,\; \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

если одинъ изъ мнимыхъ корней, напримѣръ второй, означимъ чрезъ α:

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

то всѣ три корня будутъ:

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \;,\; \alpha^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \;,\; \alpha^3=1$$

слѣдовательно степени корня α даютъ всѣ три корня. Такъ какъ каждый изъ мнимыхъ корней есть корень квадратнаго уравненія:

$$x^2+x+1=0$$

то имѣемъ:

$$\alpha^2+\alpha+1=0 \quad \text{и} \quad \alpha^4+\alpha^2+1=0$$

а изъ уравненія $\alpha^3=1$, находимъ:

$$\alpha^3=1 \;,\; \alpha^4=\alpha \;,\; \alpha^5=\alpha^2 \;,\; \alpha^6=1 \;,\; \alpha^7=\alpha \;,\; \alpha^8=\alpha^2 \;,\; \ldots$$

Легко видѣть, что съ помощью свойствъ корня α можно всякую функцію количествъ дѣйствительныхъ и корня α написать въ одной изъ формъ:

$$P+\alpha Q \quad \text{или} \quad P+\alpha^2 Q$$

Примѣръ 3. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$x^5-1=0$$

его можно написать въ формѣ:

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

откуда имѣемъ:

$$x-1=0 \;,\; x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

первое изъ этихъ уравненій даетъ корень $+1$, а второе взаимное (§ 55)

даетъ четыре первообразные корня. Чтобы найти эти корни, напишемъ это уравненіе, раздѣливъ на x^2, въ слѣдующей формѣ:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

и положимъ:

$$x + \frac{1}{x} = z \qquad (26)$$

то:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

слѣдовательно предъидущее уравненіе сдѣлается:

$$z^2 + z - 1 = 0$$

откуда:

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

внося эти значенія въ уравненіе (26), будемъ имѣть еще два уравненія:

$$x^2 - z_1 x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - z_2 x + 1 = 0$$

изъ которыхъ получимъ еще четыре корня даннаго уравненія. Если одинъ изъ этихъ корней, которые суть всѣ первообразные, означимъ чрезъ α, то всѣ пять корней будутъ:

$$\alpha \ , \ \alpha^2 \ , \ \alpha^3 \ , \ \alpha^4 \ , \ \alpha^5 = 1$$

Возьмемъ теперь для примѣра такія двучленныя уравненія, степень коихъ есть простое число въ степени $4 = 2^2$, $9 = 3^2$.

Примѣръ 4. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$x^4 - 1 = 0$$

или

$$x^{2^2} = 1$$

Корни уравненія $x^2 - 1 = 0$ суть $+1$ и -1. Если одинъ изъ этихъ корней возьмемъ за β_1, то слѣдуетъ еще рѣшить уравненіе (16):

$$x^2 = \beta_1$$

Если $\beta_1 = 1$, то найдемъ $\beta_2 = +1$ или -1, а если $\beta_1 = -1$, то корни его

будутъ $+i$ и $-i$, слѣдовательно всѣ четыре корня даннаго уравненія будутъ:

$$+1 \quad , \quad -1 \quad , \quad i \quad , \quad -i$$

изъ коихъ $+1$ и -1 не первообразные, а i и $-i$ первообразные, степени каждаго изъ нихъ дадутъ всѣ четыре корня:

$$+i \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i \quad , \quad i^4=+1$$

и степени корня $-i$ дадутъ эти же корни.

Примѣръ 5. Пусть еще данное уравненіе будетъ:

$$x^9-1=0$$

или

$$x^{3^2}-1=0$$

Рѣшая уравненіе:

$$x^3-1=0$$

будемъ имѣть три корня:

$$1 \quad , \quad \alpha \quad , \quad \alpha^2$$

За этимъ надобно рѣшить уравненіе:

$$x^3=\beta_1$$

полагая послѣдовательно: $\beta_1=1$, α, α^2, найдемъ:

$$\text{Для } \beta_1=1 \quad , \quad \text{найдемъ:} \quad +1 \quad , \quad \alpha \quad , \quad \alpha^3$$

$$\text{Для } \beta_1=\alpha \quad , \quad \text{найдемъ:} \quad \sqrt[3]{\alpha} \quad , \quad \alpha\sqrt[3]{\alpha} \quad , \quad \alpha^2\sqrt[3]{\alpha}$$

$$\text{Для } \beta_1=\alpha^2 \quad , \quad \text{найдемъ:} \quad \sqrt[3]{\alpha^2} \quad , \quad \alpha\sqrt[3]{\alpha^2} \quad , \quad \alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2}$$

Слѣдовательно всѣ корни даннаго уравненія будутъ:

$$1 \;,\; \alpha \;,\; \alpha^2 \;,\; \sqrt[3]{\alpha} \;,\; \alpha\sqrt[3]{\alpha} \;,\; \alpha^2\sqrt[3]{\alpha} \;,\; \sqrt[3]{\alpha^2} \;,\; \alpha\sqrt[3]{\alpha^2} \;,\; \alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2}$$

изъ коихъ послѣдніе шесть первообразные.

§ 219. Разсмотримъ теперь уравненіе:

$$x^n-1=0 \tag{27}$$

въ которомъ n есть какое-нибудь составное число $n=p^\lambda q^\mu \ldots . r^\nu$, гдѣ $p, q, \ldots r$ суть простыя числа.

Напишемъ уравненія:

$$x^{p^\lambda}-1=0 \quad , \quad x^{q^\mu}-1=0 \;, \;.\;.\;.\;.\;.\;, \quad x^{r^\nu}-1=0 \qquad (28)$$

и означимъ чрезъ β одинъ изъ корней перваго уравненія, чрезъ γ одинъ изъ корней второго и т. д.; чрезъ δ одинъ изъ корней послѣдняго уравненія и положимъ:

$$\alpha=\beta\gamma\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\delta \qquad (29)$$

Это произведеніе, очевидно, имѣетъ n значеній, такъ какъ $\beta, \gamma, \ldots . \delta$ имѣютъ по $p^\lambda, q^\mu, \ldots, r^\nu$ значеній каждое. Легко видѣть, что каждое изъ значеній α есть корень уравненія (27). Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\beta^{p^\lambda}=1 \quad , \quad \gamma^{q^\mu}=1 \;, \;.\;.\;.\;.\;.\;, \quad \delta^{r^\nu}=1$$

откуда:

$$\beta^n=1 \quad , \quad \gamma^n=1 \;, \;.\;.\;.\;.\;.\;, \quad \delta^n=1$$

перемножая, найдемъ:

$$(\beta\gamma\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\delta)^n=\alpha^n=1$$

Остается показать, что n значеній α всѣ различны. Для этого положимъ, что два изъ этихъ значеній равны:

$$\beta'\gamma'\;.\;.\;.\;.\;.\;\delta'=\beta''\gamma''\;.\;.\;.\;.\;.\;\delta'' \qquad (30)$$

такъ какъ не всѣ изъ значеній $\beta'\gamma' \ldots . \delta$ равны значеніямъ $\beta''\gamma'' \ldots . \delta''$, то положимъ что β' не равно β''. Возвысимъ предъидущее равенство въ степень $q^\mu \ldots . r^\nu$, то получимъ:

$$(\beta'.\gamma'\ldots.\delta')^{q^\mu \ldots . r^\nu}=(\beta''.\gamma''\ldots.\delta'')^{q^\mu \ldots . r^\nu} \qquad (31)$$

татъ какъ β' и β'' суть два различные, по предположенію, корня уравненія $x^{p^\lambda}=1$, то ихъ можно выразить степенями первообразнаго корня того же уравненія; пусть этотъ первообразный корень будетъ β, то:

$$\beta'=\beta^{m+m'} \quad , \quad \beta''=\beta^{m'}$$

m и $m'<p^\lambda$. Въ силу этого равенство (29) сдѣлается.

$$\beta^{(m+m')q^\mu \ldots . r^\nu}=\beta^{m'q^\mu \ldots . r^\nu}$$

или:

$$\beta^{mq^\mu \ldots . r^\nu}=1$$

откуда слѣдуетъ, что β есть общій корень уравненій:

$$x^{p^\lambda}-1=0 \quad \text{и} \quad x^{mq^\mu\ldots r^\nu}-1=0$$

слѣдовательно β должно удовлетворять и уравненію (§ 215):

$$x^\theta-1=0$$

гдѣ θ есть общій наибольшій дѣлитель числа p^λ и $mq^\mu\ldots.r^\nu$. Но этотъ общій наибольшій дѣлитель не больше m, слѣдовательно меньше p^λ, поэтому β не есть первообразный корень уравненія $x^{p^\lambda}-1=0$, какъ выше предположено. Изъ этого заключаемъ, что формула (29) даетъ всѣ n корней уравненія (27).

Какіе изъ этихъ n корней первообразные и какіе не первообразные?

Легко показать что если $\beta, \gamma, \ldots, \delta$ суть первообразные корни уравненій (28), то α будетъ первообразнымъ корнемъ уравненія (27). Положимъ, что $\beta, \gamma, \ldots, \delta$ суть первообразные корни, а корень α, изъ нихъ составленный, не первообразный корень уравненія (27). Если онъ не первообразный, то онъ долженъ удовлетворить уравненію:

$$x^\theta-=0$$

гдѣ θ есть дѣлитель числа n. Изъ числа множителей, составляющихъ число n, будетъ находиться по крайней мѣрѣ одинъ изъ простыхъ, входящій въ θ въ степени низшей чѣмъ въ n. Положимъ, что этотъ множитель есть p^k; очевидно θ раздѣлитъ число $p^{\lambda-1}q^\mu\ldots r^\nu$, а слѣдовательно α будетъ корнемъ уравненія:

$$x^{p^{\lambda-1}q^\mu\ldots r^\nu}=1 \qquad (32)$$

т. е.:

$$(\beta\gamma\ldots.\delta)^{p^{\lambda-1}q^\mu\ldots r^\nu}=1$$

Но мы имѣемъ:

$$\gamma^{q^\mu}=1 \quad , \quad \ldots\ldots\ldots \quad , \quad \delta^{r^\nu}=1$$

слѣдовательно:

$$\beta^{p^{\lambda-1}q^\mu\ldots r^\nu}=1$$

откуда видимъ, что β есть корень уравненія (32) и корень уравненія $x^{p^\lambda}=1$, слѣдовательно (§ 215, слѣд.) β будетъ и корень уравненія:

$$x^{p^{\lambda-1}}=1$$

но этого быть не можетъ, такъ какъ по условію β есть первообразный корень уравненія:

$$x^{p^\lambda}=1$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если $\beta, \gamma, \ldots, \delta$ суть первообразные корни уравненій (26), то корни α, составленные изъ нихъ, будутъ первообразные корни уравненія (27).

Такъ какъ число первообразныхъ корней въ каждомъ изъ уравненій (28) есть:

$$p^\lambda\left(1-\frac{1}{p}\right)\quad,\quad q^\mu\left(1-\frac{1}{q}\right)\quad,\ \ldots\ldots,\quad r^\nu\left(1-\frac{1}{r}\right)$$

то число первообразныхъ корней въ уравненіи (27) есть:

$$p^\lambda.q^\mu\ldots.r^\nu\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{r}\right)=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{r}\right)$$

т. е. столько, сколько есть чиселъ меньшихъ n и взаимно-простыхъ съ нимъ.

Примѣръ. Найти корни уравненія:

$$x^6-1=0$$

Такъ какъ $6=2.3$, то мы должны рѣшить уравненія:

$$x^2-1=0 \quad \text{и} \quad x^3-1=0$$

корни перваго суть $+1$ и -1, а втораго 1, α, α^2, слѣдовательно искомые корни должны быть:

$$1\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha^2\ ,\ -1\ ,\ -\alpha\ ,\ -\alpha^2$$

изъ коихъ два послѣдніе суть первообразные.

Изъ всего сказаннаго выше видимъ, что рѣшеніе всѣхъ двучленныхъ уравненій сводится на рѣшеніе двучленныхъ же уравненій, коихъ степени суть числа *простыя*.

§ 220. Означимъ корни уравненія:

$$x^n-1=0 \tag{31}$$

гдѣ n есть какое-нибудь цѣлое число, чрезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$. Если ρ есть одинъ изъ первообразныхъ корней уравненія (31), то всѣ его корни могутъ быть представлены степенями ρ (10) и будутъ:

$$1\ ,\ \rho\ ,\ \rho^2\ ,\ \rho^3\ ,\ \ldots\ldots,\ \rho^{n-1}$$

Если m есть какое-нибудь цѣлое положительное число, то имѣемъ:

$$\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\ldots+\omega^m=1+\rho^m+\rho^{2m}+\ldots+\rho^{(n-1)m}=\frac{1-\rho^{nm}}{1-\rho}$$

Если число m не дѣлится на n, то вторая часть уравненія равна нулю; при этой гипотезѣ будемъ имѣть:

$$\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\ldots\ldots+\omega^m=0$$

но если m дѣлится на n, то каждая изъ степеней $\alpha^m, \beta^m, \ldots, \omega^m$ равна единицѣ, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ:

$$\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\ldots\ldots+\omega_m=n$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть въ частномъ случаѣ:

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\omega&=0\\
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots\ldots+\omega^2&=0\\
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots\ldots+\omega^3&=0 \qquad (32)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}+\gamma^{n-1}+\ldots\ldots+\omega^{n-1}&=0\\
\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\ldots\ldots+\omega^n&=n
\end{aligned}$$

Всѣ корни двучленнаго уравненія, исключая $+1$ и -1, если послѣдній есть, мнимые, въ чемъ легко убѣдиться замѣчаніемъ, что между числами положительными и отрицательными нѣтъ такихъ, кромѣ ± 1, которыя-бы, будучи возвышены въ данную степень, дали въ результатѣ единицу, а всѣ корни двучленнаго уравненія имѣють это свойство.

§ 221. Всякое двучленное уравненіе нечетной степени, раздѣливъ его на $x-1$, гдѣ степень $p=2\mu+1$, можно написать въ формѣ:

$$x^p-1=(x-1)(x^{2\mu}+x^{2\mu-1}+x^{2\mu-2}+\ldots+x^2+x+1)=0$$

корни уравненія:

$$x^{2\mu}+x^{2\mu-1}+x^{2\mu-2}+\ldots\ldots+x^2+x+1=0 \qquad (33)$$

всѣ мнимые. Уравненіе (33) взаимное (§ 59), поэтому раздѣляя его на x^μ, найдемъ:

$$x^\mu+\frac{1}{x^\mu}+x^{\mu-1}+\frac{1}{x^{\mu-1}}+\ldots\ldots+x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0$$

полагая:

$$x+\frac{1}{x}=z \quad , \quad x^m+\frac{1}{x^m}=U_m \tag{34}$$

уравненіе (33) приметъ форму:

$$V_\mu=U_\mu+U_{\mu-1}+U_{\mu-2}+\ldots\ldots+U_2+U_1+1=0 \tag{35}$$

$U_\mu, U_{\mu-1}, U_{\mu-2}, \ldots, U_2, U_1$ суть извѣстныя функціи (§ 59), слѣдовательно уравненіе (35) будетъ p-й степени относительно z. Если изъ него опредѣлимъ μ значеній $z=z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\mu$, то уравненія:

$$x+\frac{1}{x}=z_1 \quad , \quad x+\frac{1}{x}=z_2, \ldots\ldots, x+\frac{1}{x}=z_\mu$$

или:

$$x^2-z_1x+1=0 \quad , \quad x^2-z_2x+1=0, \ldots\ldots, x^2-z_\mu x+1=0$$

дадутъ по два значенія для x, а слѣдовательно, будемъ имѣть всѣ 2μ корней уравненія (33).

Мы положили, что p есть нечетное простое число; положимъ теперь, что $p=2m$, то уравненіе:

$$x^{2m}-1=0 \tag{36}$$

можно написать въ формѣ:

$$(x^m+1)(x^m-1)=0$$

откуда:

$$x^m-1=0 \quad \text{и} \quad x^m+1=0$$

второе, если m есть число нечетное, приводится къ формѣ перваго, измѣняя x на $-x$. Но если m есть число четное 2μ, то ему можно дать форму:

$$x^\mu+\frac{1}{x^\mu}=0$$

полагая $x+\frac{1}{x}=z$ оно сдѣлается $U_\mu=0$. Слѣдовательно, уравненіе (27) во всякомъ случаѣ приводится къ уравненіямъ формы:

$$V_\mu=0 \quad , \quad U_\mu=0 \tag{37}$$

§ 222. Въ § 214 мы видѣли, что если данное уравненіе будетъ:

$$x^n = A \qquad (38)$$

то одно изъ его рѣшеній будетъ $\sqrt[n]{A}$, а всѣ рѣшенія получатся, умноживъ этотъ радикалъ на корни двучленнаго уравненія:

$$x^n = 1 \qquad (39)$$

Если s будетъ первообразный корень этого уравненія, то всѣ корни уравненія (48) будутъ:

$$\sqrt[n]{A} \;,\; s\sqrt[n]{A} \;,\; s^2\sqrt[n]{A} \;,\; \ldots\ldots \;,\; s^{n-1}\sqrt[n]{A} \qquad (40)$$

Каждое изъ этихъ значеній, будучи возвышено въ n-ю степень, даетъ A, поэтому говорятъ, что радикалъ $\sqrt[n]{A}$ имѣетъ n значеній; эти значенія даются рядомъ (40).

Примѣръ. Какое число, будучи возвышено въ третью степень даетъ 27?

Отвѣтъ. Если черезъ α означимъ первообразный корень уравненія $x^3 = 1$, то нашъ вопросъ будетъ имѣть три отвѣта:

$$3 \;,\; 3\alpha \;,\; 3\alpha^2$$

§ 223. Съ помощью вышеизложенныхъ свойствъ корней двучленнаго уравненія:

$$x^n - 1 = 0$$

гдѣ n есть какое-нибудь цѣлое число, можно въ алгебраическихъ уравненіяхъ, содержащихъ радикалы, ихъ удалить или въ алгебраическихъ дробяхъ, содержащихъ радикалы въ знаменателѣ, перевесть въ числителя, освободивъ отъ нихъ знаменателя, или обратно изъ числителя перевесть радикалы въ знаменателя.

ГЛАВА XV.

Алгебраическія функціи.

§ 224. *Функціи раціональныя.* Пусть будутъ:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \tag{1}$$

раціональныя количества т. е. числа цѣлыя или дробныя. Числа цѣлыя и дробныя составляютъ область, которую будемъ называть *раціональною.*

Изъ чиселъ (1) составимъ цѣлую раціональную функцію съ цѣлыми коэфиціентами (§ 19), которой общая форма есть:

$$\Sigma A_r a_0^{n_0} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots \tag{2}$$

гдѣ $n_0+n_1+n_2+\ldots \overline{\overline{<}} n$ есть степень функціи. Такую функцію мы всегда будемъ обозначать символомъ $f_0(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ или просто чрезъ f_0.

Дробная раціональная функція есть частное двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій:

$$\frac{f_0}{\varphi_0} \tag{3}$$

Каждую цѣлую раціональную функцію можно расположить по степенямъ одного изъ количествъ въ нее входящихъ, напримѣръ, по a_i и дать ей форму:

$$f_0 = C_0 + C_1 a_i + C_2 a_i^2 + \ldots\ldots + C_n a_i^t \tag{4}$$

гдѣ $C_0, C_1, \ldots,$ суть функціи отъ $a_0, a_1, \ldots,$ исключая a_i, и коэфиціентовъ A_r.

Составимъ изъ количествъ (1) рядъ раціональныхъ функцій:

$$f_0 \ ,\ \varphi_0 \ ,\ \psi_0 \ ,\ \ldots\ldots$$

таковы, напримѣръ, функціи:

$$H \ ,\ G \ ,\ \Delta_3 \ ,\ J_1 \ ,\ J_2 \ ,\ \ldots\ldots$$

составленныя изъ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, какъ мы видѣли въ § 53. Очевидно, что эти функціи сами находятся въ области раціональныхъ количествъ.

Изъ такихъ функцій извлечемъ корни простыхъ степеней $p_1, q_1, r_1, \ldots$, и результаты назовемъ чрезъ $z_1, u_1, v_1, \ldots$ т. е.:

$$z_1^{p_1} = f_0 \quad , \quad u_1^{q_1} = \varphi_0 \quad , \quad v_1^{r_1} = \psi \quad , \quad \ldots . \tag{5}$$

количества $z_1, u_1, v_1, \ldots$ называются *радикалами перваго порядка* и входятъ въ особенную область количествъ, которую называютъ *областью раціональностей перваго порядка*, въ которой количества подобныя $z_1, u_1, v_1, \ldots$ разсматриваются какъ раціональныя. Въ эту область входятъ и количества раціональныя. Изъ этой области возьмемъ количества раціональныя и радикалы $z_1, u_1, \ldots$ и изъ нихъ составимъ цѣлыя раціональныя функціи съ цѣлыми коэфиціентами, которыя означимъ символами:

$$f_1(a_0, a_1, \ldots, z_1, u_1, \ldots) \quad , \quad \varphi_1(a_0, a_1, \ldots, z_1, u_1, \ldots) \tag{6}$$

и назовемъ *радикальными функціями перваго порядка*. Такую функцію можно расположить по степенямъ какого-нибудь изъ радикаловъ, напримѣръ z_1 и дать ей форму:

$$f_1 = C_0 + C_1 z_1 + C_2 z^2_1 + C_3 z^3_1 + \ldots$$

степени радикала z_1, превосходящія $p_1 - 1$, можно понизить съ помощью уравненій:

$$z_1^{p_1} = f_0 \quad , \quad z_1^{p_1+1} = z_1 f_0 \quad , \quad \ldots \tag{7}$$

послѣ чего функція f_1 будетъ имѣть форму:

$$f_1 = B_0 + B_1 z_1 + B_2 z^2_1 + \ldots + B_{p_1-1} z^{p_1-1} \tag{8}$$

гдѣ, $B_0, B_1, \ldots, B_{p_1-1}$ суть функціи количествъ $a_0, a_1, \ldots$ и радикаловъ $u_1, v_1, \ldots$, если они входятъ въ f_1. Той же функціи можно дать такую же форму относительно каждаго изъ остальныхъ радикаловъ $u_1, v_1, \ldots$ Очевидно радикальныя функціи 1-го порядка находятся въ области раціональностей 1-го порядка.

Изъ радикальныхъ функцій 1-го порядка $f_1, \varphi_1, \ldots$ извлечемъ корни простыхъ степеней $p_2, q_2, r_2, \ldots$ и результаты означимъ чрезъ $z_2, u_2, v_2, \ldots$ т. е.:

$$z_2^{p_2} = f_1 \quad , \quad u_2^{q_2} = \varphi \quad , \quad v_2^{r_2} = \psi_1 \quad , \quad \ldots . \tag{9}$$

Замѣтимъ, что степени $p_1, q_1, r_1, \ldots; p_2, q_2, r_2, \ldots$ могутъ быть всѣ различны, но могутъ быть нѣкоторыя изъ нихъ равными. Извлекаемъ корни

всегда простыхъ степеней, потому что корень, коего степень есть составное число $m.n$, разлагается на два корня одинъ надъ другимъ.

Количества $z_2, u_2, v_2, ..$ называются *радикалами втораго порядка* и входятъ въ область количествъ, которая называется *областью раціональностей втораго порядка.* Въ эту область входятъ количества раціональныя и количества составляющія область 1-го порядка:

Изъ количествъ $a_0, a_1, \ldots, z_1, u_1, \ldots, z_2, u_2, ..$ составимъ цѣлыя раціональныя функціи съ цѣлыми коэфиціентами, которыя означимъ символами:

$$f_2(a_0, a_1, \ldots, z_1, u_1, .., z_2, u_2, ..) \quad , \quad \varphi(a_0, a_1, \ldots, z_1, u_1, .., z_2, u_2, ..), \ldots \quad (10)$$

и назовемъ *раціональными функціями 2-го порядка.*

Такую функцію можно расположить по степенямъ одного изъ радикаловъ 2-го порядка, напримѣръ, z_2 и дать ей форму

$$f_2 = k_0 + k_1 z_2 + k_2 z^2{}_2 + k_2 z^3{}_2 + \ldots$$

степени радикала z_2, превосходящія $p_2 - 1$, можно понизить съ помощью уравненій:

$$z_2^{p_2} = f_1 \quad , \quad z_2^{p_2+1} = z_2 f_1, \ldots$$

послѣ чего функція f_2 будетъ имѣть форму

$$f_2 = D_0 + D_1 z_2 + D_2 z^2{}_2 + \ldots + D_{p_2-1} z_2^{p_2-1} \quad (11)$$

гдѣ $D_0, D_1, \ldots, D_{p_2-1}$ суть радикальныя функціи перваго порядка и втораго порядка относительно радикаловъ u_2, $v_2, \ldots$ Той же функціи можно дать ту же форму относительно радикаловъ u_2, $v_2, \ldots$, но нельзя ей дать такую форму относительно радикаловъ 1-го порядка $z_1, a_1, \ldots$, такъ какъ $z_1, u_1, \ldots$ находятся подъ радикалами $z_2, u_2, \ldots$ Поэтому радикалы $z_2, u_2, \ldots$ называются *внѣшними*, и $z_1, u_1, \ldots$ называются *внутренними.* Продолжая подобный процессъ, дойдемъ до радикаловъ i-го порядка:

$$z_i \quad , \quad u_i \quad , \quad v_i \; , \; \ldots$$

находящихся въ *области раціональностей* i-го *порядка*, въ которой находятся и всѣ раціональности низшихъ порядковъ. Эти радикалы опредѣляются уравненіями:

$$z_i^{p_i} = f_{i-1} \quad , \quad u_i^{q_i} = \varphi_{i-1} \quad , \quad \gamma_i^{r_i} = \psi_{i-1} \quad , \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Изъ раціональныхъ количествъ всѣхъ порядковъ до i-го включительно составляются цѣлыя раціональныя функціи f_i, φ_i,... съ цѣлыми коэфиціентами. Каждую изъ нихъ можно расположить по степенямъ одного изъ радикаловъ i-го порядка $z_i, u_i, \ldots$ и дать ей форму:

$$f_i = M_0 + M_1 z_i + M_2 z_i^2 + M_3 z_i^3 + \ldots .$$

степени, превосходящія $p_i - 1$, можно понизить съ помощью уравненій:

$$z_i^{p_i} = f_{i-1} \quad , \quad z_i^{p_i+1} = z_i f_{i-2} \ , \ \ldots$$

послѣ чего функціи f_i будутъ имѣть форму:

$$f_i = u_0 + u_1 z_i + u_2 z_i^2 + \ldots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \tag{13}$$

гдѣ $u_0, u_1, \ldots, u_{p_i-1}$ суть функціи низшаго порядка или того же, но относительно радикаловъ i-го порядка $u_i, v_i, \ldots$ Радикалы $z_i, u_i \ldots$ называются *внѣшними*, всѣ остальные *внутренними*, по степенямъ которыхъ нельзя разложить функцію f_i.

Замѣтимъ, что каждому изъ радикаловъ

$$z_1 \ , \ z_2 \ , \ z_3 \ , \ \ldots \ , \ z_i$$

при составленіи радикаловъ и радикальныхъ функцій различныхъ порядковъ можно давать какое угодно изъ его значеній:

$$\alpha_1^{\lambda_1} z_1 \ , \ \alpha_2^{\lambda_2} z_2 \ , \ \alpha_3^{\lambda_3} \ \ldots \ , \ \alpha_i^{\lambda_i} z_i$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i$ суть первообразные корни уравненій:

$$x^{p_1} - 1 = 0 \ , \ x^{p_2} - 1 = 0 \ , \ \ldots \ x^{p_i} - 1 = 0 \tag{14}$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ получаютъ соотвѣтственно всѣ значенія отъ 0 до $p_1 - 1$, $p_2 - 1, \ldots, p_i - 1$. Поэтому радикалъ z_1 имѣетъ p_1 значеній, радикалъ z_2 имѣетъ ихъ $p_1 p_2$, радикалъ z_3 имѣетъ ихъ $p_1 p_2 p_3 \ldots$ и радикалъ z_i имѣетъ $p_1 p_2 \ldots p_i$ значеній.

Дробная раціональная функція i-го порядка есть частное двухъ цѣлыхъ радикальныхъ функцій:

$$F_i = \frac{f_i}{\varphi_i}$$

или:

$$F_i = \frac{u_0 + u_1 z_i + u_2 z_i^2 + \ldots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1}}{v_0 + v_1 z_i + v_2 z_i^2 + \ldots + v_{p_i-1} z_i^{p_i-1}} \tag{15}$$

Вотъ схема образованія раціональной функціи i-го порядка:

$$\begin{aligned} z_1^{p_1} &= f_0(a_0, a_1, \dots) \\ z_2^{p_2} &= f_1(z_1, a_0, a_1, \dots) \\ z_3^{p_3} &= f_2(z_2, z_1, a_0, a_1, \dots) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_i^{p_i} &= f_{i-1}(z_{i-1}, z_{i-2}, \dots, z_2, z_1, a_0, a_1, \dots) \end{aligned} \tag{16}$$

и наконецъ функція i-го порядка:

$$f_i(z_i, z_{i-1}, \dots, z_2, z_1, a_0, a_1, \dots) \tag{17}$$

Такова форма самой обширной алгебраической функціи, она, какъ видимъ, составлена изъ конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія и извлеченія корней.

Примѣръ. Раціональныя функціи:

$$H \quad , \quad G \quad , \quad a_0^2 \Delta_8 = G^2 + 4H^2$$

радикалъ 1-го порядка:

$$z_1 = \sqrt{G^2 + 4H^3}$$

радикальныя функціи 1-го порядка:

$$f_1 = -\tfrac{1}{2}(G + \sqrt{G^2 + 4H^3}) \quad \text{и} \quad \varphi_1 = -\tfrac{1}{2}(G - \sqrt{G^2 + 4H^3})$$

радикалъ 2-го порядка:

$$z_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + \sqrt{G^2 + 4H^3})}$$

радикальныя функціи 2-го порядка:

$$f_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + \sqrt{G^2 + 4H^3})} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - \sqrt{G^2 + 4H^3})}$$

§ 225. *Предложеніе 1.* Дробную радикальную функцію i-го порядка можно преобразовать въ цѣлую, относительно радикала z_i.

Доказательство. Пусть данная дробная радикальная функція i-го порядка будетъ.

$$\Phi_i = \frac{\varphi(z_i)}{\psi(y_i)} \tag{18}$$

Если возьмемъ всѣ значенія радикала z_i:

$$z_i \ , \ z_i\alpha_i \ , \ z_i\alpha_i^2 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ z_i\alpha_i^{p_i-1}$$

и произведеніемъ:

$$\psi(z_i\alpha_i).\psi(z_i\alpha_i^2) \ . \ . \ . \ . \ . \ \psi\left(z_i\alpha^{p_i-1}\right)$$

помножимъ числителя и знаменателя дроби (18), то будемъ имѣть:

$$\Phi_i = \frac{\varphi(z_i)\,\psi(z_i\alpha_i)\,\psi(z_i\alpha_i^2)\ldots\psi\left(z_i\alpha_i^{p_i-1}\right)}{\psi(z_i)\,\psi(z_i\alpha_i)\,\psi(z_i\alpha_i^2)\ldots\psi\left(z_i\alpha_i^{p_i-1}\right)}$$

Знаменатель этой дроби есть симметрическая функція корней уравненія $x^{p_i} - f_{i-1} = 0$, слѣдовательно раціональная функція его коэфиціентовъ, а слѣдоватетьно не заключаетъ радикала z_i. Числитель же есть симметрическая функція корней $\alpha_i, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^{p_i-1}$ уравненія:

$$\frac{x^{p_i} - 1}{x - 1} = 0$$

слѣдовательно не заключаетъ α. Откуда видимъ, что функція Φ_i имѣетъ форму:

$$\Phi_i = J_0 + J_1 z_i^2 + \ . \ . \ . \ + J_{p_i-1} z_i^{p_i-1}$$

гдѣ $J_0, J_1, \ldots$ суть такія же функціи какъ и Φ_i относительно другихъ радикаловъ i-го порядка или низшаго. Если эти коэфиціенты дробные, то подобнымъ преобразованіемъ, имъ можно дать форму цѣлыхъ функцій относительно каждаго изъ радикаловъ и такимъ образомъ можно преобразовать Φ_i въ цѣлую функцію относительно всѣхъ радикаловъ въ нее входящихъ. Это частный случай предложенія § 151.

Примѣръ 1. Пусть радикальная функція будетъ перваго порядка:

$$f_1 = \frac{a_1 + x}{a_2 + \sqrt{x}}$$

полагая $z_1 = \sqrt{x}$, найдемъ:

$$f_1 = \frac{a_1 + x}{a_2 + z_2}$$

значенія радикала z_1 суть $+z_1$ и $-z_1$. Помноживъ числителя и знаменателя на $a_2 - z_1$, будемъ имѣть:

$$f_1 = \frac{(a_1 + x)(a_2 - z)}{(a_3 + z_1)(a_2 - z_1)} = \frac{(a_1 + x)(a_2 - z_1)}{a_2^2 - z_1^2} = \frac{(a_1 + x)(a_2 - \sqrt{x})}{a_2^2 - x}$$

Примѣръ 2. Пусть данная функція будетъ перваго порядка:

$$f_1 = \frac{1}{a_1 + a_2\sqrt[3]{x}}$$

полагая опять $z_1 = \sqrt[3]{x}$, будемъ имѣть:

$$f_1 = \frac{1}{a_1 + a_2 z_1}$$

значенія радикала z_1 суть $z_1, z_2, \alpha z_1, \alpha^2 z_1$, гдѣ α корень уравненія:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

Помножая числителя и знаменателя на произведеніе $(a_1 + a_2\alpha z_1)(a_1 + a_2\alpha^2 z_1)$, найдемъ:

$$f_1 = \frac{(a_1 + a_2\alpha z_1)(a_1 + a_2\alpha^2 z_1)}{(a_1 + a_2 z_1)(a_1 + a_2\alpha z_1)(a_1 + a_2\alpha^2 z_1)} = \frac{a_1^2 + a_1 a_2(\alpha + \alpha^2)z_1 + a_2^2 z_1^2}{a_1^3 + a_2^3 z_1^3}$$

или:

$$f_1 = \frac{a_1^2 - a_1 a_2 z_1 + a_2^2 z_1^2}{a_1^3 + a_2^3 z_1^3} = \frac{a_1^2 - a_1 a_2\sqrt[3]{x} + a_2^2\sqrt[3]{x^2}}{a_1^3 + a_2^3 x}$$

Примѣръ 3. Пусть еще будетъ дана радикальная функція втораго порядка:

$$f_1 = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$$

полагая $z_2 = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$, $\sqrt{x + \sqrt{x}} = u$, найдемъ:

$$f_2 = \frac{u}{x + z_2}$$

помножая числителя и знаменателя на:

$$(x + \alpha z_2)(x + \alpha^2 z_2)$$

найдемъ:

$$f_2 = \frac{u(x + \alpha z_2)(x + \alpha^2 z_2)}{(x + z_2)(x + \alpha z_2)(x + \alpha^2 z_2)}$$

откуда:

$$f_2 = \frac{u\left\{(x^2 + (\alpha + \alpha^2)xz_2 + \alpha^3 z_2^2\right\}}{x^3 + (1 + \alpha + \alpha^2)x^2 z_2 + (1 + \alpha + \alpha^2)xz_2^2 + \alpha^3 z_2^3}$$

но $1+\alpha+\alpha^2=0$, $\alpha^3=1$, слѣдовательно:

$$f_2=\frac{u(x-xz_2+z_2^2)}{x^3+z_2^3}=\frac{u\{x^2-x\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}\}}{x^3+x+\sqrt{x}}$$

радикалъ z_2 исчезъ изъ знаменателя; чтобы удалить и радикалъ $\sqrt{x}$ надобно помножить числителя и знаменателя функціи f_2 на $x^3+x-\sqrt{x}$, что даетъ:

$$f_2=\frac{u\{x^2-x\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}\}(x^3+x-\sqrt{x})}{(x^3+x)^2-x}$$

Такимъ образомъ всѣ радикалы удалены изъ знаменателя и мы имѣемъ:

$$f_2=A_0+A_1z_2+A_2z_2^2$$

§ 226. *Несократимыя функціи.* Если функція:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ .\ .\ .\ .\ +a_{n-1}x+a_n \tag{19}$$

съ раціональными коэфиціентами не разлагается на множителей также съ раціональными коэфиціентами, то она называется *несократимой.*

Примѣръ 1. Функція:

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$$

будетъ сократимая, ибо коэфиціенты ея множителей 1, 3, 4 и коэфиціенты 1, 7, 12 функціи суть раціональныя числа.

Примѣръ 2. Напротивъ функція:

$$x^2+6x-5=(x+3+\sqrt{14})(x+3-\sqrt{14})$$

несократима, ибо коэфиціенты ея множителей 1, 3, $\sqrt{14}$ принадлежитъ къ раціональностямъ 1-го порядка, а ея коэфиціенты 1, 6, 5 суть раціональныя числа.

Можно обобщить несократимость въ извѣстномъ смыслѣ слѣдующимъ образомъ. Если коэфиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ функціи (19) принадлежатъ къ извѣстному порядку раціональностей, то функція (19) будетъ называться *несократимою,* когда она не разлагается на множителей, коихъ коэфиціенты принадлежатъ къ тому же порядку раціональностей, къ которому принадлежатъ и коэфиціенты функціи (19). Въ противномъ случаѣ, она называется сократимой.

Примѣръ 3. Функція:

$$x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})$$

сократима, а функція:

$$x^2-2\sqrt{3}\,x-\sqrt[3]{5}=\left(x+\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt[3]{5}}\right)\left(x+\sqrt{3}-\sqrt{3+\sqrt[3]{5}}\right)$$

несократима.

Изъ сказаннаго выше вытекаетъ слѣдующее предложеніе.

Предложеніе 2. Если одинъ изъ корней несократимаго уравненія съ коэфиціентами, принадлежащими извѣстному порядку раціональностей принадлежитъ и другому уравненію съ коэфиціентами той же раціональности, то этому послѣднему уравненію будутъ удовлетворять и остальные корни перваго уравненія.

Доказательство. Пусть $f(x)=0$ будетъ данное уравненіе, коего одинъ корень принадлежитъ и уравненію $F(x)=0$. Если эти уравненія имѣютъ общій корень, то они имѣютъ общаго дѣлителя съ коэфиціентами той же раціональности, какъ и коэфиціенты функцій $f(x)$ и (x), а слѣдовательно функція $f(x)$ была-бы сократима, что противорѣчитъ гипотезѣ. Слѣдовательно это не иначе можетъ быть какъ

$$F(x)=\varphi(x).f(x)$$

откуда видно, что всѣ корни уравненія $f(x)=0$ принадлежатъ и уравненію $F(x)=0$. Изъ этого слѣдуетъ, что если два несократимыя уравненія $f(x)=0$ и $F(x)=0$ имѣютъ одинъ общій корень, то это можетъ быть только въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ и $F(x)$ тождественны.

§ 227. *Предложеніе 3.* Если два уравненія:

$$A_0+A_1z_i+A_2z_i^2+\ .\ .\ .\ .\ +A_{p_i-1}z_i^{p_i-1} \tag{20}$$

и

$$z_i^{p_i}=F \tag{21}$$

гдѣ $A_0, A_1, \ldots, A_{p_i-1}, F,$ суть раціональности извѣстнаго порядка, совмѣстно имѣютъ мѣсто, то или z_i принадлежитъ къ порядку раціональностей $A_0, A_1, \ldots, f_{i-1}$ или

$$A_0=0\ \ ,\ \ A_1=0\ \ ,\ \ .\ .\ .\ .\ \ ,\ \ A_{p_i-1}=0 \tag{22}$$

Доказательство. Если не всѣ $A_0, A_1, \ldots, A_{p_i-1}, F$ равны нулю, то уравненія (20) и (21) будутъ имѣть, по крайней мѣрѣ, одинъ общій корень.

Пусть:

$$B_0 + B_1 z_i + B_2 z_i^2 + \ldots + B_k z^k$$

будетъ общій наибольшій дѣлитель функцій (20) и (21), который приравненный нулю, будетъ имѣть k корней, принадлежащихъ уравненію (21): слѣдовательно, если одинъ изъ нихъ означимъ чрезъ z'_i, то всѣ они будутъ:

$$z_i' \quad , \quad z_i'\alpha_i^a \quad , \quad z_i'\alpha_i^b \quad , \quad \ldots \quad , \quad z_i'\alpha_i^r$$

ихъ произведеніе, очевидно будетъ равно B_0:

$$\pm z_i^k \alpha_i^q = B_0$$

Такъ какъ p_i есть число простое, то всегда можно найти два числа t и s, которыя удовлетворяютъ уравненію:

$$p_i t + ks = 1$$

откуда:

$$(\pm B_0)^s = z^{k-p_i t} \alpha_i^{qs}$$

или:

$$z_i \alpha_i^{qs} = F^t (\pm B_0)^s$$

изъ этого уравненія видно, что z_i принадлежитъ къ раціональностямъ порядка въ которомъ находятся и количества $A_0, A_1, \ldots, A_{p_i-1}, F$. Въ противномъ случаѣ, будутъ имѣть мѣсто уравненія (22).

§ 228. На основаніи предъидущаго предложенія можно показать, что въ функціи i-го порядка:

$$f_i = u_0 + J_1 z_i + J_2 z_i^2 + \ldots + J_{p_i-1} z^{p_i-1} \tag{23}$$

можно всегда сдѣлать коэфиціентъ у z_i равнымъ единицѣ. Если J_1 не равно нулю, то полагая $J_1 z_i = z_i'$, z_i' будетъ, очевидно, радикалъ того же порядка, что и z_i, слѣдовательно мы вообще имѣемъ:

$$z_i^k = \frac{z_i'^k}{J_k^k}$$

въ (23) степени z_i степенями z_i' найдемъ:

$$f_i = u_0 + z_i' + u_2 z_i^2 + \ldots + u_{p_i-1} z_i'^{p_i-1} \tag{24}$$

гдѣ:

$$u_k = \frac{J_k}{J_1^k}$$

Положимъ теперь, что въ (23), $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \ldots$ и что J_k не равно нулю. Въ этомъ случаѣ, положимъ:

$$z_i' = J_k z_i^k \qquad (25)$$

уравненіе, которое должно имѣть мѣсто совмѣстно съ уравненіемъ.

$$z_i^{p_i} = f_{i-1} \qquad (26)$$

а мы выше видѣли, что для этого необходимо или $J_k = 0$ и $z_i = 0$, что по условію не имѣетъ мѣста, или z_i есть количество находящееся въ области раціональностей:

$$(z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots, z_2, z_1, a_0, a_1, \ldots, z_i')$$

т. е. если α_i есть корень уравненія $x^{p_i} - 1 = 0$, то:

$$\alpha_i z_i = \Phi(z_i', z_{i-1}, \ldots, z_2, z_1, a_0, a_1 \ldots) \qquad (27)$$

Слѣдовательно въ функцію f_i вмѣсто z_i можно вставить функцію z_i', если только α_i внесемъ въ область раціональности. Откуда слѣдуетъ, что:

$$(z_i', z_{i-1}, \ldots, z_2, z_1, a_0, a_1, \ldots) \text{ и } (z_i, z_{i-1}, \ldots, z_2, z_1, a_0, a_1, \ldots)$$

находятся въ одной и той же области раціональности. Въ силу уравненій (25) и (27) уравненіе:

$$z_i'^{p_i} = J_k^{p_i} z_i'^{kp_i} = f(z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots, z_2, z_1, a_0, a_1, \ldots)$$

внесется въ схему вмѣсто (26). Чрезъ это $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$ существенно не измѣняется, надобно только въ функцію f_i внесть вмѣсто z_i его выраженіе (27). Вслѣдствіе чего функція (23) преобразуется въ форму (24). Поэтому всякую радикальную функцію будемъ писать въ формѣ (24).

§ 229. Для уравненій 2-й, 3-й и 4-й степени были найдены радикальныя функціи, коихъ всѣ значенія суть корни этихъ уравненій. Для уравненія 3-й степени такую функцію нашелъ итальянскій геометръ Тартилія (Tartaglia) въ 1535 г., и для уравненія 4-й степени составилъ такую функцію Людовикъ Феррари (Ferrari) въ 1574 г. Съ тѣхъ поръ геометры не переставали заниматься составленіемъ радикальной функціи и для уравненія 5-й степени, но всѣ ихъ усилія не привели къ желанной цѣли. Въ началѣ настоящаго столѣтія итальянскій геометръ Руфини (Rufini) первый

показалъ, что эта задача невозможна; только въ 1824 году Абель, шведскій математикъ, послѣ тщательныхъ разысканій Коши и другихъ геометровъ, строго доказалъ положеніе Руфини.

Послѣ этого рождается вопросъ: какія-же уравненія удовлетворяются радикальными функціями, какой характеръ и свойство уравненій и радикальныхъ функцій, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ? Мы теперь и займемся этимъ вопросомъ, но вполнѣ рѣшить его мы здѣсь не можемъ, такъ какъ для этого необходимы свѣдѣнія, которыя мы изложимъ впослѣдствіи. Коснемся здѣсь только нѣкоторыхъ частей его.

Опредѣленіе. Если данному уравненію удовлетворяетъ радикальная функція извѣстнаго порядка, составленная изъ его коэфиціентовъ, то говорятъ, что данное уравненіе рѣшается *алгебраически.*

§ 230. Предположимъ, что несократимое уравненіе.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (28)$$

рѣшается алгебраически. Пусть:

$$\begin{aligned} z_1^{p_1} &= f_0(a_0, a_1, \dots, a_n) \\ z_2^{p_2} &= f_1(z_1, a_0, a_1 \dots) \\ z_3^{p_3} &= f_2(z_2, z_1, a_0, a_1 \dots) \\ &\dots\dots \\ z_i^{p_i} &= f_{i-1}(z_{i-1}, z_{i-2}, \dots, z_2, z_1, a_0, a_1 \dots) \end{aligned} \qquad (29)$$

будетъ схема, которая ведетъ корню уравненія (28):

$$x_1 = u_0 + u_1 z_i + u_2 z_i^2 + \dots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \qquad (30)$$

гдѣ $u_0, u_1, \dots, u_{p_i-1}$ суть цѣлыя функціи отъ $z_{i-1}, z_{i-2}, \dots, z_2, z_1$ и раціональныя въ коэфиціентахъ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Можно всегда положить $u_1 = 1$ (§ 238).

Возвышая въ степени x_1 и понижая степени съ помощью уравненія:

$$z_i^{p_i} = f_{i-1}$$

найдемъ вообще:

$$x_1^r = v_0 + v_1 z_i + v_2 z_i^2 + \dots + v_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \qquad (30')$$

Подставляя въ уравненіе (28) вмѣсто $x_1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^n$, ихъ выраженія (30′) найдемъ:

$$f(x_1) = H_0 + H_1 z_i + H_2 z_i^2 + \dots + H_{p_i-1} z_i^{p_i-1} = 0 \qquad (31)$$

Это уравненіе должно быть совмѣстно съ уравненіемъ опредѣленія (29):

$$z_i^{p_i} - f_{i-1} = 0 \tag{32}$$

Изъ совмѣстности этихъ двухъ уравненій можетъ случиться, что z_i есть раціональность изъ области $(z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots, z_2, z_1, u_0, u_1, \ldots)$ или что (пред. 3):

$$H_0 = 0, \ H_1 = 0, \ H_2 = 0, \ \ldots, H_{p_i-1} = 0 \tag{32'}$$

Оба эти случая возможны, въ первомъ случаѣ въ схемѣ, которая ведетъ къ x_1 выбрасывается уравненіе:

$$z_i^{p_i} = f_{i-1}(z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots)$$

и принимаются въ область раціональности корни $\alpha_i, \alpha_i^2, \ldots$

Примѣръ. Какъ примѣръ для перваго случая имѣемъ кубическое уравненіе:

$$f(x) = x^3 - 3a_1 x - 3a_2 = 0 \tag{33}$$

которому удовлетворяетъ радикальная функція:

$$x_1 = \sqrt[3]{a_2 + \sqrt{a_2^2 - a_1^3}} + \sqrt[3]{a_2 - \sqrt{a_2^2 - a_1^3}}$$

схема образованія этой функціи есть:

$$z_1^2 = a_2^2 - a_1^3$$
$$z_2^3 = a_2 + z_1$$
$$z_3^3 = a_2 - z_1$$
$$x_1 = z_2 + z_3$$

въ силу этой схемы уравненіе (33) сдѣлается:

$$\tfrac{1}{3} f(x_1) = - a_1 z_2 + (z_2^2 - a_1) z_3 + z_2 z_3^2 = 0 \tag{34}$$

которое должно быть совмѣстно съ:

$$z^3{}_3 - (a_2 - z_1) = 0$$

опредѣляя z_3 изъ этихъ двухъ уравненій найдемъ:

$$z_3 = \frac{a_1(a_2 - z_1) - a^2{}_1 z_2 + (a_2 - z_1) z^2{}_2}{a^3{}_1 + (a_2 + z_1) z_2 - a_1 z^3{}_2}$$

откуда видимъ, что z_3 находится въ области раціональностей (z_2, z_1, a_1, a_2).

Изъ выраженія для z_3 удалимъ радикалъ z_2 изъ знаменателя (§ 225) съ помощью слѣдующихъ уравненій:

$$[a_1^2+(a_2+z_2)z_2\alpha-a_1z_2^2\alpha^2][a_1^2+(a_2+z_2)z_2\alpha^2-a_1z_2^2\alpha]=2a_2(a_2+z_1)(a_1+z_2^2)$$

$$[a_1^2+(a_2+z_2)z_2-a_1z_2^2][2a_2(a_2+z_1)(a_1+z_2^2)]=[2a_2(a_2+z_1)]^2$$

$$[a_1(a_2+z_1)-a_1^2z_2+(a_2-z_1)z_2^2][2a_2(a_2+z_1)(a_1+z_2^2)]=4a_1a_2^2(a_2+z_1)z_2^2$$

гдѣ α есть корень уравненія $x^3-1=0$. Въ силу этихъ выраженій z_3 сдѣлается:

$$z_3=\frac{4a_1a_2^2(a_2+z_1)z_2^2}{4a_2^2(a_2+z_1)^2}=\frac{a_1z_2^2}{a_2+z_1}$$

умножая числителя и знаменателя этого выраженія на a_2-z_1, найдемъ:

$$z_3=\frac{a_2-z_1}{a_1^2}\cdot z_2^2$$

откуда:

$$x_1=z_2+\frac{a_2-z_1}{a_1^2}\cdot z_2^2$$

§ 231. Разсмотримъ второй случай, когда z_i не будетъ раціональность области $(z_{i-1}, z_{i-1}, \ldots, z_2, z_1, \ldots, a_0, a_1, \ldots)$ Въ этомъ случаѣ въ выраженіи:

$$f(x_1)=H_0+H_1z_i+H_2z_i^2+\ .\ .\ .\ .+H_{p_i-1}z^{p_i-1}$$

необходимо:

$$H_0=0\ \ ,\ \ H_1=0\ \ ,\ \ H_2=0\ \ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ \ H_{p_i-1}=0 \tag{35}$$

Составимъ выраженіе, подставляя въ (30) $z_i\alpha_i^{\lambda-1}$ вмѣсто z_i:

$$x_\lambda=u_0+u_1z_i\alpha_i^{\lambda-1}+u_2z_i^2\alpha_i^{2(\lambda-1)}+\ .\ .\ .+u_{p_i-1}z_i^{p_i-1}\alpha_i^{(p_i-1)(\lambda-1)}$$

то въ силу (30') и (31) будемъ имѣть:

$$x_\lambda^r=v_0+v_1z_i\alpha_i^{\lambda-1}+v_2z_i^2\alpha_i^{2(\lambda-1)}+\ .\ .\ .+v_{p_i-1}z_i^{p_i-1}\alpha_i^{(p_i-1)(\lambda-1)} \tag{36}$$

и

$$f(x_\lambda)=H_0+H_1z_i\alpha_i^{\lambda-1}+H_2z_i^2\alpha_i^{2(\lambda-1)}+\ .\ .\ .+H_{p_i-1}z_i^{p_i-1}\alpha_i^{(p_i-1)(\lambda-1)}$$

Въ силу (32') и это выраженіе равно нулю т. е. x_λ, для всѣхъ значеній $\lambda=1, 2, 3,\ldots, p_i$, есть также корень уравненія $f(x)=0$.

Примѣръ. Въ предъидущемъ примѣрѣ:

$$f(x) = x^3 - 3a_1 x - 2a_2 = 0$$

первый корень есть:

$$x_1 = z_2 + \frac{a_2 - z_1}{a^2_1} z^2_2$$

слѣдовательно и

$$x_2 = z_2\alpha + \frac{a_2 - z_1}{a^2_1} z^2_2 \alpha^2 \quad , \quad x_3 = z_2\alpha^2 + \frac{a_2 - z_1}{a^2_1} z^2_2 \alpha$$

будутъ корни того же уравненія.

§ 232. Если въ (36) сдѣлаемъ $u_1 = 1$ и положимъ послѣдовательно $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, p_i$, то найдемъ слѣдующія выраженія для $x_1, x_2, \ldots, x_{p_i}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_0 + z_i + u_2 z_i^2 + u_3 z_i^3 + \ldots\ldots + u_{p_i-2} z_i^{p_i-1} \\ x_2 &= u_0 + z_i\alpha_i + u_2 z_i^2 \alpha_i^2 + u_3 z_i^3 \alpha_i^3 + \ldots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \alpha_i^{p_i-1} \qquad (37) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p_i} &= u_0 + z_i\alpha_i^{p_i-1} + u_2 z_i^2 \alpha_i^{2(p_i-1)} + \ldots\ldots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \alpha_i^{p_i(p_i-1)} \end{aligned}$$

Изъ этихъ уравненій, помножая каждое x_λ на $\alpha_i^{-\lambda+1}$ и складывая, найдемъ (§ 220, 32):

$$z_i = \frac{1}{p_i} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_i} x_\lambda \alpha_i^{-\lambda+1} \qquad (37)$$

Откуда видимъ, что радикалъ z_i есть раціональная, цѣлая и притомъ линейная функція корней $x_1, x_2, \ldots, x_{p_i}$, если $\alpha_i, \alpha_i^2, \ldots$ включимъ въ область раціональностей.

§ 233. Возьмемъ теперь выраженіе:

$$y - \left(\frac{1}{p_i} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_i} x_\lambda \alpha_i^{-\lambda+1} \right)^{p_i} \qquad (38)$$

и въ немъ сдѣлаемъ всѣ перестановленія всѣхъ корней уравненія $f(x)=0$. Произведеніе всѣхъ, полученныхъ выраженій, будетъ симметрическая функція корней уравненія $f(x)=0$, и слѣдовательно будетъ цѣлая относительно y, у котораго коэфиціенты будутъ раціональныя функціи количествъ $a_0, a_1, \ldots, a_n$,

Означимъ эту функцію чрезъ $\varphi(y)$, уравненіе:

$$\varphi(y) = 0 \tag{39}$$

будетъ имѣть раціональные коэфиціенты и одинъ изъ его корней будетъ очевидно:

$$y_1 = \left(\frac{1}{p_i}\sum_{\lambda=1}^{x=p_i} x_\lambda \alpha_i^{-\lambda+1}\right)^{p_i} = z_i^{p_i} = f_{i-1}(z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots, z_2, z_1, a_0, a_1, \ldots)$$

$$= L_0 + z_{i-1} + L_2 z_{i-1}^2 + \ldots + L_{p_{i-1}-1} z_{i-1}^{p_{i-1}-1} \tag{40}$$

Если съ уравненіемъ $\varphi(y) = 0$ и съ его корнемъ поступимъ такъ, какъ поступили съ уравненіемъ $f(x) = 0$ и его корнемъ x_1 въ § 231 и § 232, когда рядъ $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$, такъ приготавленъ, что z_{i-1} не выражается раціонально чрезъ предъидущіе z, то найдемъ:

$$z_{i-1} = \frac{1}{p_{i-1}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p_i-1} y_\lambda \alpha_{i-1}^{-\lambda+1} \tag{41}$$

каждое изъ y_λ происходитъ изъ y_1 перестановленіемъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Слѣдовательно, z_{i-1} есть цѣлая раціональная функція корней уравненія $f(x) = 0$, если только будемъ принимать α_i^μ и α_{i-1}^μ за раціональные количества. Продолжая подобный процессъ придемъ къ слѣдующему предложенію:

Предложеніе 4. Алгебраическая функція:

$$x_1 = u_0 + z_i + u_2 z_i^2 + \ldots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \tag{42}$$

удовлетворяющая уравненію $f(x) = 0$ представляется, какъ раціональная функція ряда количествъ:

$$z_1 \;,\; z_2 \;,\; \ldots \;,\; z_{i-1} \;,\; z_i$$

въ которой коэфиціенты суть раціональныя функціи количествъ $a_0, a_1, \ldots$, сами же количества $z_1, z_2, \ldots$, суть цѣлыя функціи корней уравненія $f(x) = 0$ и количествъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i$ и опредѣляются цѣпью уравненій:

$$z_r^{p_r} = f_{r-1}(z_{r-1}, z_{r-2}, \ldots, z_2, z_1, a_0, a_1, \ldots)$$

въ которыхъ $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$, суть простыя числа, а $f_0, f_1, \ldots, f_i$ суть

цѣлыя функціи количествъ заключенныхъ въ скобки и раціональные относительно $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

§ 234. Возьмемъ корень:

$$x_1 = u_0 + z_i + u_2 z_i^2 + \ldots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \tag{42}$$

и внесемъ въ область раціональныхъ количествъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$, значеніе которыхъ дано въ § 224, положимъ, что схема, ведущая къ корню x_1, возможно упрощена такъ, что ни одно z_r не содержится въ области раціональностей $(z_{r-1}, z_{r-2}, \ldots, z_r, z_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Подставляя въ (42) вмѣсто z_i произведеніе $z_i\alpha_i^{\lambda-1}$ и давая λ всѣ значенія отъ $\lambda = 1$ до $\lambda = p_1$ выраженіе (42) дастъ, каждый разъ, корень уравненія $f(x) = 0$. Обобщимъ это предложеніе.

Предложеніе 5. Если въ схемѣ (29), ведущей къ корню x_1 уравненія $f(x) = 0$, умножимъ одинъ изъ радикаловъ, напримѣръ, z_r на α_r^μ, т. е. возьмемъ какое-нибудь другое его значеніе, то вообще чрезъ это измѣнятся и радикалы $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_{i-1}, z_i$. Пусть новыя значенія этихъ радикаловъ будутъ $\eta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_{i-1}, \eta_i$. Подставляя эти значенія въ выраженіе корня x_1 (42) вмѣсто $z_r, z_{r+1}, \ldots, z_{i-1}, z_i$, получимъ выраженіе, которое будетъ опять корнемъ уравненія $f(x) = 0$.

Доказательство. Положимъ, что $f(x)$ есть несократимая функція въ области $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Составимъ произведеніе:

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=p_i}(x - x_\lambda) = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=p_i}\left(x - u_0 - z_i\alpha_i^{\lambda-1} - u_2 z_i^2 z_i^{2(\lambda-1)} - \ldots - u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \alpha_i^{(p_i-1)(\lambda-1)}\right) \tag{43}$$

Изъ этого произведенія, очевидно, исчезнетъ радикалъ z_i и α_i, съ которымъ могутъ исчезнуть и радикалы $z_{i-1}, z_{i-2} \ldots$ до z_a $(a \leqq i-1)$. Положимъ:

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=1}(x - x_\lambda) = f_a(x, z_a, z_{a-i}, \ldots) = h_0 + h_1 z_a + h_2 z_a^2 + \ldots \tag{44}$$

коэфиціенты $h_0, h_1 \ldots$ Составимъ опять произведеніе:

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=p_a} f_a(x, z_a, z_{a-1}, \ldots) = f_b(x, z_b, z_{b-1}, \ldots) = k_0 + k_1 z_b + k_2 z_b^2 + \ldots \tag{45}$$

изъ этого произведенія исчезъ радикалъ z_a, съ которымъ могутъ исчезнуть

и низшіе до z_b ($b \overline{\leq} a-1$). Точно также будемъ имѣть:

$$\mathrm{P}_{\lambda=1}^{\lambda=p_b} f_b(x, z_b, z_{b-1}, \ldots) = f_c(x, z_c, z_{c-1}, \ldots) = m_0 + m_1 z_c + m_2 z_c^2 + \ldots \quad (46)$$

и, наконецъ, подобный процессъ приведетъ къ

$$\mathrm{P}_{\lambda=1}^{\lambda=p_d} f_c(x, z_c, z_{c-1}, \ldots) = f_d(x, a_0, a_1, \ldots) \quad (47)$$

гдѣ f_d есть раціональная функція количествъ $a_0, a_1, \ldots, a_n$, если за z_c исчезли и всѣ остальные радикалы $z_{c-1}, \ldots, z_2, z_1$.

Положимъ теперь, а докажемъ это ниже, что функціи:

$$\left.\begin{array}{llll} f_a(x, z_a, z_{a-1}, \ldots) & \text{несократима въ области} & (z_a, z_{a-1}, \ldots, z_1) \\ f_b(x, z_b, z_{b-1}, \ldots) & \quad\text{"} \quad\quad \text{"} \quad\quad \text{"} & (z_b, z_{b-1}, \ldots, z_1) \\ f_c(x, z_c, z_{c-1}, \ldots) & \quad\text{"} \quad\quad \text{"} \quad\quad \text{"} & (z_c, z_{c-1}, \ldots, z_1) \\ f_d(x, z_d, z_{d-1}, \ldots) & \quad\text{"} \quad\quad \text{"} \quad\quad \text{"} & (a_0, a_1, a_2, \ldots) \end{array}\right\} \quad (48)$$

Откуда видимъ, что несократимыя въ области $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, уравненія $f(x) = 0$ и $f_d(x, a_0, a_1, \ldots) = 0$ имѣютъ общій корень x_1, такъ какъ онъ, очевидно, входитъ множителемъ въ обѣ предъидущія функціи, слѣдовательно (§ 226) онѣ тождественны:

$$f(x) \equiv f_d(x, a_0, a_1, \ldots)$$

Дадимъ теперь радикалу z_1 одно изъ его значеній согласно уравненію:

$$z_1^{p_1} = f_0(a_0, a_1, \ldots)$$

пусть это значеніе будетъ η_1, въ силу этого z_2 получитъ значеніе η_2 согласно уравненію:

$$z_2^{p_2} = f_1(\eta_1, a_0, a_2, \ldots)$$

такимъ образомъ продолжая, будемъ имѣть схему:

$$\begin{array}{l} \eta_1^{p_1} = f_0(a_0, a_1, \ldots) \\ \eta_2^{p_2} = f_1(\eta_1, a_0, a_1, \ldots) \\ \eta_3^{p_3} = f_2(\eta_2, \eta_1, a_0, a_1, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_i^{p_i} = f_{i-1}(\eta_{i-1}, \eta_{i-2}, \ldots, \eta_2, \eta_1, a_0, a_1, \ldots) \end{array} \quad (49)$$

и

$$\zeta = v_0 + v_1\eta_i + v_2\eta_i^2 + \ldots + v_{p_i-1}\eta_i^{p_i-1} \qquad (50)$$

это выраженіе происходитъ изъ (42), замѣщая u_r на v_r.

Составимъ произведеніе:

$$\mathrm{P}_{\lambda=1}^{\lambda=p_i}\left(x - v_0 - v_1\eta_i\alpha_i^{\lambda-1} - v_2\eta_i^2\alpha_i^{2(\lambda-1)} - \ldots - v_{p_i-1}\eta_i^{p_i-1}\alpha_i^{(p_i-1)(\lambda-1)}\right) \qquad (51)$$

вычисленіе будетъ подобно предъидущему съ тою разницей, что вмѣсто u и z постановлено v и η, слѣдовательно это произведеніе будетъ:

$$f_a(x\,,\ \eta_a\,,\ \eta_{a-1}\,,\ldots)$$

точно также найдемъ:

$$\mathrm{P}_{\lambda=1}^{\lambda=p_a} f_a(x\,,\eta_a\,,\eta_{a-1}\,,\ldots) = f_b(x\,,\eta_b\,,\eta_{b-1}\,,\ldots)$$

$$\mathrm{P}_{\lambda=1}^{\lambda=p_b} f_b(x\,,\eta_b\,,\eta_{b-1}\,,\ldots) = f_c(x\,,\eta_c\,,\eta_{c-1}\,,\ldots) \qquad (52)$$

$$\mathrm{P}_{\lambda=1}^{\lambda=p_c} f_c(x, \eta_c\,, \eta_{c-1}\,,\ldots) = f_d(x, a_0\,, a_1\,,\ldots) = f(x)$$

Откуда видимъ, что ζ есть корень уравненія $f(x) = 0$. Изъ этого заключаемъ, что всѣ значенія радикальной функціи $x_1(42)$, которыя она получаетъ, давая всѣ значенія каждому изъ радикаловъ ее составляющихъ, суть корни уравненія $f(x) = 0$.

Докажемъ теперь несократимость функцій $f_a(x), f_b(x), \ldots$ въ областяхъ $(z_a\,, z_{a-1}\,, \ldots;\ z_a\,, z_{b-1}\,, \ldots) \ldots$, на основаніи которой было доказано предъидущее предложеніе.

Для этого положимъ, что функція $f_a(x)$ несократима въ области $(z_a\,, z_{a-1}\,, \ldots)$ и въ этомъ предположеніи докажемъ несократимость функціи $f_b(x)$, въ области $(z_a\,, z_{b-1}\,, \ldots)$, оттуда нисходя, заключимъ о несократимости $f_c(x)\,, \ldots$, до $f_d(x)$.

Пусть функція $f_b(x)$, въ предположеніи несократимости $f_a(x)$, будетъ сократима и ея несократимый множитель пусть будетъ $\varphi(x,\ z_a\,,\ldots)$, который долженъ быть такъ выбранъ, чтобы содержалъ множителемъ $f_a(x, z_a, \ldots)$.

Слѣдовательно, въ области $(z_a, z_{a-1}, ..)$ будетъ имѣть мѣсто уравненіе:

$$\varphi(x_1 z_b, \ldots) = f_a(x, z_a \ldots). \psi(x, z_a, \ldots) = 0 \tag{53}$$

которому можно дать форму:

$$t_0 + t_1 z_a + t_2 z_a^2 + \ldots + t_{p_a-1} z_a^{p_a-1} = 0 \tag{54}$$

$t_0, t_1 \ldots$ суть раціональныя функціи количествъ $z_{a-1}, z_{a-2}, \ldots$ Вмѣстѣ съ этимъ имѣемъ:

$$z_a^{p_a} = f_{a-1}(z_{a-1}, z_{a-2}, \ldots) = 0 \tag{55}$$

откуда заключаемъ (§ 227), что или z_a есть раціональная функціи количествъ $z_{a-1}, \ldots$, что должно быть исключено, или что уравненіе (54) удовлетворяется, замѣщая z_a его значеніями $z_a \alpha_a, z_a \alpha_a^2, \ldots$ Съ другой стороны $f_a(x, z_a \alpha_a^\lambda, \ldots)$ не равно $f_a(x, z_a \alpha_a^\mu, \ldots)$, въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства слѣдовало бы уравненіе:

$$\varepsilon_1(\alpha_a^\lambda - \alpha_a^\mu) z_a + \varepsilon_2(\alpha_a^{2\lambda} - \alpha_a^{2\mu}) z_a^2 + \ldots = 0$$

откуда, въ силу уравненія (55), z_a будетъ количество раціональное въ области $(z_{a-1}, \ldots, a_0, a_1, \ldots)$, такъ какъ λ не равно μ.

Слѣдовательно $f_a(x, z_a, \ldots)$, $f_a(x, z\alpha_a, \ldots)$, ... отличны отъ $\varphi(x, z_b, \ldots)$ не равны между собою и несократимы въ области $(z_a, z_{a-1}, \ldots)$, откуда заключаемъ, что $\varphi(x, z_a, \ldots)$ содержитъ ихъ произведеніе, а въ силу степеней функцій f_a и f_b относительно x, это возможно только тогда, когда φ совпадетъ съ f_b.

§ 235. Изъ сказаннаго выше заключаемъ, что уравненіе $f_0(x) = 0$ имѣетъ p_i корней уравненія $f(x) = 0$, уравненіе $f_b(x) = 0$ имѣетъ ихъ $p_i p_a$, уравненіе $f_c(x) = 0$ имѣетъ ихъ $p_i p_a p_b$ и т. д. Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 6. Если алгебраическое выраженіе:

$$x = u_0 + z_i + u_2 z_i^2 + \ldots + u_{p_i-1} z_i^{p_i-1} \tag{56}$$

есть корень несократимаго уравненія $f(x) = 0$, въ области раціональности $a_0, a_1, \ldots, a_n$, и если удалимъ одни за другими всѣ радикалы, содержащіеся въ (56), какъ было показано въ § 234, то дойдемъ до уравненія $f(x) = 0$, коего степень n будетъ:

$$n = p_i p_a p_b \ldots \tag{57}$$

При послѣдовательномъ удаленіи радикаловъ получаемыя функціи f_a, f_b, f_c.... несократимы въ областяхъ $(z_a, z_{a-1}....)$, $(z_b, z_{b-1},...)$,....

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что предложеніе (5) будетъ имѣть мѣсто и при сократимости функцій $f(x)$.

Изъ предъидущаго предложенія вытекаетъ еще слѣдующее:

Предложеніе 7. Если несократимое уравненіе $f(x)=0$, простой степени p, рѣшается алгебраически, то въ выраженіи его корня степень внѣшняго радикала будетъ p, а другихъ внѣшнихъ радикаловъ не будетъ.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, выше было показано, что:

$$n = p_i p_a p_b ....$$

но когда $n=p$, то это не иначе можетъ быть какъ только при условіи $p_i=p$, $p_a=1$, $p_b=1$,... т. е. всѣ другіе радикалы исчезнутъ изъ произведенія (43).

Слѣдовательно, если выраженіе:

$$x = u_0 + z + u_2z^2 + u_3z^3 + \ . \ . \ . + u_{p-1}z^{p-1} \tag{58}$$

гдѣ p есть число простое, есть корень несократимаго уравненія:

$$f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ . \ . \ . + a_{p-1}x + a_p = 0$$

въ области раціональныхъ количествъ a_0, a,..., a_p, то:

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=p} (x - u_0 - z\alpha^{\lambda-1} - u_2z^2\alpha^{2(\lambda-1)} - \ . \ . \ . - u_{p-1}z^{p-1}\alpha^{(p-1)(\lambda-1)}) \tag{59}$$

Предложеніе 8. Если въ выраженіи x_1 или въ одной изъ функцій f_a, f_b, f_c,... будутъ находиться другіе внѣшніе радикалы, то ихъ показатели степеней всѣ будутъ множителями степени n даннаго уравненія, коего корень есть x_1.

Примѣръ. Квадратное уравненіе:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \tag{60}$$

если оно удовлетворяется радикальной функціей, форма ея должна быть:

$$a_0x = u_0 + z \tag{61}$$

гдѣ:

$$z^2 = f_0 \tag{62}$$

u_0 и f_0 суть раціональныя функціи коэфиціентовъ a_0, a_1, a_2.

Примѣръ 2. Кубическое уравненіе:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \tag{63}$$

если оно удовлетворяется радикальной функціей, форма ея должна быть:

$$a_0x = u_0 + z + u_2z^2 \tag{64}$$

гдѣ:

$$z^3 = f_1$$

u_0, u_2, f_1 суть радикальныя функціи названнаго порядка, не заключающіе другихъ внѣшнихъ радикаловъ.

ГЛАВА XVI.

Алгебраическое рѣшеніе уравненій.

§ 236. Перейдемъ къ рѣшенію уравненій первыхъ четырехъ степеней, это единственныя уравненія, которыя, независимо отъ какой бы то ни было связи между коэфиціентами, рѣшаются алгебраически, т. е. для каждаго изъ нихъ существуетъ такая радикальная функція, которой всѣ значенія удовлетворяютъ уравненію. Существуетъ безчисленное множество уравненій, которыя рѣшаются алгебраически, но ихъ коэфиціенты, или, что тоже корни, связаны извѣстными условіями, эти условія или связь между корнями уравненій 2-й, 3-й и 4-й степеней существуютъ также, но не есть нѣчто случайное, а заключается въ сущности самыхъ уравненій. При рѣшеніи уравненій 2-й и 3-й степени мы укажемъ на эту связь, которая существуетъ и въ двучленныхъ уравненіяхъ. Уравненія, рѣшающіяся алгебраически извѣстны въ анализѣ одни подъ именемъ уравненій *Абеля*, а другія подъ именемъ уравненій *Галуа* (Galois). О нихъ мы скажемъ впослѣдствіи.

Рѣшеніе квадратнаго уравненія.

§ 237. *Способъ 1.* Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \tag{1}$$

Если существуетъ радикальная функція, удовлетворяющая этому уравненію,

то ея внѣшній радикалъ z будетъ второй степени (§ 235), т. е.

$$z^2 = f_0 \qquad (2)$$

f_0 есть раціональная функція коэфиціентовъ a_0, a_1, a_2, слѣдовательно форма корня уравненія (1) должна быть:

$$a_0x = u_0 + z$$

z имѣетъ два значенія $+z$ и $-z$. Подставляя это выраженіе въ уравненіе (1), найдемъ, располагая по степенямъ радикала z и соображаясь съ (2):

$$u_0^2 + 2a_1u_0 + a_0a_2 + f_0 + 2(u_0+a_1)z = 0$$

откуда (§ 231):

$$u_0 + a_1 = 0 \quad \text{и} \quad u_0^2 + 2a_1u_0 + a_0a_2 + f_0 = 0$$

изъ этихъ уравненій находимъ:

$$u_0 = -a_1 \quad , \quad f_0 = a^2{}_1 - a_0a_2 = -H$$

Слѣдовательно, искомая радикальная функція будетъ:

$$ax_0 = -a_1 + \sqrt{-H}$$

а оба корня:

$$a_0x_1 = -a_1 + \sqrt{-H} \quad , \quad a_0x_2 = -a_1 - \sqrt{-H}$$

Зависимость между корнями x_1 и x_2, о которой упомянули выше, есть:

$$a_0(x_1+x_2) = -a_1 \quad \text{или} \quad a_0x_1x_2 = a_2$$

изъ нихъ видимъ, что корень x_1 выражается чрезъ корень x_2 такъ, какъ x_2 чрезъ x_1, это въ силу этой зависимости квадратное уравненіе рѣшается алгебраически. Это зависимость не случайная, а присущая квадратному уравненію.

Способъ 2. Напишемъ уравненіе:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0$$

въ формѣ:

$$a_0^2x^2 + 2a_0a_1x + a^2{}_1 - a^2{}_1 + a_0a_2 = 0$$

или:

$$(a_0x+a_1)^2 - \left(\sqrt{-H}\right)^2 = 0$$

Это уравненіе, какъ разность квадратовъ разлагается на два линейные множителя:

$$\{(a_0x+a_1)+\sqrt{-H}\}\{(a_0x+a_1)-\sqrt{-H}\}$$

откуда:

$$(a_0c+a_1)+\sqrt{-H}=0 \quad \text{и} \quad (a_0x+a_1)-\sqrt{-H}=0$$

слѣдовательно:

$$a_0x_1=-a_1-\sqrt{-H} \quad , \quad a_0x_2=-a_1+\sqrt{-H}$$

Способъ 3. Мы выше видѣли, что:

$$a_0^2(x_1-x_2)^2=-4H$$

откуда:

$$a_0(x_1-x_2)=\pm 2\sqrt{-H}$$

но мы имѣемъ еще зависимость:

$$a_0(x_1-x_2)=-2a_1$$

Изъ этихъ двухъ послѣднихъ уравненій найдемъ тѣ же выраженія для корней даннаго квадратнаго уравненія.

Рѣшеніе кубическаго уравненія.

§ 238. *Способъ 1.* Пусть данное кубическое уравненіе будетъ:

$$u_3=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \qquad (3)$$

Если это уравненіе рѣшается въ радикалахъ, т. е. если существуетъ такая радикальная функція, составленная изъ коэфиціентовъ a_0, a_1, a_2, a_3, которая будучи подставлена вмѣсто x въ предъидущее уравненіе обращаетъ его въ нуль, то внѣшній радикалъ этой функціи будетъ третьей степени (§ 235); слѣдовательно эта функція должна имѣть форму:

$$a_0x=u_0+z+uz^2 \qquad (4)$$

гдѣ $z^3=f_1$, f_1 есть радикальная функція низшаго порядка, составленная изъ коэфиціентовъ a_0, a_1, a_2, a_3; а u_0 и u суть или радикальныя функціи тѣхъ же количествъ и того же порядка, но относительно другаго радикала 3-ей степени, или низшихъ порядковъ.

Если одинъ изъ корней уравненія (3) имѣетъ форму (4), то всѣ три корня будутъ (§ 234, слѣд.):

$$a_0x_1 = u_0 + z + uz^2$$
$$a_0x_2 = u_0 + \alpha z + \alpha^2 uz^2 \tag{5}$$
$$a_0x_3 = u_0 + \alpha^2 z + \alpha uz^2$$

коэфиціентъ у z мы положили равнымъ единицѣ на основаніи § 228, α есть мнимый корень кубическаго уравненія $x^3-1=0$.

Если сложимъ уравненіе (5) и замѣтимъ что $1+\alpha+\alpha^2=0$ то найдемъ:

$$a_0(x_1+x_2+x_3) = 3A_0 = -3a_1$$

слѣдовательно:

$$u_0 = -a_1 \tag{6}$$

изъ этого видимъ, что u_0 есть раціональная функція коэфиціентовъ уравненія (3). Помножимъ тѣ же уравненія (5) послѣдовательно на 1, α^2, α и сложимъ, то найдемъ:

$$3z = a_0(x_1 + \alpha^2 r_2 + \alpha x_3) = 3\sqrt[3]{f_1} \tag{7}$$

откуда:

$$z = \sqrt[3]{f_1} = \frac{a_0(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3)}{3} \tag{8}$$

слѣдователъно, радикалъ z или $\sqrt{f_1}$ есть раціональная функція корней x_1, x_2, x_3 и α, α^2.

Помножимъ уравненія (5) послѣдовательно на 1, α, α^2 и сложимъ, то найдемъ:

$$uz^2 = \frac{a_0(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)}{3} \tag{9}$$

Чтобы опредѣлить радикальныя функціи u и z или функцію f_1, подставимъ въ уравненіе (3) радикальное выраженіе корня:

$$a_0x = -a_1 + z + uz^2$$

и результатъ подстановленія расположимъ по степенямъ радикала z, то найдемъ:

$$H_0 + H_1 z + H_2 z^2 = 0 \tag{10}$$

а для этого необходимо имѣть (§ 231):

$$H_0=0 \quad , \quad H_1=0 \quad , \quad H_2=0 \tag{11}$$

Послѣ всѣхъ сокращеній для приведенія уравненія (1) къ тождеству (10), найдемъ:

$$H_1=H_2=uz^3-(a^2{}_1-a_0a_2)=0$$

или:

$$uz^3+H=0 \tag{12}$$

откуда:

$$uz^3=-H \tag{13}$$

Если въ уравненіе $H_0=0$ подставимъ вмѣсто z^3 его выраженіе изъ (13), то послѣ всѣхъ приведеній найдемъ для опредѣленія u слѣдующее квадратное уравненіе:

$$H^2u^2+Gu-H=0 \tag{14}$$

гдѣ H и G извѣстныя выраженія (§ 53):

$$H=a_0a_2-a_1^2 \quad , \quad G=2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_3$$

Если въ уравненіе (14) вмѣсто u вставимъ его выраженіе чрезъ z изъ (13), то уравненіе (14) сдѣлается:

$$z^6+Gz^3-H^3=0 \tag{15}$$

Изъ уравненія (14) опредѣляется радикальная функція u, и затѣмъ изъ (13) и радикалъ z. Уравненіе (14) называется *разрѣшающимъ*, такъ какъ имъ опредѣляются всѣ искомыя величины. Рѣшая квадратное уравненіе (14), найдемъ:

$$u=\frac{-G\pm\sqrt{G^2+4H^3}}{2H^2}=\frac{-G\pm a_0\sqrt{\Delta_3}}{2H^2} \tag{16}$$

гдѣ $a_0^2\Delta_3=G^2+4H^3$ (§ 147, 10). Легко видѣть изъ этого же уравненія, что:

$$\frac{1}{u}=\frac{G\pm\sqrt{G^2+4H^3}}{2H}=\frac{G\pm a_0\sqrt{\Delta_3}}{2H} \tag{17}$$

Соображаясь съ (13), найдемъ:

$$z^3=-\tfrac{1}{2}(G\pm a_0\sqrt{\Delta_3})=f_1 \tag{18}$$

откуда:

$$z=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G\pm a_0\sqrt{\Delta_3})} \tag{19}$$

Соображаясь съ формулами (5), (6) и (13), найдемъ выраженія для всѣхъ трехъ корней уравненія:

$$\begin{aligned} a_0x_1 &= -a_1 + z + \frac{uz^3}{z} = -a_1 + z + \frac{-H}{z} \\ a_0x_2 &= -a_1 + \alpha z + \frac{uz^3}{\alpha z} = -a_1 + \alpha z + \frac{-H}{\alpha z} \\ a^0x_3 &= -a_1 + \alpha^2 z + \frac{uz^3}{\alpha^2 z} = -a_1 + \alpha^2 z + \frac{-H}{\alpha^2 z} \end{aligned} \qquad (20)$$

или:

$$\begin{aligned} a_0x_1 + a_1 &= z + \frac{-H}{z} \\ a_0x_2 + a_1 &= \alpha z + \frac{-H}{\alpha z} \\ a_0x_3 + a_1 &= \alpha^2 z + \frac{-H}{\alpha^2 z} \end{aligned} \qquad (21)$$

Если корни уравненія (14) означимъ чрезъ u_1, u_2, а соотвѣтствующія значенія z чрезъ z_1, z_2, то будемъ имѣть:

$$u_1z^3{}_1 = -H \quad \text{и} \quad u_2z^3{}_2 = -H \qquad (22)$$

откуда:

$$u_1u_2z^3{}_1z^3{}_2 = H$$

Но изъ уравненія (14) имѣемъ:

$$u_1u_2 = -\frac{1}{H} \qquad (23)$$

слѣдовательно:

$$z^3{}_1z^3{}_2 = -H^3 \qquad (24)$$

откуда:

$$z_1z_2 = -H \quad , \quad z_1z_2 = -\alpha H \quad , \quad z_1z_2 = -\alpha^2 H \qquad (25)$$

Легко видѣть, что выраженія:

$$\begin{aligned} a_0x_1 + a_1 &= z_1 + \frac{-H}{z_1} \quad , \quad a_0x_1 + a_1 = z_2 + \frac{-H}{z_2} \\ a_0x_2 + a_1 &= \alpha z_1 + \frac{-H}{\alpha z_1} \quad , \quad a_0x_2 + a_1 = \alpha z_2 + \frac{-H}{\alpha z_2} \\ a_0x_3 + a_1 &= \alpha^2 z_1 + \frac{-H}{\alpha^2 z_1} \quad , \quad a_0x_3 + a_1 = \alpha^2 z_2 + \frac{-H}{\alpha^2 z_2} \end{aligned} \qquad (26)$$

въ силу зависимостей (25) тождественны, т. е. z_1 и z_2 даютъ для x_1, x_2, x_3 однѣ и тѣ же значенія, слѣдовательно можно вообще писать эти выраженія въ формѣ (21).

Выраженіе (18) даетъ составъ радикальной функціи f_1, какъ видимъ, 1-го порядка и вмѣстѣ даетъ составъ радикала z (19).

Радикалъ $\sqrt{\Delta_3}$ какъ извѣстно выражается раціональною функціей корней x_1, x_2, x_3 уравненія (3).

Соображаясь съ зависимостью (25) формулы (26) можемъ написать въ формѣ:

$$\begin{aligned} a_0x_1 + a_1 &= z_1 + z_2 \\ a_2x_2 + a_1 &= \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 \\ a_0x_3 + a_1 &= \alpha^2 z_1 + \alpha z_2 \end{aligned} \qquad (27)$$

гдѣ:

$$z_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{\Delta_3})} \quad , \quad z_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{\Delta_3})} \qquad (28)$$

Формулы (27) въ формѣ:

$$\begin{aligned} a_0x_1 + a_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{\Delta_3})} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{\Delta_3})} \\ a_0x_2 + a_1 &= \alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{\Delta_3})} + \alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{\Delta_3})} \\ a_0x_3 + a_1 &= \alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{\Delta_3})} + \alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{\Delta_3})} \end{aligned} \qquad (29)$$

извѣстны подъ именемъ *Кардановыхъ*.

Если уравненія (27) сложимъ, то найдемъ:

$$a_0 \sum x_1 + 3a_1 = 0$$

откуда видимъ, что корни уравненія (§ 54, (20)):

$$z^3 + 3Hz + G = 0 \qquad (30)$$

полученнаго преобразованіемъ $a_0x + a_1 = z$ изъ уравненія (3) будутъ вторыя части уравненій (27). На основаніи такой формы корней, уравненіе безъ втораго члена:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (31)$$

рѣшается положеніемъ:

$$x = z_1 + z_2 \qquad (32)$$

Таково рѣшеніе кубическаго уравненія съ помощью свойствъ радикальныхъ функцій. Какъ видимъ, корни его выражаются радикальной функціей 2-го порядка, въ составъ которой входитъ призначная Δ_3, единственная неизмѣнная кубической формы. Сейчасъ увидимъ, что отъ трехъ функцій H, G и Δ_3 зависятъ свойства корней кубическаго уравненія.

§ 239. Мы видѣли выше (§ 147, пр. 4), что уравненіе коего корни суть квадраты разностей корней кубическаго уравненія (3), есть:

$$a_0^6x^3+18a_0^4Hx^2+81a_0^2H^2x+27(G^2+4H^3)=0 \tag{33}$$

или:

$$a_0^4x^3+18a_0^2Hx^2+81H^2x+27\Delta_3=0 \tag{34}$$

или еще:

$$x(a_0^2x+9H)^2+27\Delta_3=0 \tag{35}$$

корни этого уравненія суть:

$$(x_1-x_2)^2 \quad , \quad (x_1-x_3)^2 \quad , \quad (x_2-x_3)^2$$

На основаніи этого уравненія можно судить о корняхъ уравненія (3).

Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе (34) имѣетъ отрицательные корни, то данное кубическое (3) должно имѣть мнимые корни, такъ какъ только квадратъ разности мнимыхъ сопряженныхъ корней можетъ дать отрицательное количество. Если же уравненіе (34) не имѣетъ отрицательныхъ корней, то кубическое уравненіе (3) не можетъ имѣть мнимыхъ корней, слѣдовательно всѣ его корни будутъ дѣйствительные.

Вотъ какіе случаи могутъ представиться:

Случай 1. Призначная:

$$a_0^2\Delta_3=G^2+4H^3$$

есть величина отрицательная, т. е.:

$$G^2+4H^3<0$$

а для этого необходимо чтобы H также была величина отрицательная, а при этомъ условіи въ уравненіи (34) знаки будутъ идти поперемѣнно: $+ - +$, а при такомъ условіи всѣ корни въ уравненіи (34) будутъ положительные, а слѣдовательно, корни кубическаго уравненія (3) будутъ всѣ дѣйствительные.

Случай 2. Призначная Δ_3 есть величина положительная, а при такомъ условіи уравненіе (34) должно имѣть одинъ отрицательный корень,

а слѣдовательно кубическое уравненіе (3) должно имѣть два мнимыхъ корня.

Случай 3. Признчная $\Delta_3 = 0$, въ этомъ случаѣ уравненіе (34) имѣетъ одинъ корень равный нулю, слѣдовательно кубическое уравненіе будетъ имѣть два равные корня.

Случай 4. Признчная $\Delta_3 = 0$, но при условіи:

$$G = 0 \quad \text{и} \quad H = 0 \tag{36}$$

въ этомъ случаѣ всѣ три корня уравненія (34) равны нулю, а слѣдовательно кубическое уравненіе имѣетъ всѣ три корня равные.

Условія (36) можно выразить въ формѣ, какъ легко видѣть:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} \tag{37}$$

§ 240. Прежде чѣмъ изложить второй способъ рѣшенія кубическаго уравненія, займемся свойствами его корней въ связи съ корнями 1, α, α^2, двучленнаго кубическаго уравненія:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \tag{38}$$

будутъ x_1, x_2, x_3; изъ этихъ корней и изъ корней 1, α, α^2 составимъ слѣдующія функціи:

$$\begin{aligned} L &= x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 \quad , \quad M = x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 \\ L_1 &= x_2x_3 + \alpha x_3x_1 + \alpha^2 x_1x_2 \quad , \quad M_1 = x_2x_3 + \alpha^2 x_3x_1 + \alpha x_1x_2 \end{aligned} \tag{39}$$

которыя будемъ постоянно обозначать символами: L, M; L_1, M_1. Легко видѣть, что M и L суть функціи разностей корней кубическаго уравненія (38). Въ самомъ дѣлѣ, подстановленіе вмѣсто x_1, x_2, x_3 суммъ x_1+h, x_2+h, x_3+h не измѣняетъ функцій M и L:

$$x_1+h+\alpha x_2+\alpha h+\alpha^2x_3+\alpha^2h = x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3+(1+\alpha+\alpha^2)h = x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3$$

замѣчая что $1+\alpha+\alpha^2 = 0$.

Такъ какъ 1, α, α^2 суть корни уравненія:

$$x^3 - 1 = 0 \tag{40}$$

то имѣемъ:

$$x^3-1 \equiv (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2) \equiv (x-1)(\alpha x-\alpha^2)(\alpha^2x-\alpha) \tag{41}$$

Если вмѣсто x подставимъ отношеніе двухъ какихъ-нибудь функцій $U:V$, то найдемъ:

$$U^3-V^3\equiv(U-V)(U-\alpha V)(U-\alpha^2V)\equiv(U-V)(\alpha U-\alpha^2V)(\alpha^2U-\alpha V) \quad (42)$$

Если въ тождествѣ (41) подставимъ вмѣсто x величину $-x$, то найдемъ:

$$x^3+1\equiv(x+1)(x+\alpha)(x+\alpha^2)\equiv(x+1)(\alpha x+\alpha^2)(\alpha^2x+\alpha) \quad (43)$$

откуда подставляя вмѣсто x отношеніе $U:V$, найдемъ:

$$U^3+V^3\equiv(U+V)(U+\alpha V)(U+\alpha^2V)\equiv(U+V)(\alpha U+\alpha^2V)(\alpha^2U+\alpha V) \quad (44)$$

Легко видѣть, что:

$$\begin{aligned} L+\ M&\equiv 2x_1-x_2-x_3\\ L+\ \alpha M&\equiv 2x_2-x_1-x_3\\ L+\alpha^2M&\equiv 2x_3-x_1-x_2 \end{aligned} \quad (45)$$

и

$$\begin{aligned} L-M&\equiv(x_2-x_3)(\alpha-\alpha^2)\\ \alpha^2L-\alpha M&\equiv(x_3-x_1)(\alpha-\alpha^2)\\ \alpha L-\alpha^2M&\equiv(x_1-x_2)(\alpha-\alpha^2) \end{aligned} \quad (46)$$

Если перемножимъ уравненія (45), то сообразуясь съ (44), найдемъ (§ 53) выраженіе:

$$L^3+M^3=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)=$$
$$=-27\,\frac{(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)}{a_0^3}=-\frac{27\,G}{a_0^3} \quad (47)$$

или:

$$a_0^3(L^3+M^3)=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)=$$
$$=-27\,(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)=-27G \quad (48)$$

Перемножая (46) и помня, что $\alpha-\alpha^2=\sqrt{-3}$, найдемъ:

$$L^3-M^3=-3\sqrt{-3}\,(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2) \quad (49)$$

Возвышая въ квадратъ, получимъ:

$$(L^3-M^3)^2=-27(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2$$

сообразуясь съ (§ 147, пр. 4), найдемъ:

$$a_0^6(L^3-M^3)^2=+27(G^2+4H^3)=+27a_0^2\Delta_3$$

или:

$$a_0^4(L^3-M^3)^2 = 27\,\Delta_3 \tag{50}$$

Перемножая первыя два изъ уравненій (39), легко найти, что:

$$LM = \frac{9(a_1^2-a_0a_1)}{a_0^2} = -\frac{9H}{a_0^2} \tag{51}$$

Задача 1. Доказать слѣдующія тождества:

$$L^3+M^3=\tfrac{1}{3}\{(2x_1-x_2-x_3)^3+(2x_2-x_1-x_3)^3+(2x_3-x_1-x_2)^3\} \tag{52}$$

и

$$L^3-M^3=\sqrt{-3}\,\{(x_2-x_3)^3+(x_3-x_1)^3+(x_1-x_2)^3\} \tag{53}$$

Задача 2. Составить уравненіе, коего корнями были-бы функціи L^3 и M^3?

Рѣшеніе. Если положимъ:

$$t_1 = L^3 \quad , \quad t_2 = M^3$$

то будемъ имѣть (48 и 54):

$$t_1+t_2 = -\frac{27G}{a_0^3} \quad , \quad t_1t_2 = -\frac{9^3H^3}{a_0^6}$$

откуда искомое уравненіе будетъ:

$$t^2 + \frac{27G}{a_0^3}t - 9^3\frac{H^3}{a_0^6} = 0$$

или:

$$a_0^6t^2 + 27a_0^3Gt - 9^3H^3 = 0 \tag{54}$$

полагая въ этомъ уравненіи $a_0^3t = 27z^3$, оно сдѣлается:

$$z^6 + Gz^3 - H^3 = 0 \tag{55}$$

а это послѣднее есть разрѣшающее (15).

Уравненіе (55) есть квадратное относительно t или L^3 и M^3 и шестой степени относительно L и M, слѣдовательно, функція $L^3=(x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3)^3$ при перемѣщеніи корней x_1, x_2, x_3 получаетъ только два значенія L^3 и M^3, а функція L получаетъ шесть значеній:

$$L \quad , \quad \alpha L \quad , \quad \alpha^2 L \quad ; \quad M \quad , \quad \alpha M \quad , \quad \alpha^2 M \tag{56}$$

Очевидно:

$$L^3 = (\alpha L)^3 = (\alpha^2 L)^3 \quad , \quad M^3 = (\alpha M)^3 = (\alpha^2 M)^3$$

Задача 3. Найти выраженія L^2, M^2 въ функціи корней x_1, x_2, x_3?

Вычитая тождество:

$$(x_1^2 + x_2^2 + {}_3^2)(1 + \alpha + \alpha^2) \equiv 0$$

изъ каждаго выраженія:

$$(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^2 \quad , \quad (x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3)^2$$

найдемъ:

$$\begin{aligned} -L^2 &= (x_2 - x_3)^2 + \alpha^2(x_3 - x_1)^2 + \alpha(x_1 - x_2)^2 \\ -M^2 &= (x_2 - x_3)^2 + \alpha(x_3 - x_1)^2 + \alpha^2(x_1 - x_2)^2 \end{aligned} \tag{58}$$

Точно также найдемъ:

$$\begin{aligned} -L^4 = {} & (x_2 - x_3)^2(2x_1 - x_2 - x_3)^2 + \alpha(x_3 - x_1)^2(2x_2 - x_1 - x_3)^2 + \\ & + \alpha^2(x_1 - x_2)^2(2x_3 - x_1 - x_2)^2 \\ -M^4 = {} & (x_2 - x_3)^2(2x_1 - x_2 - x_3)^2 + \alpha^2(x_3 - x_1)^2(2x_2 - x_1 - x_3)^2 + \\ & + \alpha(x_1 - x_2)^2(2x_3 - x_1 - x_2)^2 \end{aligned} \tag{59}$$

Также не трудно найти:

$$2LM = (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 = -18\frac{H}{a_0^2} \tag{60}$$

$$L^2M^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2 \tag{61}$$

Задача 4. Составить уравненіе, коего корни были-бы квадраты разностей корней кубическаго уравненія (38), а коэфиціенты — функціи количествъ L и M.

Рѣшеніе. Пусть $z = (x_1 - x_2)^2$, то изъ предъидущаго будемъ имѣть, соображаясь съ (58) и (61):

$$\sqrt{-3z} = \alpha L - \alpha^2 M$$

откуда:

$$\alpha\sqrt{-3z} = \alpha^2 L - M \quad , \quad \alpha^2\sqrt{-3z} = L - \alpha M$$

перемножая эти три умноженія, будемъ имѣть:

$$\sqrt{-27z^3} = L^3 - M^3 - 3\alpha LM(L-\alpha M)$$

но $L - \alpha M = (1-\alpha)(x_1 - x_2)$, слѣдовательно:

$$\sqrt{-27z^3} = L^3 - M^3 - 3\alpha(1-\alpha)(x_1 - x_2)LM$$

или:

$$\sqrt{-27z^3} = L^3 - M^3 - 3\sqrt{-3}\,.\sqrt{z}\,.LM$$

откуда:

$$z(z-LM)^2 + \frac{(L^3-M^3)^2}{27} = 0 \qquad (62)$$

Если въ это уравненіе подставимъ вмѣсто LM и $L^3 - M^3$ ихъ значенія (50) и (54), то найдемъ (35):

$$z\left(z + \frac{9H}{a_0^2}\right)^2 + \frac{\Delta_3}{a_0^4} = 0 \qquad (63)$$

§ 241. Въ кубической формѣ соизмѣнная можетъ быть получена гораздо проще слѣдующимъ образомъ: въ симметрическую функцію разностей корней кубическаго уравненія подставляютъ выраженія:

$$x_2x_3 + x_1x \quad , \quad x_1x_3 + x_2x \quad , \quad x_1x_2 + x_3x$$

вмѣсто $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$. — Въ самомъ дѣлѣ, $x_1 - x_2$ преобразуется для полученія соизмѣнной въ § 187:

$$\frac{1}{x_1 - x} - \frac{1}{x_2 - x}$$

а это выраженіе можно написать въ формѣ:

$$\frac{1}{x_1 - x} - \frac{1}{x_2 - x} = \frac{-(x_2x_3 + x_1x) + (x_1x_3 + x_2x)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$$

послѣ удаленія знаменателя въ этой формѣ мы будемъ имѣть указанное выше преобразованіе. Приложимъ этотъ способъ къ отысканію соизмѣнныхъ кубической формы.

Мы выше видѣли (§ 240):

$$a_0(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_2) = 9(a^2{}_1 - a_0a_2) \qquad (64)$$

преобразовывая обѣ части этого уравненія какъ было сказано выше, найдемъ:

$$a_0^2\{(x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3)x+x_2x_3+\alpha x_1x_3+\alpha^2x_1x_2\}\{(x_1+\alpha^2x_2+\alpha x_3)x+$$

$$+x_2x_3+\alpha^2x_1x_3+\alpha x_1x_2\}=9(U_2^2-U_1U_2) \quad (65)$$

полагая (39):

$$L_1=x_2x_3+\alpha x_1x_3+\alpha^2x_1x_2 \quad , \quad M_1=x_2x_3+\alpha^2x_1x_3+\alpha x_1x_2 \quad (66)$$

будемъ имѣть:

$$a_0^2(Lx+L_1)(Mx+M_1)\equiv 9(U_2^2-U_1U_3) \quad (67)$$

вторая часть есть гессевская кубической формы (§ 190). Изъ этого тождества видимъ что:

$$Lx+L_1 \quad \text{и} \quad Mx+M_1 \quad (68)$$

суть множители гессевской:

$$H_{3,x}=(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_3)x+(a_1a_3-a_2^2) \quad (69)$$

или:

$$H_{3,x}=Hx^2+2H_1x+H_2 \quad (70)$$

§ 242. Мы выше видѣли (48), что:

$$a_0^3(L^3+M^3)=-27G \quad (71)$$

или:

$$a_0^3\{(x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3)^3+(x_1+\alpha^2x_2+\alpha x_3)^3\}=-27(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)$$

дѣлая преобразованіе для полученія соизмѣнной, какъ сказано выше, найдемъ:

$$a_0^3\{(Lx+L_1)^3+(Mx+M_1)^3\}=-27(U_0U_3^2-3U_1U_2U_3+U_2^3)=-27G_{3,x} \quad (72)$$

соизмѣнная, которой источникъ есть функція G (§ 190) и которую мы нашли выше. Слѣдовательно, множители соизмѣнной $G_{3,x}$ суть:

$$(Lx+L_1)+(Mx+M_1) \quad , \quad (Lx+L_1)+\alpha(Mx+M_1) \quad , \quad (Lx+L_1)+\alpha^2(Mx+M_1)$$

или:

$$(L+M)x+L_1+M_1 \quad , \quad (L+\alpha M)x+(L_1+\alpha M_1) \quad , \quad (L+\alpha^2M)x+(L_1+\alpha^2M_1)$$

ихъ можно еще получить, замѣчая, что множители функціи G суть:

$$x_2+x_3-2x_1 \quad , \quad x_3+x_1-2x_2 \quad , \quad x_1+x_2-2x_3$$

слѣдовательно, множители соизмѣнной $G_{3,x}$ будутъ:

$$\frac{1}{x_2-x}+\frac{1}{x_3-x}-\frac{2}{x_1-x}\,,\ \frac{1}{x_3-x}+\frac{1}{x_1-x}-\frac{2}{x_2-x}\,,\ \frac{1}{x_1-x}+\frac{1}{x_2-x}-\frac{2}{x_3-x}$$

по удаленіи общаго множителя.

$G_{3.x}$ имѣетъ слѣдующее геометрическое значеніе. Если возьмемъ три точки A, B, C опредѣленныя уравненіемъ $U_3=0$ и три точки A_1, B_1, C_1 построенныя слѣдующимъ образомъ: A_1 есть сопряженная гармоническая точки A относительно B и C; B_1 сопряженная гармоническая точки B относительно A и C; и C_1 сопряженная гармоническая точки C относительно A и B, то эти три точки опредѣляются соизмѣнной $G_{3,x}=0$.

§ 243. Съ помощью множителей (68) гессевской (69) можно кубическое уравненіе представить въ формѣ разности двухъ кубовъ.

Мы выше нашли (49), что:

$$L^3-M^3=\sqrt{-27}\,(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)$$

дѣлая преобразованіе, какое сдѣлано для полученія (67), найдемъ:

$$(Lx+L_1)^3-(Mx+M_1)^3=\sqrt{-27}(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

откуда, замѣчая что:

$$(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2=\frac{-27(G^2+4H_3)}{a_0^6}\ ,\ (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=\frac{U_3}{a_0}$$

найдемъ:

$$(Lx+L_1)^3-(Mx+M_1)^3=27\,\frac{U_3}{a_0^4}\sqrt{G^2+4H^3}=27\,\frac{U_3\sqrt{\Delta_3}}{a_0^3} \qquad (73)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что кубическая форма есть разность кубовъ выраженій, которыя суть множители (68) гессевской соизмѣнной.

§ 244. Между кубической формой и ея соизмѣнными $H_{3,x}$ и $G_{3,x}$ существуетъ слѣдующая зависимость:

$$G_{3.x}^2+4H_{3.x}^3=\Delta_3U_3 \qquad (74)$$

Въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ:

$$a_0^6(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2=-27(G^2+4H^3)=-27a_0^2\Delta_3$$

преобразуя это уравненіе, какъ выше, найдемъ:

$$a_0^6(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2(x-x_1)^2(x-x_2(^2(x-x_3)^2=-27(G_{3,x}^2+4H_{3,x}^3)$$

откуда имѣемъ:

$$\Delta_3 U_3=G_{3,x}^2+4H_{3,x}^3$$

§ 245. *Способъ 2.* Пусть данное кубическое уравненіе будетъ:

$$U_3=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \tag{75}$$

Полагая $z=a_0x+a_1$ это уравненіе преобразуется въ

$$z^3+3Hz+G=0 \tag{76}$$

Положимъ:

$$z^3+3Hz+G=\frac{1}{\mu-\nu}\left\{\mu(z+\nu)^3-\nu(z+\mu)^3\right\} \tag{77}$$

требуется опредѣлитель μ и ν. Развернувъ вторую часть этого уравненія, найдемъ:

$$z^3+3Hz+G=z^3-3\mu\nu z-\mu\nu(\mu+\nu)$$

сравнивая коэфиціенты, будемъ имѣть:

$$\mu\nu=-H \quad , \quad \mu\nu(\mu+\nu)=-G$$

откуда:

$$\mu+\nu=\frac{G}{H} \quad , \quad \mu-\nu=\frac{a^0\sqrt{\Delta_3}}{H} \tag{78}$$

слѣдовательно:

$$\mu=\frac{G+a_0\sqrt{\Delta_3}}{2H} \quad , \quad \nu=\frac{G-a_0\sqrt{\Delta_3}}{2H} \tag{79}$$

подставляя эти значенія въ (77) и замѣщая $z=a_0x+a_1$, найдемъ:

$$\begin{aligned} a_0^3U_3=&\left(\frac{G+a_0\sqrt{\Delta_3}}{2\sqrt{\Delta_3}}\right)\left(a_0x+a_1+\frac{G-a_0\sqrt{\Delta_3}}{2H}\right)^3- \\ &-\left(\frac{G-a_0\sqrt{\Delta_3}}{2\sqrt{\Delta_3}}\right)\left(a_0x+a_1+\frac{G+a_0\sqrt{\Delta_3}}{2H}\right) \end{aligned} \tag{80}$$

таково выраженіе кубической формы (75) какъ разность кубовъ.

Легко видѣть, что:

$$(z+\mu)(z+\nu)=z^2+\frac{G}{H}z-H \tag{81}$$

или:

$$(a_0x+a_1+\mu)(a_0x+a_1+\nu)=(a_0x+a_1)^2+\frac{G}{H}(a_0x+a_1)-H=$$

$$=\frac{a_0^2}{H}\left\{(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)x+(a_1a_3-a_2^2)\right\} \tag{82}$$

откуда видимъ, что выраженія, коихъ разность кубовъ представляетъ кубическую форму, суть множители гессевской соизмѣнной.

Настоящее рѣшеніе непосредственно вытекаетъ изъ формулъ (67) и (73), изъ которыхъ видно, что множители гессевской соизмѣнной суть тѣ выраженія, коихъ разность кубовъ тождественна съ данной кубической формой (75).

§ 246. *Способъ 3.* Мы выше нашли (72) и (73):

$$\alpha_0^3\left\{(Lx+L_1)^3+(Mx+M_1)^3\right\}=-27G_{3,x} \tag{83}$$

$$\alpha_0^3\left\{(Lx+L_1)^3-(Mx+M_1)^3\right\}=27\sqrt{\Delta_3}\,.\,U_3 \tag{84}$$

откуда найдемъ:

$$a_0^3(Lx+L_1)^3=27(U_3\sqrt{\Delta_3}-G_{3,x})$$

$$-a_0^3(Mx+M_1)^3=27(U_3\sqrt{\Delta_3}+G_{3,x})$$

извлекая кубическій корень, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}a_0(Lx+L_1)&=3\sqrt[3]{U_3\sqrt{\Delta_3}-G_{3,x}}\\ -a_0(Mx+M_1)&=3\sqrt[3]{U_3\sqrt{\Delta_3}+G_{3,x}}\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Но изъ уравненій (84) видно, что:

$$(Lx+L_1)-(Mx+M_1)$$

есть одинъ изъ линейныхъ множителей формы U_3, слѣдовательно изъ (85) этотъ множитель есть:

$$\sqrt[3]{U_3\sqrt{\Delta_3}+G_{3,x}}+\sqrt[3]{U_3\sqrt{\Delta_3}-G_{3,x}}$$

другіе множители, очевидно будутъ:

$$\begin{aligned} &\alpha \sqrt[3]{U_2\sqrt{\Delta_3}-G_{3,x}}+\alpha^2 \sqrt[3]{U_3\sqrt{\Delta_3}-G_{3,x}} \\ &\alpha^2 \sqrt[3]{U_3\sqrt{\Delta_3}-G_{3,x}}+\alpha \sqrt[3]{U_3\sqrt{\Delta_3}-G_{3,x}} \end{aligned} \qquad (86)$$

Этотъ способъ принадлежитъ англійскому математику Келе (Cayley).

§ 247. *Способъ 4.* Выше мы видѣли (§ 240), что функціи:

$$t_1=L^3=(x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3)^3 \quad , \quad t_2=M^3=(x_1+\alpha^2 x_2+\alpha x_3)^3 \qquad (87)$$

имѣютъ только два значенія при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ корней x_1, x_2, x_3 кубическаго уравненія (75) и эти два значенія суть корни квадратнаго уравненія (55):

$$a_0^6 t^2+3^3.a_0^3 G.t-3^6_0.H^3=0 \qquad (88)$$

которое называется *разрѣшающимъ*. Изъ него найдемъ:

$$t_1=L^3=\frac{27}{a_0^3}\left\{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})\right\} \quad , \quad t_2=M^3=\frac{27}{a_0^3}\left\{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})\right\}$$

откуда:

$$L=\frac{3}{a_0}\left\{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})\right\}^{\frac{1}{3}} \quad , \quad M=\frac{3}{a_0}\left\{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})\right\}^{\frac{1}{3}}$$

или:

$$x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3=\frac{3}{a_0}\left\{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$x_1+\alpha^2 x_2+\alpha x_3=\frac{3}{a_0}\left\{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})\right\}^{\frac{1}{3}}$$

присовокупляя къ этимъ уравненіямъ уравненіе:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{3a_1}{a_0}$$

найдемъ изъ нихъ уже выше найденныя формулы Кардана (27) и (30).

§ 248. Легко видѣть изъ формы гессевской соизмѣнной:

$$(a_0 a_2-a_1^2)x^2+(a_0 a_3-a_1 a_2)x+(a_1 a_3-a_2^2)=0$$

что условіе равенства ея корней есть:

$$4(a_0 a_2-a_1^2)(a_1 a_3-a_2^2)-(a_0 a_3-a_1 a_2)^2=-\Delta_3=0$$

но это есть и условіе равенства двухъ корней въ кубическомъ уравненіи (§ 239), слѣдовательно, если кубическое уравненіе имѣетъ два равные корня, то гессевская имѣетъ равные корни и обратно.

Изъ зависимости (37) видимъ, что всѣ коэфиціенты у гессевской кубической формы равны нулю если кубическое уравненіе есть полный кубъ, т. е. если имѣетъ всѣ три корня равные.

§ 249. *Проэктивная зависимость между корнями кубическаго уравненія.* Если x_1, x_2, x_3 суть корни кубическаго уравненія (75), то (§ 145):

$$a_0^2\{(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2+(x_1-x_2)^2\}=18(a_1^2-a_0a_2)=-18H$$

$$a_0^2\{x_1(x_2-x_3)^2+x_2(x_3-x_1)^2+x_3(x_1-x_2)^2\}=9(a_0a_3-a_1a_2)=18H_1$$

$$a_0^2\{x_1^2(x_2-x_3)^2+x_2^2(x_3-x_1)^2+x_3^2(x_1-x_2)^2\}=18(a_2^2-a_1a_3)=-18H_2$$

умножимъ предъидущія уравненія послѣдовательно на x_1x_2, $-(x_1+x_2)$, 1 и сложимъ, то, такъ какъ:

$$x_1^2-x_1(x_1+x_2)+x_1x_2=0\quad,\quad x_2^2-x_2(x_1+x_2)+x_1x_2=0$$

будемъ имѣть:

$$a_0^2(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)^2=18\{Hx_1x_2+H_1(x_1+x_2)+H_2\}$$

но

$$a_0^4(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2=-27\Delta_3=108(HH_2-H_1^2)$$

откуда:

$$\pm\sqrt{-\frac{\Delta_3}{3}}\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)=Hx_1x_2+H_1(x_1+x_2)+H_2$$

слѣдовательно:

$$Hx_1x_2+\left(H_1+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta_3}{3}}\right)x_1+\left(H_1-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta_3}{3}}\right)x_2+H_2=0$$

это есть проэктивная зависимость между корнями и коэфиціентами кубическаго уравненія.

Опредѣляя изъ предъидущаго уравненія x_2, найдемъ:

$$x_2=-\frac{\left(H_1+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta_3}{3}}\right)x_1+H_2}{\left(Hx_1+H_1-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta_3}{3}}\right)}$$

или:

$$x_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta_3}{3}} + H_1\right)x_1 + H_2}{-Hx_1 + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta_3}{3}} - H_1}$$

Это выраженіе можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$x_2 = \frac{(\sqrt{-3\Delta_3} + 6H_1)x_1 + 6H_2}{-6Hr_1 + (\sqrt{-3\Delta_3} - 6H_1)}$$

Легко видѣть, что опредѣлитель этого линейнаго преобразованія есть $-12\Delta_3$. Этого опредѣлителя можно сдѣлать равнымъ единицѣ, если всѣ коэфиціенты предъидущаго преобразованія раздѣлимъ на $2\sqrt{-3\Delta_3}$, вслѣдствіе чего предъидущая формула приметъ видъ:

$$x_2 = \frac{\left(\frac{\sqrt{-3\Delta_3} + 6H_1}{2\sqrt{-3\Delta_3}}\right)x_1 + \frac{6H_2}{2\sqrt{-3\Delta_3}}}{-\frac{6H}{2\sqrt{-3\Delta_3}}x_1 + \frac{\sqrt{-2\Delta_3} - 6H_2}{2\sqrt{-3\Delta_3}}}$$

Давая радикалу входящему въ предъидущее выраженіе другой знакъ, мы будемъ, очевидно, имѣть третій корень x_3. Назовемъ въ предъидущей формулѣ коэфиціенты чрезъ α_1, β_1, α_2, β_2, то она приметъ видъ:

$$x_2 = \frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\alpha_2 x_1 + \beta_2} = \varphi(x_1) \qquad (89)$$

гдѣ легко видѣть:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \beta_2 = 1$$

Но при измѣненіи знака радикала имѣемъ:

$$x_3 = \frac{\beta_2 x_1 - \beta_1}{-\alpha_2 x_1 + \alpha_1} \qquad (90)$$

Откуда видимъ, что если:

$$\varphi(x_1) = \frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\alpha_2 x_1 + \beta_2}$$

то:

$$\varphi^2(x_1) = \frac{\beta_2 x_1 - \beta_1}{-\alpha_2 x_1 + \alpha_1} = x_3$$

Замѣчая что (89) и (90) суть обратныя функціи, найдемъ:

$$\varphi^3(x_1) = x_1 = \varphi(x_3)$$

Слѣдовательно корни кубическаго уравненія могутъ быть представлены въ формѣ:

$$x_1 \quad , \quad \varphi(x_1) \quad , \quad \varphi^2(x_1)$$

Это та зависимость между корнями кубическаго уравненія, о которой было упомянуто въ началѣ главы.

Этимъ и закончимъ изслѣдованіе кубическихъ уравненій; приведемъ нѣсколько примѣровъ.

§ 250. *Примѣръ 1.* Разложить выраженіе:

$$f(x) = (x_2-x_3)^2(x-x_1)^2+(x_3-x_1)^2(x-x_2)^2+(x_1-x_2)^2(x-x_3)^2$$

Положимъ:

$$U=(x_2-x_3)(x-x_1) \quad , \quad V=(x_3-x_1)(x-x_2) \quad , \quad W=(x_1-x_2)(x-x_2)$$

легко видѣть что:

$$f(x) = \tfrac{2}{3}(U+\alpha V+\alpha^2 W)(U+\alpha^2 V+\alpha W)$$

Примѣръ 2. Показать, что уравненія системы:

$$(x_2-x_3)^3(x-x_1)^3 = (x_3-x_1)^3(x-x_2)^3 = (x_1-x_2)^3(x-x_3)^3$$

имѣютъ двухъ общихъ множителей. Въ силу предъидущаго обозначенія имѣемъ:

$$U^3 = V^3 = W^3$$

откуда:

$$U^3-V^3 = (U-V)(U^2+UV+V^2) = \tfrac{1}{2}(U-V)(U^2+V^2+W^2)$$

но:

$$U+V+W=0$$

слѣдовательно:

$$(x_2-x_3)^2(x-x_1)^2+(x_3-x_1)^2(x-x_2)^2+(x_1-x_2)^2(x-x_3)^2$$

есть искомый квадратный общій множитель.

Примѣръ 3. Разложить выраженіе:

$$(x_2-x_3)^3(x-x_1)^3+(x_3-x_1)^3(x-x_2)^3+(x_1-x_2)^3(x-x_3)^3$$

на множители.

Отвѣтъ.

$$3(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Примѣръ 4. Представить выраженіе:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

въ формѣ разности двухъ кубовъ.

Положимъ:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = U_1^3 - V_1^3$$

откуда:

$$\lambda(x-x_1) = (U_1-V_1) \ , \ \mu(x-x_2) = (\alpha U_1-\alpha^2 V_1) \ , \ \nu(x-x_3) = (\alpha^2 U_1-\alpha V_1)$$

складывая эти уравненія, найдемъ:

$$\lambda+\mu+\nu=0 \quad , \quad \lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3=0$$

откуда:

$$\lambda=\rho(x_2-x_3) \quad , \quad \mu=\rho(x_3-x_1) \quad , \quad \nu=\rho(x_1-x_2)$$

но $\lambda\mu\nu=1$, слѣдовательно:

$$\frac{1}{\rho^3}=(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)$$

Подставляя эти выраженія для λ, μ, ν и употребляя обозначенія пр. 1, найдемъ:

$$U_1-V_1=\rho U \quad , \quad \alpha U_1-\alpha^2 V_1=\rho V \quad , \quad \alpha^2 U_1-\alpha V_1=\rho W$$

откуда:

$$3U_1=\rho(U+\alpha^2 V+\alpha W)$$

$$-3V_1=\rho(U+\alpha U+\alpha^2 W)$$

такимъ образомъ U_1 и V_1 вполнѣ опредѣлены.

Примѣръ 5. Составить уравненіе, коего корни были-бы шесть значеній функціи:

$$t=x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3$$

если x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3 суть корни кубическихъ уравненій:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \quad , \quad b_0x^3+2b_1x^2+3b_2x+b_3=0$$

Рѣшимъ сначала эту задачу относительно уравненій:

$$z^2+3Hz+G=0 \quad , \quad z^2+3H'z+G'=0$$

а потомъ перейдемъ къ общимъ уравненіямъ. Для этихъ уравненій функція t будетъ:

$$t_0=(a_0x+a_1)(b_0x'+b_1)+(a_0x_2+a_1)(b_0x'_2+b_1)+(a_0x_3+a_1)(b_0x'_3+b_1)=$$
$$=a_0b_0t-3a_1b_1$$

подставляя вмѣсто a_0x+a_1, $b_0x'_1+b_1$.... ихъ значенія (27) въ радикалахъ:

$$z'_1+z'_2 \quad , \quad \alpha z'_1+\alpha^2z'_2 \quad , \quad \alpha^2z'_1+\alpha z'_2$$

$$z_1+z_2 \quad , \quad \alpha z_1+\alpha^2z_2 \quad , \quad \alpha^2z_1+\alpha z_2$$

найдемъ:

$$t_0=\left(\sqrt[3]{p_1}+\sqrt[3]{p_2}\right)\left(\sqrt[3]{p'_1}+\sqrt[3]{p'_2}\right)+$$
$$+\left(\alpha\sqrt[3]{p_1}+\alpha^2\sqrt[3]{p_2}\right)\left(\alpha\sqrt[3]{p'_1}+\alpha^2\sqrt[3]{p'_2}\right)+\left(\alpha^2\sqrt[3]{p_1}+\alpha\sqrt[3]{p_2}\right)\left(\alpha^2\sqrt[3]{p'_1}+\alpha\sqrt[3]{p'_2}\right)$$

гдѣ:

$$\sqrt[3]{p_1}=z_1 \quad , \quad \sqrt[3]{p_2}=z_2 \quad , \quad \sqrt[3]{p'_1}=z'_1 \quad , \quad \sqrt[3]{p'_2}=z'_2$$

выраженіе t_0 послѣ приведеній сдѣлается:

$$t_0=3\left(\sqrt[3]{p_1p'_2}+\sqrt[3]{p_2p'_1}\right)$$

возвышая въ кубъ найдемъ:

$$t_0^3-27\sqrt[3]{p_1p_2p'_1p'_2}\,.\,t_0-27(p_1p'_2+p_2p'_1)=0$$

подставляя вмѣсто p_1, p_2, p'_1, p'_2 выраженія данныя уравненіями:

$$x^2+Gx-H^3=0 \quad , \quad x^2+G'x-H'^3=0$$

будемъ имѣть два кубическія уравненія:

$$t_0^3-27HH't_0-\frac{27}{2}\left(GG'\pm a_0b_0\sqrt{\Delta_3\Delta'_3}\right)=0$$

которыя даютъ шесть значеній функціи t_0, гдѣ:

$$a_0\Delta_3 = G^2 + 4H^3 \quad , \quad b^0\Delta'_3 = G'^2 + 4H'^3$$

Наконецъ подставляя вмѣсто t_0 его значеніе $a_0b_0t - 3a_1b_1$ и перемножая эти кубическія уравненія, найдемъ наконецъ искомое уравненіе 6-й степени. Замѣтимъ, что если одно изъ данныхъ кубическихъ уравненій будетъ $x^3 - 1 = 0$, то $t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3$.

Примѣръ 6. Составить уравненіе корнями коего были-бы значенія функціи:

$$\rho = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$$

Изъ этого уравненія имѣемъ:

$$x_1 - (1+\rho)x_2 + \rho x_3 = 0$$

подставляя вмѣсто x_1, x_2, x_3 ихъ выраженія чрезъ p_1 и p_2 и полагая:

$$\lambda = 1 - (1+\rho)\alpha + \rho\alpha^2 \quad , \quad \mu = 1 - (1+\rho)\alpha^2 + \rho\alpha$$

найдемъ:

$$\lambda\sqrt[3]{p_1} + \mu\sqrt[3]{p_2} = 0$$

возвышая въ кубъ и подставляя вмѣсто p_1 и p_2 ихъ значенія:

$$p_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{\Delta_3})} \quad , \quad p_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{\Delta_3})}$$

найдемъ:

$$G(\lambda^3+\mu^3) + a_0\sqrt{\Delta_3}\,(\lambda^3-\mu^3) = 0$$

возвышая въ квадратъ имѣемъ:

$$a_0^2\Delta_3\lambda^3\mu^3 = H^3(\lambda^3+\mu^3)^2$$

а изъ предъидущихъ выраженій λ и μ имѣемъ:

$$\lambda\mu = 3(1+\rho+\rho^2) \quad , \quad \lambda^3 + \mu^3 = -27\rho(1+\rho)$$

подставляя эти выраженія найдемъ искомое уравненіе:

$$a_0\Delta_3(1+\rho+\rho^2)^3 - 27H^3(\rho+\rho^2)^2 = 0$$

Примѣръ 7. Какая зависимость существуетъ между коэфиціентами уравненій:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \quad , \quad b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3 = 0$$

если ихъ корни связаны уравненіемъ:

$$x_1(x'_2 - x'_3) + x_2(x'_3 - x'_1) + x_3(x'_1 - x'_2) = 0$$

гдѣ x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3 корни данныхъ уравненій.

Умножая на $\alpha - \alpha^2$ это уравненіе, оно сдѣлается:

$$LM' = L'M$$

возвышая въ кубъ и вводя коэфиціенты, найдемъ искомую зависимость:

$$G^2H'^3 = G'^2H^3$$

Примѣръ 8. Найти условіе въ корняхъ и коэфиціентахъ, при которомъ кубическія уравненія:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \quad , \quad b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3 = 0$$

преобразованіемъ:

$$x' = px + q$$

дѣлаются тождественными?

Въ этомъ случаѣ:

$$x'_1 = px_1 + q \quad , \quad x'_2 = px_2 + q \quad , \quad x'_3 = px_3 + q$$

исключая p и q найдемъ (пр. 7):

$$x_2x'_3 - x'_2x_3 + x_3x'_1 - x'_3x_1 + x_1x'_2 - x'_1x_2 = 0$$

Это выраженіе не измѣняется, если вмѣсто x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3 поставимъ:

$$lx_1 + m \quad , \quad lx_2 + m \quad , \quad lx_3 + m$$

$$l'x'_1 + m' \quad , \quad l'x'_2 + m' \quad , \quad l'x'_3 + m'$$

Слѣдовательно, данныя кубическія уравненія можно разсматривать въ простѣйшихъ формахъ:

$$z^3 + 3Hz + G = 0 \quad , \quad z'^3 + 3H'z' + G' = 0$$

полученныхъ полагая $z = a_0 x + a_1$, $z' = b_0 x + b_1$, если данныя условія удовлетворяются корнями первыхъ уравненій, то они удовлетворятся и корнями послѣднихъ. Полагая теперь $z' = kz$, эти уравненія дѣлаются тождественными, если:

$$H' = k^2 H \quad , \quad G' = k^2 G$$

исключая k, найдемъ:

$$G^2 H'^3 = G'^2 H^3$$

искомое условіе, уже найденное въ примѣрѣ 7. Замѣтимъ, что разрѣшающія уравненія кубическихъ уравненій дѣлаются тождественными преобразованіемъ:

$$\frac{H'}{G'}(b_0 x + b_1) = \frac{H}{G}(a_0 x + a_1)$$

Примѣръ 9. Составить уравненіе, коего корни были-бы произведенія корней x_1, x_2, x_3 даннаго кубическаго уравненія:

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 \tag{91}$$

Рѣшеніе. Корни искомаго уравненія будутъ:

$$x_2 x_3 \quad , \quad x_1 x_3 \quad , \quad x_1 x_2$$

если эти корни означимъ чрезъ y_1, y_2, y_3, то будемъ имѣть:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{3a_2}{a_0}$$

$$y_2 y_3 + y_1 y_3 + y_1 y_2 = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{3a_1 a_3}{a_0^2} \tag{92}$$

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{a_3^2}{a_0^2}$$

откуда искомое уравненіе будетъ:

$$y^3 - \frac{3a_2}{a_0} y^2 + \frac{3a_1 a_3}{a_0^2} y - \frac{a_3^2}{a_0^2} = 0$$

или:

$$a_0^2 y^3 - 3a_0 a_2 y^2 + 3a_1 a_3 y - a_3^2 = 0$$

или для симметріи, замѣняя y чрезъ x, будемъ имѣть:

$$a_0^2 x^3 - 3a_0 a_2 x^2 + 3a_1 a_3 x - a_3^2 = 0 \tag{93}$$

По отношенію къ уравненію (93) функціи (39):

$$L_1 = x_2x_3 + \alpha x_1x_3 + \alpha^2 x_1x_2 \quad , \quad M_1 = x_2x_3 + \alpha^2 x_1x_3 + \alpha x_1x_2 \qquad (94)$$

имѣютъ тѣ-же свойства, что функціи (39):

$$L = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 \quad , \quad M = x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x \qquad (95)$$

по отношенію къ уравненію (91), поэтому можно вычислить функціи:

$$L_1^3 + M_1^3 \quad , \quad L_1M_1 \quad , \quad L_1^3 - M_1^3 \qquad (96)$$

изъ функцій:

$$L^3 + M^3 \quad , \quad LM \quad , \quad L^3 - M^3 \qquad (97)$$

замѣщая въ этихъ послѣднихъ a_0, a_1, a_2, a_3 коэфиціентами $a_0^2, a_0a_2, a_1a_3, a_3^2$ уравненія (93).

Мы означили выше чрезъ H, $2H_1$, H_2 функціи коэфиціентовъ:

$$H = a_0a_2 - a_1^2 \quad , \quad 2H_1 = a_0a_3 - a_1a_2 \quad , \quad H_2 = a_1a_3 - a_2^2 \qquad (98)$$

Если эти функціи по отношенію къ уравненію (93) означимъ черезъ H', $2H'$, H'_2, то найдемъ:

$$H' = a_0^2H_2 \quad , \quad H'_1 = -a_0a_3H_1 \quad , \quad H'_2 = a_3^2H \qquad (99)$$

Чрезъ G мы означили функцію:

$$G = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a^3_1 \qquad (100)$$

это есть коэфиціентъ у x^3 въ соизмѣнной G_x (§ 199), изъ котораго произведены остальные коэфиціенты соизмѣнной способомъ изложеннымъ выше. Если эти коэфиціенты означимъ чрезъ G_1, G_2, G_3, то по отношенію къ уравненію (93) коэфиціентъ G, который означимъ чрезъ G' будетъ:

$$G' = -a_0^3(a_0a^2_3 - 3a_1a_2a_3 + 2a^3_2) = -a_0^3G_3 \qquad (101)$$

Выше (§ 240) мы нашли:

$$L^3+M^3 = -27\frac{G_3}{a_0^3} \quad , \quad LM = -\frac{9H}{a_0^2} \quad , \quad (L^3-M^3)^2 = +27^2\frac{\Delta_3}{a_0^4} \qquad (102)$$

Замѣщая въ первыхъ двухъ тождествахъ коэфиціенты уравненія (91) коэфиціентами уравненія (93), найдемъ:

$$L_1^3 + M_1^3 = 27\frac{G_3}{a_0^3} \quad ; \quad L_1M_1 = -\frac{9H_2}{a_0^2} \qquad (103)$$

Замѣчая, что:

$$(L_1^3-M_1^3)^2\equiv(L_1^3+M_1^3)^2-4L_1^3M_1^3$$

найдемъ:

$$(L_1^3-M_1^3)^2=27^2\frac{G_3^2}{a_0^6}+4.9^3\frac{H_2^3}{a_0^6}=\frac{9^3(G_3^2+4H_2^3)}{a_0^6} \quad (104)$$

или припоминая (§ 240), что:

$$(L^3-M^3)^2=-27(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_2)^2$$

и подставляя корни и коэфиціенты уравненія (93), найдемъ:

$$(L_1^3-M_1^3)^2=-27\frac{a_3^2}{a_0^2}(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_2)^2=27^2\frac{a_3^2\Delta_3}{a_0^6}$$

откуда, сравнивая съ (104), найдемъ:

$$G_3^2+4H_2^3\equiv a_3^2\Delta_3\equiv\frac{a_3^2}{a_0^2}(G^2+4H^3) \quad (105)$$

или:

$$a_0^2(G_3^2+4H_2^3)\equiv a_3^2(G^2+4H^3) \quad (106)$$

Такъ какъ возвышая второе изъ уравненія (103) въ кубъ, они примутъ видъ:

$$L_1^3+M_1^3=27\frac{G_3}{a_0^3}\quad,\quad L_1^3M_1^3=-\frac{9^3H_2^3}{a_0^6} \quad (107)$$

то найдемъ, что L_1^3 и M_1^3 суть корни квадратнаго уравненія:

$$t^2-27\frac{G_3}{a_0^3}t-\frac{9^3.H_2^3}{a_0^6}=0 \quad (108)$$

слѣдовательно:

$$L_1^3=\frac{27}{2a_0^3}(G_3+\sqrt{G_3^2+4H_2^3})\quad,\quad M_1^3=\frac{27}{2a_0^3}(G_3-\sqrt{G_3^2+4H_2^3}) \quad (109)$$

или на основаніи (105):

$$L_1^3=\frac{27}{2a_0^3}(G_3+a_3\sqrt{\Delta_3})\quad,\quad M_1^3=\frac{27}{2a_0^3}(G_3-a_3\sqrt{\Delta_3}) \quad (110)$$

Перемножая L и M_1, L_1 и M и складывая произведенія, найдемъ:

$$LM_1+L_1M=\frac{9(a_1a_2-a_0a_3)}{a_0^2}=-\frac{18H_1}{a_0^2} \quad (111)$$

Замѣчая теперь что:

$$(LM_1+L_1M)^2-4L_1M_1=(LM_1-L_1M)^2$$

найдемъ, подставляя изъ (111) и (103):

$$(LM_1-L_1M)^2=\frac{81\Delta_3}{a_0^4} \qquad (112)$$

откуда:

$$LM_1-L_1M=\pm\frac{9\sqrt{\Delta_3}}{a_0^2} \qquad (113)$$

Наконецъ изъ (111) и (113), найдемъ:

$$LM_1=-\frac{9}{2a_0^2}(2H_1-\sqrt{\Delta_3}) \quad , \quad L_1M=-\frac{9}{2a_0^2}(2H_1+\sqrt{\Delta_3}) \qquad (114)$$

Легко выразить корни x_1, x_2, x_3 въ функціи L и M. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$L=x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3 \quad , \quad M=x_1+\alpha^2x_2+\alpha x_3$$

присовокупляя къ этимъ уравненіямъ еще уравненіе:

$$\frac{-3a_1}{a_0}=x_1+x_2+x_3$$

найдемъ:

$$\begin{aligned} a_0x_1+a_1&=a_0\frac{L+M}{3}\\ a_0x_2+a_1&=a_0\frac{\alpha^2L+\alpha M}{3}\\ a_0x_3+a_1&=a_0\frac{\alpha L+\alpha^2M}{3}\end{aligned} \qquad (115)$$

Точно такимъ же образомъ изъ уравненій:

$$L_1=x_2x_3+\alpha x_1x_3+\alpha^2x_1x_2 \ , \ M_1=x_2x_3+\alpha^2x_1x_3+\alpha x_1x_2 \ , \ \frac{3a_2}{a_0}=x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2$$

найдемъ:

$$\begin{aligned} a_0x_2x_3-a_2&=a_0\frac{L_1+M_1}{3}\\ a_0x_1x_3-a_2&=a_0\frac{\alpha^2L_1+\alpha M_1}{3}\\ a_0x_1x_2-a_2&=a_0\frac{\alpha L_1+\alpha^2M_1}{3}\end{aligned} \qquad (116)$$

Корнямъ x_1, x_2, x_3 съ помощью формулъ (115) и (116) можно дать еще слѣдующія формы.

Изъ (116) имѣемъ:

$$x_2x_3 = \frac{a_2}{a_0} + \frac{L_1 + M_1}{3}$$

но извѣстно что $x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$, слѣдовательно:

$$x_1 = \frac{x_1x_2x_3}{x_2x_3} = -\frac{a_3}{a_0} : \left(\frac{a_2}{a_0} + \frac{L_1 + M_1}{3}\right)$$

или:

$$x_1 = -\frac{3a_3}{3a_2 + a_0(L_1 + M_1)} \tag{117}$$

точно также найдемъ:

$$x_2 = -\frac{3a_3}{3a_2 + a_0(\alpha^2 L_1 + \alpha M_1)}, \quad x_3 = -\frac{3a_3}{3a_2 + a_0(\alpha L_1 + \alpha^2 M_1)} \tag{118}$$

Вычитая два послѣднія изъ уравненій (116), найдемъ:

$$a_0x_1(x_3 - x_2) = -a_0\frac{(L_1 - M_1)}{3}\sqrt{-3} \tag{119}$$

а вычитая изъ третьяго второе изъ уравненій (115), найдемъ:

$$a_0(x_3 - x_2) = a_0\frac{L - M}{3}\sqrt{-3} \tag{120}$$

раздѣляя (119) на (120), найдемъ тождество:

$$x_1 = -\frac{L_1 - M_1}{L - M} \tag{121}$$

точно также найдемъ:

$$x_2 = -\frac{\alpha^2 L_1 - \alpha M_1}{\alpha^2 L - \alpha M}, \quad x_3 = -\frac{\alpha L_1 - \alpha^2 M_1}{\alpha L - \alpha M} \tag{122}$$

Примѣръ 10. Составить уравненіе, коего корни были-бы отношенія корней даннаго уравненія?

Рѣшеніе. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = 0$$

если его корни суть x_1, x_2, x_3, ..., x_n, то $\frac{x_2}{x_1}=\rho$ будетъ корнемъ искомаго уравненія. Но $x_2=x_1\rho$, а:

$$f(x_1)=0 \quad \text{и} \quad f(x_2)=f(x_1\rho)=0$$

слѣдовательно, искомое уравненіе получится исключеніемъ x_1 изъ уравненій:

$$f(x_1)=0 \quad \text{и} \quad f(x_1\rho)=0$$

Если-бы требовалось, чтобы отношеніе было взято съ противнымъ знакомъ, то должно исключить x_1 изъ уравненій:

$$f(x)=0 \quad \text{и} \quad f(-x_1\rho)=0$$

Приложимъ этотъ случай къ кубическимъ уравненіямъ:

$$a_0x^3+3a_2x+a_3=0 \quad \text{и} \quad a_0x^3+3a_1x^2+a_3=0$$

безъ второго и третьяго членовъ.

Въ первомъ случаѣ надобно исключить x_1 изъ уравненій:

$$a_0x^3+3a_2x+a_3=0 \quad , \quad a_0\rho x^3+3a_2\rho x+a_3=0 \qquad (123)$$

это исключеніе даетъ уравненіе 6-й степени:

$$a_0a_3^3(\rho^2+\rho+1)^3+27a_2^3\rho^2(\rho+1)^2=0$$

Если-бы требовалось, чтобы отношенія корней имѣли противный знакъ, то будемъ имѣть:

$$a_0a_3^3(\rho^2-\rho+1)^3+27a_2^3\rho^2(\rho-1)^2=0$$

Во второмъ случаѣ исключается x_1 изъ уравненій:

$$a_0x^3+3a_1x+a_3=0 \quad \text{и} \quad a_0\rho^3x^3+3a_1\rho x+a_3=0$$

что даетъ уравненіе 6-й степени:

$$a_0^2a_3(\rho^2+\rho+1)^3-27a_1^3\rho^2(\rho+1)^2=0$$

Если отношенія будутъ имѣть противные знаки, то искомое уравненіе будетъ:

$$a_0^2a_3(\rho^2-\rho+1)^3-27a_1^3\rho^2(\rho-1)^2=0$$

§ 251. Рѣшеніе уравненій 3-й степени обыкновенно приписываютъ итальянскому математику Тарталіа (Niccolo Tartaglia, 1500—1559), хотя есть основаніе предполагать, что методъ свой Тарталіа заимствовалъ у другаго итальянскаго математика—Ферро (Scipion Ferro, 1465—1525). Одинъ изъ наиболѣе употребительныхъ методовъ рѣшенія уравненій 3-й степени принадлежитъ голландскому геометру Гудду (Hudde, 1633—1704); пріемъ его указанъ нами въ концѣ § 238 (32). Методъ, изложенный въ § 247, принадлежитъ Лагранжу.

Неприводимый случай (Casus irreducibilis).

§ 252. Если обратимъ вниманіе на Кардановскія формулы (29):

$$a_0x_1+a_1=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})}$$

$$a_0x_2+a_1=\alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})}+\alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})} \qquad (124)$$

$$a_0x_3+a_1=\alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})}+\alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})}$$

гдѣ:

$$a_0^2\Delta_3=G^2+4H^3=-\frac{a_0^6(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2}{27} \qquad (125)$$

представляющія корни кубическаго уравненія:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \qquad (126)$$

то увидимъ, что онѣ вообще неудобны къ числовымъ приложеніямъ, будучи осложнены радикалами, но представляютъ полное алгебраическое рѣшеніе кубическаго уравненія. Кромѣ упомянутыхъ неудобствъ формулы (124) представляются всѣ три въ мнимыхъ формахъ въ томъ случаѣ, когда *призначная* Δ_3 будетъ величина отрицательная; между тѣмъ извѣстно, что кубическое уравненіе имѣетъ хотя одинъ дѣйствительный корень. Чтобы призначная:

$$a_0^2\Delta_3=G^2+4H^3 \qquad (127)$$

была величина отрицательная, необходимо во первыхъ, чтобы H была величина отрицательная, т. е. необходимы условія:

$$H<0 \quad \text{и} \quad G^2<-4H^3 \qquad (128)$$

При этихъ условіяхъ всѣ три корня (124) имѣютъ мнимую форму. Въ самомъ дѣлѣ, если Δ_3 есть величина отрицательная, то $-\Delta_3$ будетъ величина положительная, слѣдовательно выраженія:

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})} \tag{129}$$

могутъ быть написаны въ формѣ:

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0 i\sqrt{-\Delta_3})} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0 i\sqrt{-\Delta_3})} \tag{130}$$

откуда видно, что всѣ три выраженія (124) имѣютъ мнимую форму.

Такъ какъ всякой функціи отъ составнаго количества можно дать всегда форму составнаго же количества, то можемъ положить:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0 i\sqrt{-\Delta_3})} &= \frac{u+vi}{2} \\ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0 i\sqrt{-\Delta_3})} &= \frac{u-vi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

гдѣ u и v должны быть величины дѣйствительныя, которыя изъ этихъ уравненій надобно опредѣлить.

Сдѣлавъ такое положеніе, легко показать, что въ этомъ случаѣ кубическое уравненіе имѣетъ всѣ три корня дѣйствительные.

Для этого сложимъ уравненія (131), потомъ сложимъ ихъ, умноживъ первое на α, а второе на α^2, и наконецъ сложимъ, умноживъ первое на α^2, а второе на α, то найдемъ послѣ нѣсколькихъ преобразованій:

$$a_0x_1+a_1=u_1 \;,\; a_0x_2+a_1=\frac{-u+v\sqrt{3}}{2} \;,\; a_0x_3+a_1=\frac{-u-v\sqrt{3}}{2} \tag{132}$$

какъ видно всѣ три величины дѣйствительныя.

Такъ какъ складывая (131) находимъ:

$$u=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0\sqrt{\Delta_3})}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0\sqrt{\Delta_3})} \tag{133}$$

то изъ этого заключаемъ, что u есть корень даннаго кубическаго уравненія (126), а слѣдовательно его опредѣленіе требуетъ рѣшенія того же уравненія съ тѣмъ же характеромъ. Вотъ почему этотъ случай названъ былъ *неприводимымъ* (casus irreductibilis).

Это можно показать еще слѣдующимъ образомъ и вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ кубическое уравненіе опредѣляющее ν съ тѣмъ же самымъ характеромъ. Для этого возвысимъ въ кубъ уравненіе (131):

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0 i\sqrt{-\Delta_3})}=\frac{u+\nu i}{2} \tag{134}$$

получимъ:

$$-\tfrac{1}{2}G-\tfrac{1}{2}a_0 i\sqrt{-\Delta_3}=\frac{u^3+3u^2\nu i-3u\nu^2-\nu^3 i}{8} \tag{135}$$

сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, найдемъ

$$u^3-3u\nu^2+4G=0 \quad , \quad 3u^2\nu-\nu^3+4a_0\sqrt{-\Delta_3}=0 \tag{136}$$

таковы уравненія изъ которыхъ опредѣляются u и ν. Изъ уравненій (131) легко найти простую зависимость между u и ν, съ помощью которой можно изъ этихъ уравненій исключить u или ν и найти уравненія опредѣляющія ν или u.

Для этого перемножимъ уравненія (131), что даетъ:

$$\frac{u^2+\nu^2}{4}=\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(G^2-a_0^2\Delta_3)}=\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\,.-4H^3}=-H$$

откуда:

$$u^2+\nu^2=-4H \tag{137}$$

Если съ помощью этого уравненія исключимъ ν^2 изъ перваго уравненія (136), то найдемъ:

$$u^3+3Hu+G=0 \tag{138}$$

т. е. данное уравненіе, какъ уже выше замѣтили. Если же съ помощью уравненія (137) исключимъ u изъ втораго уравненія (136), то найдемъ уравненіе:

$$\nu^3+3H\nu+a_0\sqrt{-\Delta_3}=0 \tag{139}$$

которое имѣетъ тотъ же характеръ что и данное или (138).

Въ самомъ дѣлѣ, оно отличается отъ (138) только послѣднимъ членомъ, слѣдовательно его рѣшеніе получится, замѣщая въ рѣшеніи уравненія (138) G выраженіемъ $a_0\sqrt{\Delta_3}$, а такое замѣщеніе преобразуетъ выраженіе:

$$\sqrt{a_0^2\Delta_3}=\sqrt{G^2+4H^3}$$

въ

$$\sqrt{-a_0^2\Delta_3+4H^3}=\sqrt{-G^2}$$

откуда видно, что всѣ три корня уравненія (139) представляются также въ мнимой формѣ, какъ и даннаго уравненія. Слѣдовательно такимъ способомъ опредѣлить количества u и v невозможно.

Неприводимый случай — casus irreductibilis былъ впервые замѣченъ италіанскимъ математикомъ Карданомъ (Cardano 1501—1576) и изслѣдованъ его современникомъ Бомбелли (Bombelli).

§ 253. Хотя, какъ мы выше видѣли, вычислить корни кубическаго уравненія, въ томъ случаѣ, когда призначная Δ_3 есть величина отрицательная, указаннымъ выше способомъ, невозможно, но есть косвенный способъ съ помощью котораго можно вычислить всѣ три корня кубическаго уравненія, если всѣ они соизмѣримы или по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ. Этотъ способъ принадлежитъ Вейхгольду (Guido Weichgold).

Въ § 250 мы видѣли что корни кубическаго уравненія:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \qquad (k)$$

выражаются чрезъ L, M, L_1, M_1 формулами (115), (117 и 118), (121 и 122). Функціи же L, M, L_1, M_1 такого свойства, что мы имѣемъ:

$$LM=-\frac{9H}{a_0^2}\quad,\quad L_1M_1=-\frac{9H_2}{a_0^2}$$

$$LM_1=-\frac{9}{2a_0^2}(2H_1-\sqrt{\Delta_3})\quad,\quad L_1M=-\frac{9}{2a_0^2}(2H_1+\sqrt{\Delta_3})$$

слѣдовательно, такія комбинаціи этихъ функцій выражаются въ функціяхъ коэфиціентовъ кубическаго уравненія, раціональныхъ или радикальныхъ перваго порядка и 2-й степени. Изъ предыдущихъ выраженій функція L можетъ быть опредѣлена, какъ общій наибольшій дѣлитель въ произведеніяхъ.

$$LM \quad \text{и} \quad LM_1$$

а функція M, какъ общій наибольшій дѣлитель въ произведеніяхъ:

$$LM \quad \text{и} \quad L_1M$$

Такимъ же точно образомъ L_1 и M_1 могутъ быть опредѣлены изъ произведеній:

$$L_1M_1 \quad \text{и} \quad L_1M \quad,\quad L_1M_1\quad,\quad LM_1$$

Опредѣливъ такимъ образомъ L, M, L_1, M_1, съ помощью вышеуказанныхъ выраженій для корней уравненія (k), найдемъ эти корни.

Пояснимъ сказанное примѣрами:

Примѣръ 10. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$x^3 - 16x^2 + 73x - 90 = 0$$

здѣсь мы имѣемъ:

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -\frac{16}{3} \quad , \quad a_2 = \frac{73}{3} \quad , \quad a_3 = -90$$

Съ этими значеніями коэфиціентовъ легко найти:

$$H = -37 \quad , \quad \Delta_3 = -\frac{(28)^2}{3}$$

откуда видно, что уравненіе представляетъ casus irreductibilis. Точно также найдемъ:

$$LM = 37 \quad , \quad L_1 M_1 = 1009$$

$$LM_1 = -179 + 42\sqrt{-3} \quad , \quad L_1 M = -179 - 42\sqrt{-3}$$

$$L^3 + M^3 = 110 \quad , \quad L_1^3 + M_1^3 = 50654$$

$$L^3 = 55 + 126\sqrt{-3} \quad ; \quad M^3 = 55 - 126\sqrt{-3}$$

$$L_1^3 = 25327 - 11340\sqrt{-3} \quad , \quad M_1^3 = 25327 + 11340\sqrt{-3}$$

разыщемъ общаго наибольшаго дѣлителя между:

$$LM = 37 \quad \text{и} \quad LM_1 = -179 + 42\sqrt{-3}$$

для этого раздѣлимъ $-179 + 42\sqrt{-3}$ на 37, это дѣленіе даетъ частное $-5+\sqrt{-3}$ и остатокъ $6+5\sqrt{-3} = \sqrt{-3}\,(5-2\sqrt{-3})$; отбрасывая множителя $\sqrt{-3}$, который не есть общій дѣлитель чиселъ 37 и $-179+42\sqrt{-3}$ и раздѣляя 37 на $5-2\sqrt{-3}$ найдемъ безъ остатка $5+2\sqrt{-3}$, слѣдовательно:

$$37 = (5-2\sqrt{-3})(5+2\sqrt{-3})$$

и

$$-179+42\sqrt{-3} = (5-2\sqrt{-3})(-31-4\sqrt{-3}) = (-5+2\sqrt{-3})(31+4\sqrt{-3})$$

т. е.:

$$LM = 37 = (5-2\sqrt{-3})(5+2\sqrt{-3}) = (-5+2\sqrt{-3})(-5-2\sqrt{-3})$$

$$LM_1 = -179+42\sqrt{-3} = (5-2\sqrt{-3})(-31-4\sqrt{-3}) =$$
$$= (-5+2\sqrt{-3})(31+4\sqrt{-3})$$

чтобы опредѣлить знаки множителей, надобно сравнить кубы количествъ:

$$5-2\sqrt{-3} \quad , \quad -5+2\sqrt{-3} \quad , \quad 5+2\sqrt{-3} \quad , \quad -5-2\sqrt{-3}$$

съ кубами:

$$L^3 = 55+126\sqrt{-3} \quad , \quad M^3 = 55-126\sqrt{-3}$$

что даетъ:

$$L = -5+2\sqrt{-3} \quad , \quad M = -5-2\sqrt{-3}$$
$$L_1 = 31-4\sqrt{-3} \quad , \quad M_1 = 31+4\sqrt{-3}$$

Вставляя эти значенія въ формулы (115), (117 и 118), (121 и 122), найдемъ:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 9 \quad , \quad x_3 = 5$$

Примѣръ 2. Пусть еще будетъ дано уравненіе:

$$105x^3 - 244x^2 + 188x - 48 = 0$$

здѣсь:

$$a_0 = 105 \quad , \quad a_1 = -\frac{244}{3} \quad , \quad a_2 = \frac{188}{3} \quad , \quad a_3 = -48$$

эти значенія даютъ:

$$LM = \frac{316}{11025} \quad , \quad L_1M_1 = \frac{208}{11025}$$

$$LM_1 = \frac{-256+8\sqrt{-3}}{11025} \quad , \quad L_1M = \frac{-256-8\sqrt{-3}}{11025}$$

Опредѣлимъ L какъ общаго наибольшаго дѣлителя выраженій:

$$LM = \frac{316}{11025} \quad \text{и} \quad LM_1 = \frac{-256+8\sqrt{-3}}{11025}$$

или:

$$\left(\frac{2}{105}\right)^2 . 79 \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{105}\right)^2(-64+2\sqrt{-3})$$

Раздѣляя $-64+2\sqrt{-3}$ на 79, найдемъ остатокъ $15+2\sqrt{-3}$; раздѣляя 79 на этотъ остатокъ, найдемъ остатокъ $-2(-2+5\sqrt{-3})$; раздѣляя предъидущій остатокъ $15+2\sqrt{-3}$ на $-2+5\sqrt{-3}$, получимъ въ остаткѣ нуль. Слѣдовательно $-2+5\sqrt{-3}$ есть искомый общій наибольшій дѣлитель. Откуда:

$$79=(-2+5\sqrt{-3})(-2-5\sqrt{-3})=(2-5\sqrt{-3})(2+5\sqrt{-3})$$

$$-64+2\sqrt{-3}=(-2+5\sqrt{-3})(2+4\sqrt{-3})=(2-5\sqrt{-3})(-2-4\sqrt{-3})$$

слѣдовательно:

$$L=(-2+5\sqrt{-3})\frac{2}{105} \quad \text{или} \quad L=(2-5\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

Чтобы рѣшить какое изъ этихъ двухъ выраженій принять за L, должно кубы ихъ сравнить съ L^3, вычисленнымъ прямо:

$$L^3=\frac{-3536+24\sqrt{-3}}{105^3}$$

Но:

$$L^3=\left\{\frac{2(-2+5\sqrt{-3})}{105}\right\}=\frac{3536-24\sqrt{-3}}{105^3}$$

слѣдовательно:

$$L=(2-5\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

откуда:

$$M=(2+5\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

и

$$L_1=(-2+4\sqrt{-3})\frac{2}{105} \quad , \quad M_1=(-2-4\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

Подставляя эти значенія въ формулы (115), (117 и 118), (121 и 122), найдемъ:

$$x_1=\frac{4}{5} \quad , \quad x_2=\frac{2}{3} \quad , \quad x_3=\frac{6}{7}$$

Таковъ пріемъ для вычисленія корней кубическаго уравненія, когда оно представляетъ casus irreductibilis; остается показать, какъ въ этомъ случаѣ выразить корни съ помощью тригонометрическихъ функцій.

§ 254. Если кубическое уравненіе:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \qquad (140)$$

представляетъ casus irreductibilis, т. е. когда мы имѣемъ:

$$H<0 \quad \text{и} \quad G^2+4H^3=a_0^2\Delta_3<0$$

то его корни представляются въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0i\sqrt{-\Delta_3})}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0i\sqrt{-\Delta_3})} \\ x_2 &= \alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0i\sqrt{-\Delta_3})}+\alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0i\sqrt{-\Delta_3})} \qquad (141) \\ x_3 &= \alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0i\sqrt{-\Delta_3})}+\alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0i\sqrt{-\Delta_3})} \end{aligned}$$

Если положимъ:

$$-\tfrac{1}{2}(G+a_0i\sqrt{-\Delta_3})=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$$

то (142)

$$-\tfrac{1}{2}(G-a_0i\sqrt{-\Delta_3})=\rho(\cos\omega-i\sin\omega)$$

откуда:

$$\rho^2=\tfrac{1}{4}(G^2-a_0^2\Delta_3)=-H^3$$

слѣдовательно:

$$\rho=(-H)^{\frac{3}{2}}$$

Складывая и вычитая уравненія (142), найдемъ:

$$\rho\cos\omega=-G \quad , \quad \rho\sin\omega=-a_0\sqrt{-\Delta_3}$$

слѣдовательно:

$$\cos\omega=-\frac{G}{\sqrt{-H^3}} \quad , \quad \sin\omega=-\frac{a\sqrt{-\Delta_3}}{\sqrt{-H^3}}$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{a_0\sqrt{-\Delta_3}}{\sqrt{-H^3}}$$

такимъ образомъ уголъ ω будетъ опредѣленъ.

Замѣчая теперь, что (§ 15):

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G+a_0i\sqrt{-\Delta_3})}=\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\omega}{3}+i\sin\frac{\omega}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G-a_0i\sqrt{-\Delta_3})}=\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\omega}{3}-i\sin\frac{\omega}{3}\right)$$

Раздѣляя $-64+2\sqrt{-3}$ на 79, найдемъ остатокъ $15+2\sqrt{-3}$; раздѣляя 79 на этотъ остатокъ, найдемъ остатокъ $-2(-2+5\sqrt{-3})$; раздѣляя предъидущій остатокъ $15+2\sqrt{-3}$ на $-2+5\sqrt{-3}$, получимъ въ остаткѣ нуль. Слѣдовательно $-2+5\sqrt{-3}$ есть искомый общій наибольшій дѣлитель. Откуда:

$$79=(-2+5\sqrt{-3})(-2-5\sqrt{-3})=(2-5\sqrt{-3})(2+5\sqrt{-3})$$

$$-64+2\sqrt{-3}=(-2+5\sqrt{-3})(2+4\sqrt{-3})=(2-5\sqrt{-3})(-2-4\sqrt{-3})$$

слѣдовательно:

$$L=(-2+5\sqrt{-3})\frac{2}{105} \quad \text{или} \quad L=(2-5\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

Чтобы рѣшить какое изъ этихъ двухъ выраженій принять за L, должно кубы ихъ сравнить съ L^3, вычисленнымъ прямо:

$$L^3=\frac{-3536+24\sqrt{-3}}{105^3}$$

Но:

$$L^3=\left\{\frac{2(-2+5\sqrt{-3})}{105}\right\}=\frac{3536-24\sqrt{-3}}{105^3}$$

слѣдовательно:

$$L=(2-5\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

откуда:

$$M=(2+5\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

и

$$L_1=(-2+4\sqrt{-3})\frac{2}{105} \quad , \quad M_1=(-2-4\sqrt{-3})\frac{2}{105}$$

Подставляя эти значенія въ формулы (115), (117 и 11
найдемъ:

$$x_1=\frac{4}{5} \quad , \quad x_2=\frac{2}{3} \quad ,$$

Таковъ пріемъ для вычисленія корней к
представляетъ casus irreducibilis; ос
чаѣ выразить корни съ помощью тр

§ 254. Если кубическое уравненіе:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \qquad (140)$$

представляетъ casus irreducibilis, т. е. когда мы имѣемъ:

$$H < 0 \quad \text{и} \quad G^2 + 4H^3 = a_0^2\Delta_3 < 0$$

то его корни представляются въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{-\Delta_3})} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{-\Delta_3})} \\ x_2 &= \alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{-\Delta_3})} + \alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{-\Delta_3})} \qquad (141) \\ x_3 &= \alpha^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G + a_0\sqrt{-\Delta_3})} + \alpha\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(G - a_0\sqrt{-\Delta_3})} \end{aligned}$$

Если положимъ:

$$-\tfrac{1}{2}(G + a_0 i\sqrt{-\Delta_3}) = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$

то (142)

$$-\tfrac{1}{2}(G - a_0 i\sqrt{-\Delta_3}) = \rho(\cos\omega - i\sin\omega)$$

откуда:

$$\rho^2 = \tfrac{1}{4}(G^2 - a_0^2\Delta_3) = -H^3$$

слѣдовательно:

$$\rho = (-H)^{\frac{3}{2}}$$

Складывая и вычитая уравненія (142), найдемъ:

$$\rho\cos\omega = -\tfrac{1}{2}G, \quad \rho\sin\omega = -\tfrac{1}{2}a_0\sqrt{-\Delta_3}$$

слѣдовательно:

$$\cos\omega = -\frac{G}{\sqrt{-H^3}}, \quad \sin\omega = -\frac{a_0\sqrt{-\Delta_3}}{\sqrt{-H^3}}$$

откуда:

... $= -\frac{a_0\sqrt{\ldots}}{\ldots}$

... браковъ уг... о...

...ѣчая ...

... $i\sin\frac{\omega}{3}\Big)$

... $i\sin\frac{\omega}{3}\Big)$

и что:

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad , \quad \alpha^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$$

найдемъ для корней кубическаго уравненія слѣдующія выраженія:

$$x_1 = 2(-H)^{\frac{1}{3}}\cos\omega \quad , \quad x_2 = 2(-H)^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{2\pi+\omega}{3}\right) \quad , \quad x_3 = 2(-H)^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{2\pi-\omega}{2}\right)$$

изъ которыхъ видно, что всѣ три корня кубическаго уравненія, въ томъ случаѣ, когда $\Delta_3 < 0$, будутъ дѣйствительные.

Съ помощью предыдущихъ формулъ рѣшить слѣдующія задачи:

Примѣръ 1. Найти выраженіе для:

$$L^2L_1 + M^2M_1$$

въ коэфиціентахъ кубическаго уравненія.

Отвѣтъ:

$$L^2L_1 + M^2M_1 = -\frac{27}{a_0^3}(a_1^2a_2 - 2a_0a_2^2 + a_0a_1a_3)$$

Примѣръ 2. Найти выраженіе:

$$LL_1^2 + MM_1^2$$

въ коэфиціентахъ уравненія.

Отвѣтъ:

$$LL_1^2 + MM_1^2 = \frac{27}{a_0^3}(a_0a_2a_3 - 2a_1^2a_3 + a_0a_1a_2^2)$$

Примѣръ 3. Найти выраженіе для:

$$L^2L_1 - M^2M_1$$

въ коэфиціентахъ уравненія.

Отвѣтъ.

$$L^2L_1 - M^2M_1 = \frac{27a_1}{a_0^2}\sqrt{\Delta_3}$$

Примѣръ 4. Найти выраженіе для:

$$LL_1^2 - MM_1^2$$

въ коэфиціентахъ уравненія.

Отвѣтъ.

$$LL_1^2 - MM_1^2 = \frac{27a_2}{a_0^2}\sqrt{\Delta_3}$$

Соображаясь со всѣмъ предыдущимъ, легко найти слѣдующія выраженія:

$$L^2L_1 \quad , \quad LL_1^2 \quad , \quad M^2M_1 \quad , \quad MM_1^2$$

Примѣръ 5. Найти условіе, при которомъ корни кубическаго уравненія составляютъ ариѳметическую прогрессію?

Отвѣтъ.

$$2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_1^2a_3 = 0$$

Примѣръ 6. Найти условіе, при которомъ корни кубическаго уравненія составляютъ геометрическую пропорцію.

Отвѣтъ.

$$a_0a_2^3 - a_1^3a_2 = 0$$

§ 255. Вычислить по способу Вейхгольда корни слѣдующихъ уравненій 3-й степени.

Примѣръ 1.

$$x^3 + \frac{41}{140}x^2 - \frac{79}{14}x + \frac{429}{140} = 0$$

Отвѣтъ:

$$x_1 = -\frac{11}{4} \quad , \quad x_2 = \frac{13}{7} \quad , \quad x_3 = \frac{3}{5}$$

Примѣръ 2.

$$x^3 + \frac{81}{55}x^2 + \frac{181}{385}x + \frac{3}{77} = 0$$

Отвѣтъ:

$$x = -\frac{3}{11} \quad , \quad x_2 = -\frac{3\sqrt{7} + \sqrt{38}}{5\sqrt{7}} \quad , \quad x_3 = -\frac{3\sqrt{7} - \sqrt{38}}{5\sqrt{7}}$$

Примѣръ 3.

$$x^3 - (8 + \sqrt{5})x^2 + (19 + 6\sqrt{5})x - 7(2 + \sqrt{5}) = 0$$

Отвѣтъ.

$$x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad , \quad x_2 = 3 + \sqrt{2} \quad , \quad x_3 = 3 - \sqrt{2}$$

§ 256. *Число неизмѣнныхъ и соизмѣнныхъ кубической формы.* Въ § 53 видно, что кубическая форма:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 \tag{143}$$

подстановленіемъ $z = a_0x + a_1$ преобразовывается въ форму:

$$z^3 + 3Hz + G \tag{144}$$

слѣдовательно, если x_1, x_2, x_3 суть корни первой формы (143), а z_1, z_2, z_3 —корни второй (144), то имѣемъ:

$$z_1 = a_0x_1 + a_1 \quad , \quad z_2 = a_0x_2 + a_1 \quad , \quad z_3 = a_0x_3 + a_1 \tag{145}$$

откуда вообще:

$$z_k - z_r = a_0(x_k - x_r) \tag{146}$$

Пусть $\varphi(x_1, y_2, x_3)$ будетъ цѣлая раціональная, однородная, симметрическая функція разностей корней s-го порядка, то будемъ имѣть:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3) = F(a_0, a_1, a_2, a_3) \tag{147}$$

но легко видѣть, что:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(z_1, z_2, z_3)$$

гдѣ вторая часть есть цѣлая однородная симметрическая функція корней формы (144), слѣдовательно можетъ быть выражена въ ея коэфиціентахъ H и G, т. е. будемъ имѣть:

$$F(a_0, a_1, a_2, a_3) = F_0(H, G) \tag{148}$$

Если данная симметрическая функція будетъ четнаго порядка, то G въ функцію (148) должно входить въ четной степени, такъ какъ H есть функція коэфиціентовъ четной степени. Если же данная симметрическая функція будетъ нечетнаго порядка, то G въ функціи (148) должно входить какъ множитель, такъ какъ H четной степени, слѣдовательно функція (148) будетъ имѣть формы:

$$GF_0(H, G) \quad \text{или} \quad F_0(H, G) \tag{149}$$

G въ функціи $F_0(H, G)$ входитъ въ четной степени. Если G входитъ въ четной степени, то его можно исключить съ помощью тождества:

$$G^2 + 4H^3 = a_0^2\Delta_3 \tag{150}$$

Слѣдовательно функціи (149) сдѣлаются:

$$GF_0(H, a_0^2\Delta_3) \quad \text{и} \quad F_0(H, a_0^2\Delta_3) \tag{151}$$

откуда будемъ имѣть:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3) = GF_0(H, a_0^2\Delta_3)$$

или:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3) = F(H, a_0^2\Delta_3)$$

смотря по тому будетъ-ли функція $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ нечетнаго или четнаго порядка.

Если функція $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ есть неизмѣнная кубической формы, то функціи:

$$GF_0(H, a_0^2\Delta_3) \quad \text{или} \quad F_0(H, a_0^2\Delta_3) \tag{152}$$

не должны измѣняться когда коэфиціенты a_0, a_1, a_2, a_3 замѣстятся ихъ дополнительными a_3, a_2, a_1 a_0, а это только тогда возможно, когда въ функціи (152) не будетъ входить ни a_0, ни H, ни G, т. е. если эти функціи будутъ только функціи отъ неизмѣнной Δ_3. Откуда заключаемъ, что Δ_3 есть единственная неизмѣнная кубической формы, а всѣ другія неизмѣнныя суть раціональныя функціи этой послѣдней.

Если функція:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3) = GF_0(H, a_0^2\Delta_3) \quad \text{или} \quad a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3) = F_0(H, a_0^2\Delta_3)$$

замѣщеніемъ корней x_1, x_2, x_3 выраженіями:

$$\frac{1}{x_1 - x}, \quad \frac{1}{x_2 - x}, \quad \frac{1}{x_3 - x}$$

даетъ соизмѣнную, то эта соизмѣнная будетъ:

$$G_x F_0(H_x, U_4, \Delta_3) \quad \text{или} \quad F_0(H_x, U_4, \Delta_3)$$

откуда видимъ, что всѣ соизмѣнныя суть функціи соизмѣнныхъ H_x и G_x слѣдовательно кубическая форма имѣетъ только двѣ соизмѣнныя, другія же суть раціональныя функціи этихъ двухъ.

Примѣръ 1. Если U_3 будетъ кубическая форма, а G_x ея кубическая соизмѣнная, то гессевская форма $\lambda U_3 + \mu G_x$, гдѣ λ и μ суть постоянныя, имѣетъ тѣ же корни, какіе имѣетъ и гессевская H_x формы U_3.

Примѣръ 2. Если x'_1, x'_2, x'_3 суть корни кубической соизмѣнной $G_x = 0$, то:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'_1} + \frac{\partial}{\partial x'_2} + \frac{\partial}{\partial x'_3}\right)\varphi_1(x'_1 x'_2 x'_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi(x_1 x_2 x_3)$$

гдѣ:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) = \varphi_1(x'_1 x'_2 x'_3)$$

и

$$\delta x'_1 = \delta x'_2 = \delta x'_3 = -1$$

Примѣръ 3. Даны двѣ кубическія формы:

$$U = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 \quad , \quad V = b_0 x^3 + 3b_1 x^2 + 3b_2 x + b_3$$

найти такую зависимость между коэфиціентами этихъ формъ и опредѣлить отношеніе $\lambda:\mu$ такъ, чтобы форма:

$$\lambda U + \mu V$$

была полный кубъ?

Въ этомъ случаѣ гессевская формы $\lambda U + \mu V$ должна тождественно уничтожаться (§ 239, случ. 4), написавъ ее въ двухъ формахъ:

$$\lambda^2 H_x + \lambda\mu K_x + \mu^2 H_{x'} \equiv Lx^2 + Mxy + Ny^2$$

гдѣ:

$$K_x = (a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1)x^2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0 - a_1 b_2 - a_2 b_1)xy + (a_1 b_3 + a_3 b_1 - 2a_2 b_2)y^2$$

имѣемъ:

$$L = 0 \quad , \quad M = 0 \quad , \quad N = 0$$

исключая λ^2, $\lambda\mu$, μ^2 изъ этихъ уравненій мы получимъ искомое условіе въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{vmatrix} a_0 a_2 - a_1^2 & a_0 a_3 - a_1 a_2 & a_1 a_3 - a_2^2 \\ a_0 b_3 + a_3 b_0 - 2a_1 b_1 & a_0 b_3 + a_3 b_0 - a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 b_3 + a_3 b_1 - 2a_2 b_2 \\ b_0 b_2 - b_1^2 & b_0 b_3 - b_1 b_2 & b_1 b_3 - b_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

ГЛАВА XVII.

Алгебраическое рѣшеніе уравненій (продолженіе).

Рѣшеніе биквадратнаго уравненія.

§ 257. Уравненіе 4-й степени:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \qquad (1)$$

имѣетъ, какъ мы видѣли выше (§ 191), двѣ неизмѣнныя.

$$J_1 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$$

$$J_2 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 \qquad (2)$$

и двѣ соизмѣнныя (§ 192), (52) и (54):

$$H_{4.x} = 0 \quad \text{и} \quad G_{4.x} = 0$$

H и G какъ и всегда имѣютъ значенія:

$$H = a_0a_2 - a_1^2 \quad , \quad G = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3 \qquad (3)$$

Въ § 54 мы нашли слѣдующую зависимость между H, G, J_1, J_2:

$$G^2 + 4H^3 = a_0^2(HJ_1 - a_0J_2) \qquad (4)$$

Полагая $z = a_0x + a_1$ уравненіе (1) преобразуется въ слѣдующее:

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2J_1 - 3H^2 = 0 \qquad (5)$$

Въ такой формѣ мы будемъ рѣшать биквадратное уравненіе.

§ 258. *Способъ 1.* Положимъ:

$$z = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} \qquad (6)$$

и возвысимъ въ квадратъ:

$$t^2 - t_1 - t_2 - t_3 = 2(\sqrt{t_1}\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}\sqrt{t_3} + \sqrt{t_2}\sqrt{t_3})$$

возвышая еще разъ, мы найдемъ уравненіе:

$$z^4 - 2(t_1+t_2+t_3)z^2 - 8\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}\,.\,z + (t_1+t_2+t_3)^2 - 4(t_2t_3+t_1t_3+t_1t_2) = 0 \qquad (7)$$

сравнивая это уравненіе съ (5), найдемъ:

$$t_1+t_2+t_3=-3H \quad , \quad t_2t_3+t_1t_3+t_1t_2=3H^2-\frac{a_0^2J_1}{4} \quad , \quad \sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=-\frac{G}{2} \qquad (8)$$

откуда видно, что t_1, t_2, t_3 суть корни кубическаго уравненія:

$$t^2+3Ht^2+\left(3H^2-\frac{a_0^2J_1}{4}\right)t-\frac{G^2}{4}=0 \qquad (9)$$

но изъ тождества (4) имѣемъ:

$$-G^2\equiv 4H^3-a_0^2HJ_1+a_0^2J_2$$

слѣдоватетьно уравненіе (9) сдѣлается:

$$4(t+H)^3-a_0^2J_1(t+H)+a_0^2J_2=0$$

полагая $t+H=a_0u$, найдемъ:

$$4a_0^3u^3-J_1a_0u+J_2=0 \qquad (10)$$

это кубическое уравненіе называется *разрѣшающимъ* уравненіемъ биквадратнаго уравненія. Если u_1, u_2, u_3 суть корни уравненія (10), то:

$$t_1=a_0^2u_1-H \quad , \quad t_2=a_0^2u_2-H \quad , \quad t_3=a_0^2u_3-H \qquad (11)$$

слѣдовательно:

$$z=\sqrt{a_0^2u_1-H}+\sqrt{a_0^2u_2-H}+\sqrt{a_0^2u_3-H} \qquad (12)$$

Каждый изъ радикаловъ, входящихъ въ это выраженіе имѣетъ два значенія, слѣдовательно если-бы эти радикалы были независимы, то z имѣло-бы восемь значеній, но такъ какъ (8) мы имѣемъ:

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=-\frac{G}{2} \qquad (13)$$

то значенія двухъ радикаловъ опредѣляютъ значеніе третьяго, поэтому выраженіе (12) имѣетъ только четыре значенія.

Исключая изъ выраженія:

$$z=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}$$

третій радикалъ съ помощью зависимости (8) будемъ имѣть:

$$z=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\frac{G}{2\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \qquad (14)$$

выраженіе которое имѣетъ только четыре значенія. Подставляя вмѣсто z t_1 и t_2 ихъ значенія, найдемъ:

$$a_0x_1 + a_1 = \sqrt{a_0^2u_1 - H} + \sqrt{a_0^2u_2 - H} - \frac{G}{2\sqrt{a_0^2u_1 - H}\sqrt{a_0^2u_2 - H}} \quad (15)$$

полное алгебраическое рѣшеніе биквадратнаго уравненія (1), гдѣ u_1, u_2 суть корни уравненія:

$$4a_0^3u^3 - J_1a_0u + J_2 = 0$$

§ 259. Съ перваго взгляда кажется, что положеніе:

$$z = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

совершенно произвольное, но легко видѣть, что на такое положеніе указываетъ слѣдующее свойство корней уравненія (5). Если z_1, z_2, z_3, z_4 суть корни этого уравненія, то имѣемъ:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \quad (16)$$

такъ какъ въ уравненіи (5) недостаетъ втораго члена. Изъ этого заключаемъ, что хотя функція $(z_1+z_2)^2$, имѣя вообще шесть значеній:

$$(z_1+z_2)^2\ ,\ (z_1+z_3)^2\ ,\ (z_1+z_4)^2\ ,\ (z_2+z_3)^2\ ,\ (z_2+z_4)^2\ ,\ (z_3+z_4)^2$$

но при условіи (16) имѣетъ ихъ только три, такъ какъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} (z_2+z_3)^2 &= (z_1+z_4)^2 = 4t_1 \\ (z_3+z_1)^2 &= (z_2+z_4)^2 = 4t_2 \\ (z_1+z_2)^2 &= (z_3+z_4)^2 = 4t_3 \end{aligned} \quad (17)$$

откуда легко видѣть, что z_1, z_2, z_3, z_4 выражаются формулой:

$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

этотъ способъ принадлежитъ Эйлеру.

Примѣръ 1. Показать что для двухъ уравненій:

$$a_0x^4 + 6a_2x^2 \pm 4a_3x + a_4 = 0$$

разрѣшающее кубическое уравненіе будетъ одно и тоже.

Примѣръ 2. Найти разрѣшающее кубическое уравненіе для двухъ биквадратныхъ уравненій:

$$x^4 - 6lx^2 \pm 8\sqrt{(l^3+m^3+n^3-3lmn)}\,.\,x + 3(4mn-l^2) = 0$$

Отвѣтъ:

$$t^3 - 3mnt - (m^3+n^3) = 0$$

Примѣръ 3. Показать что восемь корней уравненія:

$$\{x^4 - 6lx^2 + 3(4mn-l^2)\}^2 = 64(l^3+m^3+n^3-3lmn)x^2$$

даются формулою:

$$\sqrt{l+m+n} + \sqrt{l+\alpha m+\alpha^2 n} + \sqrt{l+\alpha^2 m+\alpha n}$$

Примѣръ 4. Опредѣлить H, J_1, J_2 въ функціи l, m, n, если выраженіе:

$$\sqrt{l+m+n} + \sqrt{l+\alpha m+\alpha^2 n} + \sqrt{l+\alpha^2 m+\alpha n}$$

будетъ корнемъ уравненія:

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2 J_1 - 3H^2 = 0$$

Отвѣтъ:

$$H = -l \quad , \quad J_1 = 12mn \quad , \quad J_2 = -4(m^3+n^3)$$

Примѣръ. 5. Показать, что въ биквадратномъ уравненіи:

$$m(x-n)^4 - n(x-m)^4 = 0$$

неизмѣнная $J_1 = 0$.

Примѣръ 6. Написать выраженіе для корней биквадратнаго уравненія (1) въ томъ случаѣ когда $J_1 = 0$ и $J_2 = 0$.

Примѣръ 7. Какое выраженіе находится подъ послѣднимъ квадратнымъ корнемъ въ формулѣ дающей корни биквадратнаго уравненія?

Отвѣтъ.

$$27J_2^2 - J_1^3$$

Примѣръ 8. Показать, что коэфиціенты уравненія въ квадратахъ разностей корней уравненія:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

могутъ быть выражены въ функціи количествъ a_0, H, J_1 и J_2?

Рѣшеніе. Удаляя второй членъ изъ даннаго уравненія будемъ имѣть:

$$y^4 + \frac{6H}{a_0^2}y^2 + \frac{4G}{a_0^3}y + \frac{a_0^2J_1 - 3H^2}{a_0^4} = 0$$

перемѣняя знаки корней, имѣемъ:

$$y^4 + \frac{6H}{a_0^2}y^2 - \frac{4G}{a_0^3}y + \frac{a_0^2J_1 - 3H^2}{a_0^4} = 0$$

это преобразованіе не измѣняетъ функцій $(x_1-x_3)^2$, $(x_1-x_3)^2, \ldots$, но G измѣнилось на $-G$, а другіе коэфиціенты остались безъ перемѣны, слѣдовательно G должно входить въ коэфиціенты искомаго уравненія въ квадратахъ разностей корней, только въ четной степени, а такъ какъ (§ 257):

$$-G^2 \equiv 4H^2 - a_0^2HJ_1 + a_0^2J_2 \tag{17'}$$

то G^2 можно исключить и ввесть только количества a_0, H, J_1, J_2.

Точно также можно показать, что всякая функція разностей корней x_1, x_2, x_3, x_4 можетъ быть выражена въ функціи a_0, H, J_1, J_2, если G входитъ въ нее въ четной степени.

§ 260. *Способъ 2.* Преобразуемъ биквадратное уравненіе:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \tag{18}$$

подстановленіемъ $z = a_0x + a_1$ въ:

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2J_1 - 3H^3 = 0 \tag{19}$$

и положимъ:

$$z = \sqrt{t_2}\sqrt{t_3} + \sqrt{t_1}\sqrt{t_3} + \sqrt{t_1}\sqrt{t_2} \tag{20}$$

выраженіе заключающее *три* радикала. Возвышая въ квадратъ получимъ:

$$(z^2 - t_2t_3 - t_1t_3 - t_1t_2) = 2(t_3\sqrt{t_1}\sqrt{t_2} + t_2\sqrt{t_1}\sqrt{t_3} + t_1\sqrt{t_2}\sqrt{t_1})$$

или:

$$(z^2 - t_2t_3 - t_1t_3 - t_1t_2) = 2\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3})$$

возвышая еще разъ въ квадратъ, найдемъ:

$$(z^2 - t_2t_3 - t_1t_3 - t_1t_2)^2 = 4t_1t_2t_3(2z + t_1 + t_2 + t_3)$$

или:

$$z^4 - 2(t_2t_3 + t_1t_3 + t_1t_2)z^2 - 8t_1t_2t_3z + (t_2t_3 + t_1t_3 + t_1t_2)^2 - 4(t_1 + t_2 + t_3)t_1t_2t_3 = 0$$

сравнивая это уравненіе съ (19), найдемъ:

$$t_2t_3+t_1t_3+t_1t_2=-3H\ ,\quad t_1t_2t_3=-\frac{G}{2}\ ,\quad t_1+t_2+t_3=\frac{a_0^2J_1-12H^2}{2G} \qquad (21)$$

откуда видимъ что t_1, t_2, t_3 суть корни кубическаго уравненія:

$$2Gt^3+(12H^2-a_0J_1)t^2-6HGt+G^2=0 \qquad (22)$$

полагая въ этомъ уравненіи:

$$t=\frac{\frac{1}{2}G}{H-a_0^2u}$$

оно сдѣлается, если вмѣсто G^2 подставимъ его выраженіе въ функціи H, J_1 и J_2:

$$4a_0^3u^3-a_0J_1u+J_2=0 \qquad (23)$$

разрѣшающее кубическое уравненіе уже полученное выше. Легко видѣть, что выраженіе:

$$\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_1}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_1}\sqrt{t_2} \qquad (24)$$

при всѣхъ значеніяхъ радикаловъ имѣетъ только четыре значенія, и поэтому можетъ представлять корни биквадратнаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})^2=t_1+t_2+t_3+2(\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_1}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}) \qquad (25)$$

откуда видимъ, что выраженіе (25) имѣетъ столько значеній, сколько ихъ имѣетъ выраженіе:

$$(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})^2$$

а это выраженіе, очевидно, имѣетъ ихъ четыре.

Если x_1, x_2, x_3, x_4 суть корни биквадратнаго уравненія (1), а z_1, z_2, z_3, z_4 корни преобразованнаго (2), то имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
z_1&=a_0x_1+a_1=\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}-\sqrt{t_1}\sqrt{t_3}-\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\\
z_2&=a_0x_2+a_1=-\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_1}\sqrt{t_3}-\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\\
z_3&=a_0x_3+a_1=-\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}-\sqrt{t_1}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\\
z_4&=a_0x_4+a_1=\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_1}\sqrt{t_3}+\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

откуда, составляя выраженія $z_2+z_3-z_1-z_4$ и $z_2z_3-z_1z_4$, найдемъ:

$$a_0(x_2+x_3-x_1-x_4) = -4\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}$$

$$a_0^2(x_2x_3-x_1x_4) + a_0a_1(x_2+x_3-x_1-x_4) = 4\,.\,t_1\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}$$

изъ этихъ и подобныхъ имъ формулъ, сообразуясь съ зависимостью $G = -2t_1t_2t_3$, найдемъ t_1, t_2, t_3 въ функціи корней x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\left.\begin{aligned}
-t_1 &= a_0\frac{x_2x_3-x_1x_4}{x_2+x_3-x_1-x_4}+a_1 = \frac{8G}{a_0^2(x_2+x_3-x_1-x_4)^2}\\
-t_2 &= a_0\frac{x_3x_1-x_2x_4}{x_3+x_1-x_2-x_4}+a_1 = \frac{8G}{a_0^2(x_3+x_1-x_2-x_4)^2}\\
-t_2 &= a_0\frac{x_1x_2-x_3x_4}{x_1+x_2-x_3-x_4}+a_1 = \frac{8G}{a_0^2(x_1+x_2-x_3-x_4)^2}
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Изъ выраженій (26), найдемъ:

$$a_0(x_2-x_3) = -2\sqrt{t_1}\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\right) \quad , \quad a_0(x_1-x_4) = -2\sqrt{t_1}\left(\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\right)$$

откуда:

$$\begin{aligned}
a_0^2(x_2-x_3)(x_1-x_4) &= 4t_1(t_2-t_3) = 4(R-Q)\\
a_0^2(x_3-x_1)(x_2-x_4) &= 4t_2(t_3-t_1) = 4(P-R)\\
a_0^2(x_1-x_2)(x_3-x_4) &= 4t_3(t_1-t_2) = 4(Q-R)
\end{aligned} \quad (28)$$

гдѣ:

$$P = t_2t_3 \quad , \quad Q = t_3t_1 \quad , \quad R = t_1t_2$$

Выраженія (27) представляютъ функціи корней биквадратнаго уравненія, которыя при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ корней x_1, x_2, x_3, x_4 имѣютъ только три различныя значенія. Въ силу этого свойства функцій (27) биквадратное уравненіе сводится на рѣшеніе кубическаго.

Примѣръ 1. Показать при помощи уравненій:

$$P+Q+R = -3H \quad , \quad 2t_1t_2t_3 = -G \quad , \quad QR+RP+PQ = 3H^2 - \frac{a_0^2J_1}{4}$$

что:

$$a_0^2J_1 = \tfrac{2}{3}\left\{(Q-R)^2 + (R-P)^2 + (P-Q)^2\right\}$$

$$-a_0^3J_2 = \tfrac{4}{27}\left\{(2P-Q-R)(2Q-P-R)(2R-P-Q)\right\}$$

Примѣръ 2. Выразить величины:

$$\frac{J_1}{a_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{J_2}{a_0^2}$$

въ функціи выраженій:

$$(x_2-x_3)(x_1-x_4) \quad , \quad (x_3-x_1)(x_2-x_3) \quad , \quad (x_1-x_2)(x_3-x_4)$$

и показать, что:

$$a_0^6(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2 = 256(J_1^3-27J_2^2)$$

Примѣръ 3. Показать, что если t_1, t_2, t_3 составляютъ гармоническую прогрессію, то и корни x_1, x_2, x_3, x_4 также составляютъ гармоническую прогрессію, и обратно?

§ 261. *Способъ 3.* Методъ этотъ данъ былъ итальянскимъ математикомъ Людовикомъ Феррари (Ludovico Ferrari, 1522—1565).

Пусть данное биквадратное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \tag{29}$$

умножая это уравненіе на a_0 и сравнивая съ:

$$(a_0x^2 + 2a_1x + a_2 + 2a_0t)^2 - (2ux + v)^2 = 0 \tag{30}$$

найдемъ:

$$u^2 = a_1^2-a_0a_2+a_0^2t \quad , \quad uv = a_1a_2-a_0a_3+2a_0a_1t \quad , \quad v^2 = (a_2+2a_0t)^2-a_0a_4 \tag{31}$$

исключая u и v изъ этихъ уравненій, найдемъ:

$$4a_0^3t^3 - a_0J_1t + J_2 = 0 \tag{32}$$

полученное уже выше разрѣшающее кубическое уравненіе.

Изъ этого уравненія найдемъ три значенія для t: t_1, t_2, t_3 съ тремя соотвѣтствующими величинами u^2, uv, v^2, такимъ образомъ, всѣ коэфиціенты взятой формы (30) биквадратнаго уравненія будутъ опредѣлены и при томъ тремя различными способами; при этомъ каждому значенію u соотвѣтствуетъ только одно значеніе v, такъ какъ имѣемъ:

$$uv = a_1a_2 - a_0a_3 + 2a_0a_1t \tag{33}$$

Слѣдовательно, форма (30) разлагается на два квадратные множителя:

$$\left.\begin{aligned} a_0x^2 + 2(a_1 - u)x + a_2 + 2a_0t - v = 0 \\ a_0x^2 + 2(a_1 + u)x + a_2 + 2a_0t + v = 0 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Если соотвѣтственно этимъ тремъ парамъ квадратныхъ множителей возьмемъ пары корней:

$$x_2, x_3 \text{ и } x_1, x_4 \quad , \quad x_3, x_1 \text{ и } x_2, x_4 \quad , \quad x_1, x_2 \text{ и } x_3, x_4$$

то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x_2+x_3 &= -\frac{2(a_2-u_1)}{a_0} \ , \quad x_3+x_1 = -\frac{2(a_1-u_2)}{a_0} \ , \quad x_1+x_2 = -\frac{2(a_1-u_3)}{a_0} \\ x_1+x_4 &= -\frac{2(a_1+u_1)}{a_0} \ , \quad x_2+x_4 = -\frac{2(a_1+u_2)}{a_0} \ , \quad x_3+x_4 = -\frac{2(a_1+u_3)}{a_0} \end{aligned} \qquad (37)$$

гдѣ:

$$u_1 = \sqrt{a_0^2 t_1 - H} \quad , \quad u_2 = \sqrt{a_0^2 t_2 - H} \quad , \quad u_3 = \sqrt{a_0^2 t_3 - H} \qquad (38)$$

Вычитая изъ первыхъ уравненій (37) вторыя, найдемъ:

$$x_2+x_3-x_1-x_4 = \frac{4u_1}{a_0} \ , \ x_3+x_1-x_2-x_4 = \frac{4u_3}{a_0} \ , \ x_1+x_2-x_3-x_4 = \frac{4u_3}{u_0} \qquad (39)$$

и такъ какъ:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4a_1}{a_0}$$

то имѣемъ:

$$\begin{aligned} a_0 x_1 + a_1 &= -u_1 + u_2 + u_3 \\ a_0 x_2 + a_1 &= u_1 - u_2 + u_3 \\ a_0 x_3 + x_1 &= u_1 + u_2 - u_3 \\ a_0 x_4 + a_1 &= -u_1 - u_2 - u_3 \end{aligned} \qquad (40)$$

Знаки радикаловъ u_1, u_2, u_3, обусловлены неявно порядкомъ въ которомъ были выбраны пары корней (36). Это условіе выражается уравненіемъ:

$$(x_4+x_3-x_1-x_2)(x_3+x_1-x_2-x_4)(x_1-x_2-x_3-x_4) = 64\frac{u_1 u_2 u_3}{a_0^3}$$

или (§ 145, пр. 9):

$$u_1 u_2 u_3 = \frac{G}{2}$$

Исключая съ помощью этого уравненія радикалъ u_3 будемъ имѣть простую формулу:

$$a_0 x + a_1 = u_1 + u_2 + \frac{G}{2u_1 u_2} \qquad (41)$$

которая представляетъ всѣ корни уравненія (29), если будемъ давать, входящимъ въ нее радикаламъ u_1, u_2 ихъ двойныя значенія. — Эта формула была уже получена выше (способъ 1).

Изъ тѣхъ же квадратныхъ множителей (35) будемъ имѣть:

$$x_2x_3 = \frac{a_2 + 2a_0t_1 - \nu_1}{a_0} \quad , \quad x_3x_1 = \frac{a_2 + 2a_0t_2 - \nu_2}{a_0} \quad , \quad x_1x_2 = \frac{a_2 + 2a_0t_3 - \nu_3}{a_0}$$

$$x_1x_4 = \frac{a_2 + 2a_0t_1 + \nu_1}{a_0} \quad , \quad x_2x_4 = \frac{a_2 + 2a^2t_2 + \nu_2}{a_0} \quad , \quad x_3x_4 = \frac{a_2 + 2a_0t_3 + \nu_3}{a_0} \qquad (42)$$

складывая попарно, найдемъ:

$$x_2x_3 + x_1x_4 = 2\,\frac{a_2 + 2a_0t_1}{a_0}$$

$$x_3x_1 + x_2x_4 = 2\,\frac{a_2 + 2a_0t_2}{a_0} \qquad (43)$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 2\,\frac{a_2 + 2a_0t_3}{a_0}$$

откуда видимъ что функція:

$$x_1x_2 + x_3x_4 \qquad (44)$$

при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ корней x_1, x_2, x_3, x_4 имѣетъ *только три* значенія.

Примѣръ 1. Составить уравненіе коего корнями были-бы три значенія:

$$x_2x_3 + x_1x_4 \quad , \quad x_3x_1 + x_2x_4 \quad , \quad x_1x_2 + x_3x_4$$

функцій корней биквадратнаго уравненія (29).

Означая эти значенія чрезъ θ_1, θ_2, θ_3 вообще будемъ имѣть (43):

$$\theta = 2\,\frac{a_2 + 2a_0t}{a_0}$$

откуда:

$$t = \frac{a_0\theta - 2a_2}{4a_0}$$

подставляя это значеніе t въ разрѣшающее кубическое уравненіе (32), котораго три значенія t суть корни, найдемъ искомое уравненіе:

$$(a_0\theta - 2a_2)^3 - 4J_1(a_0\theta - 2a_2) + 16J_2 = 0 \qquad (45)$$

Примѣръ 2. Выразить корни разрѣшающаго кубическаго уравненія (32) въ функціи корней биквадратнаго уравненія.

Подставляя въ выраженія (43):

$$x_2x_3+x_1x_4=4t_1+\frac{2a_2}{a_0}\ ,\ x_3x_1+x_2x_4=4t_2+\frac{2a_2}{a_0}\ ,\ x_1x_2+x_3x_4=4t_3+\frac{2a_2}{a_0}$$

вмѣсто $\frac{2a_2}{a_0}$ его значеніе:

$$\frac{2a_2}{a_0}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4}{3}$$

найдемъ:

$$\begin{aligned}12t_1&=2\theta_1-\theta_2-\theta_3=(x_3-x_1)(x_2-x_4)-(x_1-x_2)(x_3-x_4)\\ 12t_2&=2\theta_2-\theta_3-\theta_1=(x_1-x_2)(x_3-x_4)-(x_2-x_3)(x_1-x_4)\qquad(46)\\ 12t_3&=2\theta_3-\theta_1-\theta_2=(x_2-x_3)(x_1-x_4)-(x_3-x_1)(x_2-x_4)\end{aligned}$$

Примѣръ 3. Если два корня разрѣшающаго кубическаго уравненія мнимые, то два корня въ биквадратномъ уравненіи будутъ дѣйствительные, а два мнимые.

Доказательство. Пусть $t_1=p+qi$, $t_2=p-qi$, подставляя эти выраженія въ формулы:

$$u_1=\sqrt{a_0^2t_1-H}\ \ ,\ \ u_2=\sqrt{a_0^2t_2-H}$$

найдемъ:

$$u_1=\sqrt{P+Qi}\ \ ,\ \ u_2=\sqrt{P+Qi}$$

Полагая:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{P}{Q}$$

будемъ имѣть:

$$u_1=\sqrt{P^2+Q^2}\,.\,e^{\varphi i}\ \ ,\ \ u_2=\sqrt{P^2+Q^2}\,.\,e^{-\varphi i}$$

откуда:

$$u_1+u_2=2\sqrt{P^2+Q^2}\,.\cos\varphi\ \ ,\ \ u_1-u_2=2i\sqrt{P^2+Q^2}\,.\sin\varphi$$

Но вообще рѣшеніе биквадратнаго уравненія есть:

$$a_0x+a_1=u_1+u_2-\frac{G}{2u_1u_2}$$

гдѣ u_1 и u_2 имѣютъ двойные знаки, слѣдовательно два корня биквадратнаго уравненія, которые выражаются суммою u_1+u_2, будутъ дѣйствительные, а два, которые выражаются разностью u_1-u_2, будутъ мнимые.

Примѣръ 4. Если корни биквадратнаго уравненія будутъ всѣ дѣйствительные или всѣ мнимые, то корни разрѣшающаго кубическаго уравненія будутъ всѣ дѣйствительные.

Легко показать, что выраженія:

$$x_2x_3+x_1x_4 \quad , \quad x_3x_1+x_2x_4 \quad , \quad x_1x_2+x_3x_4$$

будутъ всѣ дѣйствительныя, а слѣдовательно, и корни t_1, t_2, t_3 будутъ дѣйствительные.

Примѣръ 5. Показать, что если два корня биквадратнаго уравненія дѣйствительные, а два мнимые, то разрѣшающее кубическое уравненіе имѣетъ мнимые корни?

Примѣръ 6. Составить уравненіе, коего-бы корни были три значенія функцій:

$$\tfrac{1}{8}(x_2x_3-x_1x_4)(x_2+x_3-x_1-x_4)$$

$$\tfrac{1}{8}(x_3x_1-x_2x_4)(x_3+x_1-x_2-x_4)$$

$$\tfrac{1}{8}(x_1x_2-x_3x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)$$

Выше мы нашли (39):

$$\frac{4u_1}{a_0}=x_2+x_3-x_1-x_4 \quad , \quad \frac{4u_2}{a_0}=x_3+x_1-x_2-x_4 \quad , \quad \frac{4u_3}{a_0}=x_1+x_2-x_3-x_4$$

вычитая по-парно уравненія (42), найдемъ еще:

$$x_3x_2-x_1x_4=-\frac{2v_1}{a_0} \quad , \quad x_3x_1-x_2x_4=-\frac{2v_2}{a_0} \quad , \quad x_1x_2-x_3x_4=-\frac{2v_3}{a_0} \qquad (47)$$

откуда:

$$u_1v_1=a_1a_2-a_0a_3+2a_0a_1t_1=-a_0s_1$$

$$u_2v_2=a_1a_2-a_0a_3+2a_0a_1t_2=-a_0s_2$$

$$u_3v_3=a_1a_2-a_0a_3+2a_0a_1t_3=-a_0s_3$$

или вообще:

$$uv=a_1a_2-a_0a_3+2a_0a_1t=-a_0s$$

исключая t изъ разрѣшающаго кубическаго уравненія (32), найдемъ:

$$(a_0s+a_1a_2-a_0a_3)^3-a_1^2J_1(a_0^2s+a_1a_2-a_0a_3)-2a_1^3J_2=0 \qquad (48)$$

Примѣръ 7. Составить уравненіе, коего корни были-бы:

$$\frac{x_2x_3-x_1x_4}{x_2+x_3-x_1-x_4}\ ,\qquad \frac{x_3x_1-x_2x_4}{x_3+x_1-x_2-x_4}\ ,\qquad \frac{x_1x_2-x_3x_4}{x_1+x_2-x_3-x_4}$$

Легко видѣть, что мы вообще имѣемъ:

$$-2s=\frac{uv}{u^2}\quad\frac{a_1a_2-a_0a_3+2a_0a_1t}{a_1^2-a_0a_2+a_0^2t}$$

слѣдовательно, искомое уравненіе получится проэктивнымъ преобразованіемъ разрѣшающаго кубическаго уравненія. Предъидущую формулу можно написать въ формѣ:

$$a_0s+a_1=\frac{\frac{1}{2}G}{a_0^2t-H}$$

съ помощью которой искомое уравненіе будетъ имѣть слѣдующую форму:

$$2G(a_0s+a_1)^3+(a_0^2J_1-12H^2)(a_0s+a_1)^2-6HG(a_0s+a_1)-G^2=0$$

которое по разложеніи получаетъ форму:

$$2Gs^3+(a_0a_4+6a_1^2a_2-9a_0a_2^2+2a_0a_1a_3)s^2+$$
$$+2(a_0a_1a_4+2a_1^2a_3-3a_0a_2a_3)s+a_1^2a_4-a_0a_3^2=0$$

§ 262. *Способъ 4.* Способъ этотъ принадлежитъ Декарту. Въ этомъ способѣ биквадратное уравненіе:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \qquad (49)$$

разлагается на двухъ квадратныхъ множителей:

$$a_0(x^2+2p_1x+q_1)(x^2+2p_2x+q_2)=0 \qquad (50)$$

сравнивая эти двѣ формы одного и того-же уравненія, найдемъ:

$$p_1+p_2=2\frac{a_1}{a_0}\ ,\quad q_1+q_2+4p_1p_2=\frac{6a_2}{a_0}\ ,\quad p_1q_2+p_2q_1=\frac{2a_3}{a_0}\ ,\quad q_1q_2=\frac{a_4}{a_0} \qquad (51)$$

напишемъ второе изъ этихъ уравненій въ формѣ:

$$\frac{a_2}{a_0}-p_1p_2=\frac{1}{4}\left(q_1+q_2-\frac{2a_2}{a_0}\right) \qquad (52)$$

и положимъ:

$$\frac{a_2}{a_0}-p_1p_2=\frac{1}{4}\left(q_1+q_2-\frac{2a_2}{a_0}\right)=t \qquad (53)$$

изъ перваго уравненія (51), возвышая его въ квадратъ, найдемъ:

$$p_1^2+p_2^2+2p_1p_2=\frac{4a_1^2}{a_0^2}$$

а изъ (53):

$$p_1p_2=\frac{a_2-a_0t}{a_0} \tag{54}$$

слѣдовательно:

$$p_1^2+p_2^2=\frac{4a_1^2}{a_0^2}-2p_1p_2=\frac{4a_1^2-2a_2+2a_0t}{a_0^2} \tag{55}$$

второе изъ уравненій (51) даетъ:

$$q_1+q_2=\frac{6a_2}{a_0}-4p_1p_2$$

или, соображаясь съ (54):

$$q_1+q_2=\frac{2(a_2+2a_0t)}{a_0} \tag{56}$$

возвышая въ квадратъ и замѣчая, что (51):

$$q_1q_2=\frac{a_4}{a_0} \tag{57}$$

найдемъ:

$$q_1^2+q_2^2=\frac{4(a_2+2a_0t)^2-2a_0a_4}{a_0^2} \tag{58}$$

Перемножая уравненія (51):

$$p_1+p_2=\frac{2a_1}{a_0} \quad \text{и} \quad q_1+q_2=\frac{2(a_2+2a_0t)}{a_0}$$

найдемъ:

$$p_1q_1+p_2q_2=\frac{4a_1(a_2+2a_0t)-2a_0a_3}{1_0^2} \tag{59}$$

если замѣтимъ, что:

$$p_1q_2+p_2q_1=\frac{2a_3}{a_0} \tag{60}$$

Такъ какъ мы имѣемъ тождество:

$$(p_1q_2-p_2q_1)^2\equiv(p_1q_2+p_2q_1)^2-4p_1p_2q_1q_2$$

то подставляя сюда выраженія (60), (54) и (57), найдемъ:

$$(p_1q_2-p_2q_1)=\frac{4(a_3^2-a_2a_4+a_0a_4t)}{a_0^2} \tag{61}$$

Чтобы исключить величины p_1, p_2, q_1, q_2 надобно только въ тождество:

$$(p_1^2+p_2^2)(q_1^2+q_2^2)=(p_1q_2-p_2q_1)^2+(p_1q_1+p_2q_2)^2$$

подставить выраженія (55), (58), (60) и (61). Это подстановленіе даетъ извѣстное разрѣшающее уравненіе:

$$4a_0^3t^3-a_0J_1t+J_2=0 \tag{62}$$

Назовемъ его корни чрезъ t_1, t_2, t_3. Мы имѣли выше:

$$p_1+p_2=\frac{2a_1}{a_0}\quad,\quad p_1p_2=\frac{a_2-a_0t}{a_0}\quad,\quad q_1+q_2=2\,\frac{a_2+2a_0t}{a_0}\quad,\quad q_1q_2=\frac{a_4}{a_0} \tag{63}$$

гдѣ t надобно положить равнымъ t_1, t_2, t_3. Изъ уравненій (63) видимъ, что p_1 и p_2, q_1 и q_2 суть корни квадратныхъ уравненій:

$$a_0p^2-2a_1p+(a_2-a_0t)=0\quad,\quad a_0q^2-2(a_2+2a_0t)\,q+a_4=0 \tag{64}$$

Соотвѣтсвенно каждому изъ корней t_1, t_2, t_3 получимъ изъ этихъ уравненій по три пары значеній для p и q:

$$p_1,p_2\quad,\quad p'_1,p'_2\quad,\quad p''_1,p''_2\quad,\quad q_1,q_2\quad,\quad q'_1,q'_2\quad,\quad q''_1,q''_2 \tag{65}$$

Опредѣливъ изъ уравненій (64) пару значеній p_1 и p_2, q_1 и q_2, соотвѣтствующихъ корню t_1, намъ остается только рѣшить уравненія (50):

$$x^2+p_1x+q_1=0\quad,\quad x^2+p_2x+q_2=0 \tag{66}$$

чтобы получить корни уравненія (49).

Три пары значеній для p и q, очевидно происходятъ отъ того, что четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4 можно комбинировать по-парно для составленія квадратныхъ множителей (66) тремя различными способами:

$$x_1,x_2 \text{ и } x_3,x_4\quad,\quad x_1,x_3 \text{ и } x_2,x_4\quad,\quad x_1,x_4 \text{ и } x_2,x_3$$

слѣдовательно уравненія (66) дадутъ тѣ же корни уравненія (49), только различно группированные по-парно, если будемъ въ нихъ подставлять пары значеній p и q изъ (65).

Теперь остается объяснить почему выбранное выраженіе для t:

$$t = \frac{a_2}{a_0} - p_1 p_2 = \frac{1}{4}\left(q_1 + q_2 - \frac{2a_2}{a_0}\right) \tag{67}$$

приводитъ къ извѣстному разрѣшающему уравненію (62). — Если въ выраженіе (67) подставимъ вмѣсто $\frac{a_2}{a_0}$ и $p_1 p_2$ ихъ выраженія:

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4}{6} \quad , \quad p_1p_2 = (x_1+x_2)(x_3+x_4)$$

то найдемъ, если чрезъ θ_1, θ_2, θ_3 означимъ, какъ выше (пр. 1, § 261), выраженія:

$$\theta_1 = x_2x_3 + x_1x_4 \quad , \quad \theta_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \quad , \quad \theta_3 = x_1x_2 + x_3x_4 \tag{68}$$

$$t_1 = \frac{2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2}{12} \quad , \quad t = \frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_2}{12} \quad , \quad t_3 = \frac{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{12}$$

Слѣдовательно t_1, t_2, t_3 суть функціи разностей количествъ θ_1, θ_2, θ_3, которыя въ силу уравненій:

$$-\theta_2 + \theta_3 = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4)$$

$$-\theta_3 + \theta_1 = (x_3 - x_1)(x_2 - x_4)$$

$$-\theta_1 + \theta_2 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$$

суть четные функціи разностей корней x_1, x_2, x_3, x_4, слѣдовательно уравненіе дающее t (58) не можетъ заключать другихъ функцій коэфиціентовъ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, какъ только функціи a_0, H, J_1, J_2.

§ 263. Тотъ же способъ можно приложить къ уравненію:

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2 J_1 - 3H^2 = 0 \tag{69}$$

безъ второго члена.

Положимъ, что оно разлагается на два квадратные множителя:

$$(z^2+2pz+q_1)(z^2-2pz+q_2) = 0 \tag{70}$$

такъ какъ коэфиціенты у z суть $2p$ и $-2p$, то по перемноженіи этихъ трехчленовъ z^3 входить не будетъ. Сравнивая коэфиціенты у (69) и (70), котораго форма есть:

$$z^4 + (q_1 - 4p^2 + q_2)z^2 + 2p(q_2 - q_1)z + q_1q_2 = 0$$

найдемъ:

$$q_1 + q_2 - 4p^2 = 6H \quad , \quad 2p(q_2 - q_1) = 4G \quad , \quad q_1 q_2 = a_0^2 J_1 - 3H^2$$

или:

$$q_2 + q_1 = 6H + 4p^2 \quad , \quad q_2 - q_1 = \frac{2G}{p} \quad , \quad q_1 q_2 = a_0^2 J_1 - 3H^2 \tag{71}$$

откуда изъ первыхъ двухъ уравненій имѣемъ:

$$q_2 = 3H + 2p^2 + \frac{G}{p} \quad , \quad q_1 = 3H + 2p^2 - \frac{G}{p} \tag{72}$$

подставляя эти выраженія въ третье изъ уравненій (71), найдемъ:

$$4p^6 + 12Hp^4 + 12\left(H^2 - \frac{a_0^2 J_1}{12}\right)p^2 - G^2 = 0 \tag{73}$$

полагая наконецъ:

$$a_0^2 t = p^2 + H = \tfrac{1}{4}(q_1 + q_2 - 2H) \tag{74}$$

и раздѣляя на a_0^3, найдемъ извѣстное разрѣшающее кубическое уравненіе:

$$4a_0^3 t^3 - a_0 J_1 t + J_2 = 0 \tag{75}$$

Если корни уравненія (75) будутъ t_1, t_2, t_3, то p^2_1, p^2_2, p^2_3 будутъ корни уравненія (73), слѣдовательно:

$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 = \frac{G^2}{4} \tag{76}$$

откуда:

$$p_1 p_2 p_3 = \pm \frac{G}{2}$$

положимъ:

$$p_1 p_2 p_3 = + \frac{G}{2} \tag{77}$$

Подставимъ теперь въ уравненія:

$$z^2 + 2p_1 z + q_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad z^2 - 2p_1 z + q_2 = 0$$

вмѣсто q_1 и q_2 ихъ значенія (72), то будемъ имѣть:

$$z^2 + 2p_1 z + 3H + 2p_1^2 - \frac{G}{p_1} \quad , \quad z^2 - 2p_1 z + 3H + 2p_1^2 + \frac{G}{p_1} = 0$$

но:

$$3H = -p_1^2 - p_2^2 = p_3^2 \quad , \quad \text{а} \quad G = 2p_1p_2p_3$$

подставляя эти выраженія въ предъидущія уравненія, найдемъ:

$$z^2 + 2p_1z - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + 2p_1^2 - 2p_2p_3 = 0$$

$$z^2 - 2p_1z - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + 2p_1^2 + 2p_2p_3 = 0$$

откуда:

$$z^2 + 2p_1z + p_1^2 - (p_2+p_3)^2 = 0 \quad , \quad z^2 - 2p_1z + p_1^2 - (p_2-p_3)^2 = 0$$

опредѣляя z, найдемъ:

$$z = -p_1 \pm (p_2+p_3) \quad , \quad z = p_1 \pm (p_2-p_3)$$

откуда:

$$z_1 = -p_1 + p_2 + p_3 = -p_1 + p_2 - \frac{G}{2p_1p_2}$$

$$z_2 = -p_1 - p_2 - p_3 = -p_1 - p_2 + \frac{G}{2p_1p_2}$$

$$z_3 = \quad p_1 + p_2 - p_3 = \quad p_1 + p_2 + \frac{G}{2p_1p_2}$$

$$z_4 = \quad p_1 + p_2 + p_3 = \quad p_1 - p_2 - \frac{G}{2p_1p_2}$$

гдѣ вообще:

$$p = \sqrt{a_0^2t - H}$$

формулы, полученныя уже выше. Слѣдовательно:

$$a_0x + a_1 = \sqrt{a_0^2t_1 - H} + \sqrt{a_0^2t_2 - H} + \frac{G}{2\sqrt{a_0^2t_1 - H}\sqrt{a_0^2t_2 - H}}$$

гдѣ радикалы должны получить по два значенія.

§ 264. *Способъ 5.* Этотъ способъ состоитъ въ преобразованіи биквадратнаго уравненія въ взаимную форму (§ 55). Для этого въ уравненіи:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \tag{78}$$

положимъ:

$$x = ky + s \tag{79}$$

въ силу чего данное уравненіе дѣлается:

$$a_0k^4y^4 + 4U_1k^3y^3 + 6U_2k^2y^2 + 4U_3ky + U_4 = 0 \tag{80}$$

гдѣ:

$$U_1 = a_0 s + a_1 \quad , \quad U_2 = a_0 s^2 + 2a_1 s + a_2$$
$$U_3 = a_0 s^3 + 3a_1 s^2 + 3a_2 s + a_3 \quad , \quad U_4 = a_0 s^4 + 4a_1 s^3 + 6a_2 s^2 + 4a_3 s + a_4 \tag{81}$$

Если уравненіе (80) будетъ взаимное, то будемъ имѣть два условія:

$$a_0 k^4 = U_4 \quad \text{и} \quad k^3 U_1 = U_3 \tag{82}$$

изъ которыхъ исключая k, будемъ имѣть для опредѣленія s уравненія:

$$a_0 U_3^2 - U_1^2 U_4 = 0 \tag{83}$$

Такъ какъ изъ втораго уравненія (82) мы имѣемъ:

$$k^2 = \frac{U_3}{U_1} = \frac{a_0 s^3 + 3a_1 s^2 + 3a_2 s + a_3}{a_0 s + a_1} \tag{84}$$

то каждому значенію s соотвѣтствуетъ два значенія k равныхъ, но съ противными знаками. Если уравненіе (83) преобразуемъ подстановленіями:

$$a_0^2 U_3 = U_1^3 + 3HU_1 + G \quad , \quad a_0^3 U_4 = U_1^4 + 6HU_1^2 + 4GU_1 + a_0^2 J_1 - 3H^2 \tag{85}$$

то оно сдѣлается:

$$2GU_1^3 + (a_0^2 J_1 - 12H^2)U_1^2 - 6GHU_1 - G^2 = 0 \tag{86}$$

это кубическое уравненіе опредѣляетъ $U_1 = a_0 s + a_1$, и если положимъ:

$$a_0 s + a_1 = \frac{\frac{1}{2}G}{a_0^2 t - H}$$

то найдемъ разрѣшающее уравненіе:

$$4a_0^3 t^3 - a_0 J_1 t + J_2 = 0 \tag{87}$$

Весьма важно замѣтить, что кубическое уравненіе (86) отличается отъ уравненія (22, § 260) только тѣмъ, что корни его имѣютъ противные знаки.

Опредѣлимъ теперь k и s въ функціи корней x_1, x_2, x_3, x_4 даннаго биквадратнаго уравненія. Такъ какъ уравненіе (80), полученное преобразованіемъ $x = ky + s$, есть взаимное, то его корни суть:

$$y_1 \quad , \quad y_2 \quad , \quad \frac{1}{y_1} \quad , \quad \frac{1}{y_2}$$

слѣдовательно, имѣемъ:

$$x_1 = ky_1 + s \quad , \quad x_2 = ky_2 + s \quad , \quad x_4 = k\frac{1}{y_1} + s \quad , \quad x_3 = k\frac{1}{y_2} + s$$

откуда:

$$(x_1 - s)(x_4 - s) = (x_2 - s)(x_3 - s) = k^2$$

или:

$$s = \frac{x_2 x_3 - x_1 x_4}{x_2 + x_3 - x_1 - x_4} \qquad (88)$$

$$-k^2 = \frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_4)(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_2 + x_3 - x_1 - x_4)^2} \qquad (39)$$

Эти выраженія s и k даютъ замѣчательное геометрическое значеніе этимъ величинамъ. Пусть OA, OB, OC, OD будутъ разстоянія четырехъ точекъ A, B, C, D на одной прямой линіи отъ точки O, принятой за начало, и пусть эти четыре разстоянія суть корни x_1, x_2, x_3, x_4 уравненія:

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

Пусть O_1, O_2, O_3 суть центры, а f_1, f_1', f_2, f_2', f_3, f_3' суть фокусы трехъ инволюціонныхъ системъ, опредѣляемыхъ тремя парами квадратныхъ уравненій:

$$(x - x_2)(x - x_3) = 0 \quad , \quad (x - x_1)(x - x_4) = 0$$

$$(x - x_3)(x - x_1) = 0 \quad , \quad (x - x_2)(x - x_4) = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad , \quad (x - x_3)(x - x_4) = 0$$

Слѣдовательно будемъ имѣть уравненія:

$$O_1B \cdot O_1C = O_1A \cdot O_1D = O_1f_1^2 \quad , \text{ и т. д.}$$

которыя будучи преобразованы и сравнены съ уравненіями:

$$(x_2 - s)(x_3 - s) = (x_1 - s)(x_4 - s) = k^2 \quad \text{и т. д.}$$

показываютъ, что OO_1, OO_2, OO_3 суть разстоянія трехъ инволюціонныхъ центровъ отъ начала O. Итакъ какъ $Of_1{}^2 = k^2$, то k имѣетъ шесть значеній, коихъ геометрическія значенія суть разстоянія:

$$O_1f_1 \;,\; O_1f_1' \;;\; O_2f_2 \;,\; O_2f_2' \;;\; O_3f_3 \;,\; O_3f_3'$$

гдѣ $O_1f_1 + O_1f_1' = 0$ и т. д., такъ какъ эти разстоянія откладываются въ противоположныхъ направленіяхъ.

Мы можемъ только изъ геометрическихъ соображеній найти положеніе центровъ и фокусовъ инволюцій въ функціи корней x_1, x_2, x_3, x_4, и такимъ образомъ подтвердить найденный выше результатъ слѣдующимъ образомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$\{f_1Bf_1'C\} \quad \text{и} \quad \{f_1Af_1'D\}$$

суть гармоническія системы*), то имѣемъ:

$$\frac{2}{f_1f_1'}=\frac{1}{f_1B}+\frac{1}{f_1'C}=\frac{1}{f_1A}+\frac{1}{f_1'D}$$

и если x представляетъ разстояніе f_1 и f_1' отъ начала O, то имѣемъ:

$$\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_4}$$

рѣшая это уравненіе, найдемъ:

$$x=\frac{(x_2x_3-x_1x_4)\pm\sqrt{-(x_3-x_1)(x_2-x_4)(x_1-x_2)(x_3-x_4)}}{x_2+x_3-x_1-x_4}$$

но:

$$x=s\pm k$$

слѣдовательно:

$$s=\frac{Of_1+Of_1'}{2}\quad,\quad k=\pm\frac{Of_1-Of_1'}{2}=\pm O_1f_1$$

Примѣръ. Преобразовать кубическое уравненіе:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$$

въ форму взаимнаго уравненія?

Положимъ $x=ky+s$; уравненіе преобразуется въ слѣдующее:

$$a_0k^3y^3+3U_1k^2y^2+3U_2ky+U_3=0$$

чтобы это уравненіе было взаимнымъ, необходимо имѣть:

$$a_0k^3=U_3 \quad \text{и} \quad U_1k^2=U_1k$$

откуда, исключая k_1 найдемъ:

$$a_0U_2^3=U_1^3U_3$$

---

*) См. Аналитическая Геометрія, стр. 109.

дѣлая здѣсь преобразованіе, полагая $a_0 s + a_1 = U_1$, найдемъ:

$$-GU_1^3 + 3H^2U_1^2 + H^3 = 0$$

Легко видѣть, что значенія s суть:

$$\frac{x_2x_3 - x_1^2}{x_2 + x_3 - 2x_1} \quad , \quad \frac{x_3x_1 - x_2^2}{x_3 + x_1 - 2x_2} \quad , \quad \frac{x_1x_2 - x_3^2}{x_1 + x_2 - 2x_3}$$

Геометрическое значеніе этого случая есть слѣдующее: если A', B', C' будутъ точки взятыя на прямой такъ что A' есть точка сопряженно гармоническая точкѣ A относительно точекъ B и C; B' есть сопряженно-гармоническая точкѣ B относительно C и A, и C' есть сопряженно-гармоническая точкѣ C относительно A и B, то будемъ имѣть слѣдующія значенія для s и k:

$$s = \frac{OA + OA'}{2} \quad , \quad k = \frac{OA - OA'}{2}$$

§ 265. *Способъ 6.* Способъ этотъ принадлежитъ Лагранжу; онъ основанъ на томъ свойствѣ, что существуютъ функціи четырехъ буквъ или четырехъ корней биквадратнаго уравненія, которыя, при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ четырехъ буквъ, имѣютъ только три различныя значенія. Таковы функціи, входящія въ составъ корней разрѣшающаго кубическаго уравненія:

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)^2 \quad , \quad x_1x_2 + x_3x \quad , \quad \frac{x_2x_3 - x_1x}{x_2 + x - x_2 - x_3} \quad , \text{ и т. д.} \qquad (90)$$

Возьмемъ первую изъ этихъ функцій въ формѣ:

$$u = \frac{(x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3+\alpha^3x_4)^2}{4} \qquad (91)$$

гдѣ $\alpha = -1$. Три значенія этой функціи будутъ:

$$u_1 = \frac{(x_2+x_3-x_1-x_4)^2}{4^2}$$

$$u_2 = \frac{(x_3+x_1-x_2-x_4)^2}{4^2} \qquad (92)$$

$$u_3 = \frac{(x_1+x_2-x_3-x_4)^2}{4^2}$$

и такъ какъ:

$$(x_2+x_3-x_1-x_4)^2 = \Sigma x_1^2 + 2\theta_1 - 2\theta_2 - 2\theta_3$$

$$\Sigma (x_1-x_2)^2 = 3\,\Sigma x_1^2 - 2\theta_1 = 2\theta_2 - 2\theta_3 = -48\frac{H}{a_0^2} \quad \text{(см. § 145, пр. 7).}$$

гдѣ (§ 261):

$$\theta_1 = x_2x_3 + x_1x_4 \quad , \quad \theta_2 = x_3x_1 + x_2x_4 \quad , \quad \theta_3 = x_1x_2 + x_3x_4$$

то найдемъ:

$$u_1 = \frac{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{12} - \frac{H}{a_0^2}$$
$$u_2 = \frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3}{12} - \frac{H}{a_0^2} \qquad (93)$$
$$u_3 = \frac{2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2}{12} - \frac{H}{a_0^2}$$

слѣдовательно:

$$u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{3H}{a_0^2}$$

Но

$$\sum (2\theta_2 - \theta_3 - \theta_1)(2\theta_3 - \theta_1 - \theta_3) =$$
$$= -3(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_2\theta_3 - \theta_1\theta_3 - \theta_1\theta_2) = -\tfrac{3}{2}\sum(\theta_2 - \theta_3)^2$$

и

$$\sum (\theta_2 - \theta_3)^2 = \frac{24J_1}{a_0^2}$$

откуда:

$$u_2u_3 + u_3u_1 + u_1u_2 = \frac{3H^3}{a_0^4} - \frac{1}{96}\sum(\theta_3 - \theta_3)^2 = \frac{3H^2}{a_0^4} - \frac{J_1}{4a_0^2}$$

Но также имѣемъ:

$$u_1u_2u_3 = \left(\frac{32G}{64a_0^3}\right)^2 = \frac{G^3}{4a_0^6}$$

откуда уравненіе коего корни суть u_1, u_2, u_3 есть:

$$(a_0^2u)^3 + 3H(a_0^2u)^2 + \left(3H - \frac{a_0^2J_1}{4}\right)(a_0^2u) - \frac{G^2}{4} = 0$$

подставляя вмѣсто G^2 его значеніе (17'), найдемъ:

$$4(a_0^2u + H)^3 - a_0^2J_1(a_0^2u + H) + a_0^2J_2 = 0$$

полагая $a_0^2u + H = a_0^2t$ найдемъ разрѣшающее, уже извѣстное, уравненіе:

$$4a_0^3t^3 - a_0J_1t + J_2 = 0 \qquad (94)$$

Пусть корни этого уравненія будутъ: t_1, t_2, t_3; изъ уравненія

$$a_0^2u+H=a_0^2t$$

опредѣлимъ три значенія u_1, u_2, u_3, которыя послужатъ для опредѣленія корней x_1, x_2, x_3, x_4.—Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій (92) имѣемъ:

$$-x_1+x_2+x_3-x_4=4\sqrt{u_1}\ ,\ x_1-x_2+x_3-x_4=4\sqrt{u_2}\ ,\ x_1+x_2-x_3-x_4=4\sqrt{u_3}$$

присовокупляя къ этимъ уравненіямъ еще уравненія:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{4a_1}{a_0}$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_0x_1+a_1}{a_0}&=-\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}\\ \frac{a_0x_2+a_1}{a_0}&=+\sqrt{u_1}-\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}\\ \frac{a_0x_3+a_1}{a_0}&=+\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3}\\ \frac{a_0x_4+a_1}{a_0}&=-\sqrt{u_1}-\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3}\end{aligned}\right\}\qquad(95)$$

Изъ предъидущихъ значеній радикаловъ $\sqrt{u_1}$, $\sqrt{u_2}$, $\sqrt{u_3}$ имѣемъ уравненіе:

$$\sqrt{u_1}\sqrt{u_2}\sqrt{u_3}=\frac{G}{2a_0^2}$$

которое опредѣляетъ одинъ изъ радикаловъ въ функціи двухъ другихъ.

§ 266. Для рѣшенія биквадратнаго уравненія можетъ служить также уравненіе (45):

$$(a_0\theta-2a_2)^3-4J_1(a_0\theta-2a_2)+16J_2=0$$

или:

$$t^3-4J_1t+16J_2=0$$

котораго корни суть три значенія функціи $x_1x_2+x_3x_4$:

$$\theta_1=x_2x_3+x_1x_4\quad,\quad\theta_2=x_3x_1+x_2x_4\quad,\quad\theta_3=x_1x_2+x_3x_4$$

Возьмемъ первое значеніе:

$$\theta_1=x_2x_3+x_1x_4$$

но по свойству уравненій имѣемъ:

$$x_2x_3 \,.\, x_1x_4 = \frac{a_4}{a_0}$$

слѣдовательно x_2x_3, x_1x_4 суть корни квадратнаго уравненія:

$$z^2 - \theta_1 z + \frac{a_4}{a_0} = 0$$

Пусть z_1 и z_2 суть корни этого уравненія, то:

$$x_2x_3 = z_1 \quad , \quad x_1x_4 = z_2$$

Но имѣемъ:

$$x_2x_3(x_1+x_4) + (x_2+x_3)x_1x_4 = -\frac{a_3}{a_0}$$

слѣдовательно:

$$z_1(x_1+x_4) + z_2(x_2+x_3) = -\frac{a_3}{a_0}$$

присовокупляя къ этому уравненію, уравненіе:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_1}{a_0}$$

опредѣлимъ изъ нихъ:

$$x_1 + x_4 = \frac{a_3 - a_1 z_2}{a_0(z_2 - z_1)} = u_1 \quad , \quad x_2 + x_3 = \frac{a_1 z_1 - a_3}{a_0(z_1 - z_1)} = u_2$$

имѣя числовыя значенія:

$$x_1 + x_4 = u_1 \quad , \quad x_1x_4 = z_1 \quad , \quad x_2 + x_3 = u_2 \quad , \quad x_2x_3 = z_2$$

составимъ пару квадратныхъ уравненій коихъ корни суть x_1 и x_4, x_2 и x_3.

§ 267. Скажемъ нѣсколько словъ о функціяхъ составленныхъ изъ θ_1, θ_2, θ_3:

$$\theta_1 = x_2x_3 + x_1x_4 \quad , \quad \theta_2 = x_3x_1 + x_2x_4 \quad , \quad \theta_3 = x_1x_2 + x_3x_4 \qquad (96)$$

такъ какъ функціи L, M (§ 240, 39) составлены изъ x_1, x_2, x_3 и α, α^2, α^3. Мы эти функціи также означимъ чрезъ L и M, именно:

$$\begin{aligned} L &= (x_2x_3+x_1x_4) + \alpha(x_3x_1+x_2x_4) + \alpha^2(x_1x_2+x_3x_4) \\ M &= (x_2x_3+x_1x_4) + \alpha^2(x_3x_1+x_2x_4) + \alpha(x_1x_2+x_3x_4) \end{aligned} \qquad (97)$$

Если t_1, t_2, t_3 суть корни разрѣшающаго кубическаго уравненія:

$$4a_0t^3 - a_0J_1t + J_2 = 0 \tag{98}$$

то мы видѣли выше (§ 261, 43), что:

$$\theta_1 = 4t_1 + \frac{2a_2}{a_0} \quad , \quad \theta_2 = 4t_2 + \frac{2a_2}{a_0} \quad , \quad \theta_3 = 4t_3 + \frac{2a_3}{a_0} \tag{99}$$

слѣдовательно функціи L и M могутъ быть написаны въ формѣ:

$$\tfrac{1}{4}L = t_1 + \alpha t_2 + \alpha^2 t_3 \quad , \quad \tfrac{1}{4}M = t_1 + \alpha^2 t_2 + \alpha t_3 \tag{100}$$

эти функціи также важны въ теоріи биквадратнаго уравненія, какъ функціи L и M важны въ теоріи кубическаго уравненія, такъ какъ это суть простѣйшія функціи четырехъ корней биквадратнаго уравненія, которыя имѣютъ только два значенія при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ четырехъ корней. Онѣ суть корни квадратнаго уравненія, разрѣшающаго кубическаго (98), и входятъ въ составъ всѣхъ, данныхъ выше, рѣшеній биквадратнаго уравненія.

Примѣръ 1. Показать, что L и M суть функціи разностей корней: x_1, x_2, x_3, x_4?

Замѣчая, что $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ и измѣняя корни x_1, x_2, x_3, x_4 на $x_1 + h$, $x_2 + h$, $x_3 + h$, $x_4 + h$, мы увидимъ, что функціи L и M не измѣняются.

Примѣръ 2. Найти произведеніе квадратовъ разностей корней x_1, x_2, x_3, x_4 въ функціи коэфиціентовъ биквадратнаго уравненія, т. е. призначную?

Изъ выраженій L и M въ функціи t_1, t_2, t_3 мы легко находимъ:

$$\begin{aligned} 12t_1 &= L + M \quad , & L - M &= (x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(\alpha^2 - \alpha) \\ 12t_2 &= \alpha^2 L + \alpha M \quad , & \alpha^2 L - \alpha M &= (x_3 - x_1)(x_2 - x_4)(\alpha^2 - \alpha) \\ 12t_3 &= \alpha L + \alpha^2 M \quad , & \alpha L - \alpha^2 M &= (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(\alpha^2 - \alpha) \end{aligned} \tag{101}$$

Перемножая эти уравненія и замѣчая, что t_1, t_2, t_3 суть корни уравненія (98), найдемъ:

$$L^3 + M^3 = -432\frac{J_2}{a_0^3} \tag{102}$$

$$L^3 - M^3 = -\sqrt{27}(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4) \tag{103}$$

Возвышая въ квадратъ три вторыя изъ уравненій (101) и соображаясь съ

(§ 145, пр. 4), найдемъ:

$$2LM = (x_2-x_3)^2(x_1-x_4)^2+(x_3-x_1)^2(x_2-x_4)^2+(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2 = 24\frac{J_1}{a_0^2} \quad (104)$$

и такъ какъ:

$$(L^3-M^3)^2 = (L^3+M^3)^2-4L^3M^3$$

то, подставляя въ это тождество найденныя выраженія (102), (103) и (104), найдемъ:

$$a_0^6(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2 =$$

$$= 256\,(J_1^3-27J_2^2) = 256\,\triangle_4$$

гдѣ:

$$\triangle_4 = J_1^3-27J_2^2$$

есть призначная биквадратнаго уравненія.

Примѣръ 3. Показать, сравнивая результаты настоящаго параграфа съ результатами § 240, что можно распространить ихъ на биквадратное уравненіе, замѣщая разности:

$$x_2-x_3 \quad , \quad x_3-x_1 \quad , \quad x_1-x_2$$

произведеніями разностей:

$$-(x_2-x_3)(x_1-x_4) \quad , \quad -(x_3-x_1)(x_2-x_4) \quad , \quad -(x_1-x_2)(x_3-x_4)$$

а H и G выраженіями $-\frac{4}{3}J_1$ и $16J_2$.

§ 268. Въ § 147 мы рѣшали задачу какъ составить уравненіе, коего корни были бы квадраты разностей корней $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ уравненія:

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ \ldots\ldots\ (x-x_n) = 0 \quad (105)$$

теперь рѣшимъ ту же задачу иначе и приложимъ ее къ биквадратному уравненію. Подставимъ въ уравненіе (105) вмѣсто x величину $x+x_r$ и положимъ послѣдовательно $r = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, то найдемъ:

$$f(x+x_1) = x(x+x_1-x_2)(x+x_1-x_3)\ \ldots\ (x+x_1-x_n)$$

$$f(x+x_2) = x(x+x_2-x_1)(x+x_2-x_3)\ \ldots\ (x+x_2-x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

$$f(x+x_n) = x(x+x_n-x_1)(x+x_n-x_2)\ \ldots\ (x+x_n-x_{n-1})$$

а такъ какъ:

$$f(x_r+x)=f(x_r)+xf'(x_r)+\frac{x^2}{1.2}f''(x_r)+\ldots\ldots+x^n \qquad (107)$$

и $f(x_r)=0$, то будемъ имѣть:

$$\frac{1}{x}f(x_r+x)=f'(x_r)+\frac{x}{1.2}f''(x_r)+\ldots\ldots+x^{n-1} \qquad (108)$$

Означимъ вторую часть уравненія чрезъ $\Phi(x, x_2)$ и перемножимъ уравненія (106), то найдемъ:

$$\Phi(x, x_1)\Phi(x, x_2)\ \ldots\ldots\ \Phi(x, x_n)=$$

$$=\left\{x^2-(x_1-x_2)^2\right\}\left\{x^2-(x_1-x_3)^2\right\}\ \ldots\ \left\{x^2-(x_{n-1}-x_n)^2\right\} \qquad (109)$$

Слѣдовательно, чтобы составить уравненія въ квадратахъ разностей корней должно перемножить n множителей $\Phi(x, x_1)$, $\Phi(x, x_2)$, ... и подставить вмѣсто симметрическихъ функцій корней, входящихъ въ произведеніе ихъ выраженія въ коэфиціентахъ уравненія. Полученное произведеніе будетъ $n(n-1)$ степени, которое понизится до $\frac{n(n-1)}{2}$, измѣняя x^2 на x. Но можно прямо найти произведеніе $\frac{n(n-1)}{2}$ множителей второй части уравненія (109) и подставить вмѣсто симметрическихъ функцій ихъ выраженія въ коэфиціентахъ.

Приложимъ этотъ послѣдній способъ къ биквадратному уравненію:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \qquad (110)$$

коего корни суть x_1, x_2, x_3, x_4. Задача эта состоитъ въ томъ, чтобы выразить произведеніе:

$$\left\{z-(x_2-x_3)^2\right\}\left\{z-(x_3-x_1)^2\right\}\left\{z-(x_1-x_2)^2\right\}\left\{z-(x_1-x_4)^2\right\}\left\{z-(x_2-x_4)^2\right\}\left\{z-(x_3-x_4)^2\right\} \quad (111)$$

въ функціи коэфиціентовъ уравненія (110).

Для этого сгруппируемъ шесть множителей произведенія (111) попарно такъ, чтобы каждая пара заключала всѣ четыре корня; означимъ произведенія этихъ паръ чрезъ Π_1, Π_2, Π_3 и выразимъ произведеніе каждой пары въ корняхъ разрѣшающаго кубическаго уравненія, а затѣмъ произведеніе $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ выразимъ въ функціи a_0, H, J_1 и J_2.

Возьмемъ:

$$\Pi_1=z^2-\left\{(x_2-x_3)^2+(x_1-x_4)^2\right\}z+(x_2-x_3)^2(x_1-x_4)^2$$

Въ § 265 положено:

$$u_1=\left(\frac{x_4+x_3-x_1-x_2}{4}\right)^2\ ,\quad u_2=\left(\frac{x_3+x_1-x_2-x_4}{2}\right)^2\ ,\quad u_3=\left(\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}\right)^2$$

откуда:

$$x_2+x_3-x_1-x_4=4\sqrt{u_1}\ ,\quad x_3+x_1-x_2-x_4=4\sqrt{u_2}\ ,\quad x_1+x_2-x_3-x_4=4\sqrt{u_3}$$

вычитая и складывая послѣдовательно два послѣднія уравненія, найдемъ:

$$(x_2-x_3)^2=4(\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3})\quad ,\quad (x_1-x_4)^2=4(\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3})$$

но:

$$u_1=t_1-\frac{H}{a_0^2}\ ,\quad u_2=t_2-\frac{H}{a_0^2}\ ,\quad u_3=t_3-\frac{H}{a_0^2}$$

гдѣ t_1, t_2, t_3 суть корни разрѣшающаго кубическаго уравненія (10) и (11), слѣдовательно:

$$(x_2-x_3)^2=4\left\{\sqrt{t_2-\frac{H}{a_0^2}}-\sqrt{t_3-\frac{H}{a_0^2}}\right\}^2$$

$$(x_1-x_4)^2=4\left\{\sqrt{t_2-\frac{H}{a_0^2}}+\sqrt{t_2-\frac{H}{a_0^2}}\right\}^2$$

Но мы имѣемъ:

$$t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2=t_2t_3-(t_2+t_3)^2=-3t_2t_3-(t_2-t_3)^2=-\frac{J_1}{4a_0^2}$$

слѣдовательно:

$$\Pi_1=z^2+\left(8t_1+16\frac{H}{a_0^2}\right)z+\frac{4J_1}{a_0^2}-48t_2t_3$$

для удобства вычисленій положимъ:

$$16H=a_0^2P\ ,\quad 4J_1=a_0^2Q\ ,\quad 16J_2=a_0^3R\ ,\quad z^2+Pz+Q=\psi$$

слѣдовательно будемъ имѣть по раздѣленіи на 8^3:

$$\left(\frac{\psi}{8}+t_1z-6t_2t_3\right)\left(\frac{\psi}{8}+t_2z-6t_1t_3\right)\left(\frac{\psi}{8}+t_3z-6t_1t_2\right)=\Pi_1\Pi_2\Pi_3$$

перемножая и замѣщая симметрическія функціи корней t_1, t_2, t_3 функціями коэфиціентовъ, разрѣшающаго кубическаго уравненія, найдемъ:

$$\psi^3+3Q\psi^2-(4Qz^2+18Rz)\psi-(8Rz^3+12Q^2z^2+36QRz+27R^2)=0$$

возстановляя значеніе ψ получимъ:

$$\psi^6+3Pz^5+(3P^2+2Q)z^4+(P^3+8PQ-26R)z^3+$$
$$+(6P^2Q-7Q^2-18PR)z^2+9Q(PQ-6R)z+4Q^3-27R^2=0$$

или въ функціи a_0, H и неизмѣнныхъ J_1 и J_2:

$$a_0^6z^6+48a_0^4Hz^5+8a_0^2(96H^2+a_0^2J_1)z^4+32(128H^3+16a_0^2HJ_1-13a_0^3J_2)z^3+$$
$$+16(384H^2J_1-7a_0^2J_1^2-288a_0HJ_2)z^2+1152(2HJ_1-3a_0J_2)J_1z+$$
$$+256(J_1^3-27J_2^2)=0$$

§ 269. *Признаки свойствъ корней биквадратнаго уравненія.* Выраженіе:

$$\Delta_4=J_1^3-27J_2^2 \tag{112}$$

есть, какъ выше видѣли *признаачая* биквадратнаго уравненія. Знакъ признаачной не можетъ вполнѣ опредѣлить характеръ корней биквадратнаго уравненія, какъ въ кубическомъ уравненіи, но нѣкоторыя заключенія можно сдѣлать.

1. Если Δ_4 будетъ количество отрицательное, то биквадратное уравненіе имѣетъ два дѣйствительные и два мнимые корня.

Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе:

$$(x_2-x_3)^2(x_3-x_4)^2 \ldots\ldots\ldots = 256\,\frac{\Delta_4}{a_0^6}$$

тогда только будетъ величина положительная, когда всѣ корни дѣйствительные или всѣ мнимые.

2. Если Δ_4 есть количество положительное, то корни будутъ всѣ дѣйствительные или всѣ мнимые, такъ какъ произведеніе $(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2\ldots$ будетъ только тогда отрицательнымъ, когда уравненіе будетъ имѣть два корня дѣйствительные и два мнимые.

3. Если $\Delta_4=0$, то уравненіе имѣетъ два равные корня.

4. Если $J_1=0$ и $J_2=0$, то уравненіе имѣетъ три равные корня. Это легко видѣть изъ выраженій корней уравненій въ функціи корней разрѣшающаго кубическаго уравненія.

§ 270. *Свойства биквадратныхъ уравненій въ связи съ неизмѣнными и соизмѣнными.* Биквадратная форма:

$$U_4=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4 \tag{113}$$

имѣетъ двѣ неизмѣнныя J_1 и J_2 и двѣ соизмѣнныя H_x и G_x, первая изъ нихъ 4-й, а вторая 6-й степени, какъ видно выше (§ 199). Такъ какъ квадратные множители соизмѣнной G_x входятъ постоянно въ изслѣдованія, то мы займемся разысканіемъ этихъ множителей въ функціи корней биквадратной формы (113) и ихъ свойствами.

Множители функціи:

$$G = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3 \tag{114}$$

выраженные въ корняхъ x_1, x_2, x_3, x_4 какъ видѣли выше (§ 192) суть:

$$x_2 + x_3 - x_1 - x_4 \quad , \quad x_3 + x_1 - x_2 - x_4 \quad , \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \tag{115}$$

слѣдовательно множители соизмѣнной G_x получаются подстановленіемъ:

$$\frac{1}{x-x_1} \ , \ \frac{1}{x-x_2} \ , \ \frac{1}{x-x_3} \ , \ \frac{1}{x-x_4} \tag{116}$$

вмѣсто x_1, x_2, x_3, x_4 и помноженіемъ каждаго множителя на $\frac{U_4}{a_0}$ чтобы избѣжать дробей. Означая эти множители чрезъ u, v и w, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} a_0 u &= U_4\left(\frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} - \frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_4}\right) \\ a_0 v &= U_4\left(\frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_4}\right) \\ a_0 w &= U_4\left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_3} - \frac{1}{x-x_4}\right) \end{aligned} \tag{117}$$

Эти выраженія расположенныя по степенямъ x-са будутъ:

$$\begin{aligned} u &= (x_2+x_3-x_1-x_4)x^2 - 2(x_2x_3-x_1x_4)x + x_2x_3(x_1+x_4) - x_1x_4(x_2+x_3) \\ v &= (x_3+x_1-x_2-x_4)x^2 - 2(x_3x_1-x_2x_4)x + x_3x_1(x_2+x_4) - x_2x_4(x_1+x_3) \\ w &= (x_1+x_2-x_3-x_4)x^2 - 2(x_1x_2-x_3x_4)x + x_1x_2(x_3+x_4) - x_3x_4(x_1+x_2) \end{aligned} \tag{118}$$

слѣдовательно:

$$32G_x = a_0^3 uvw \tag{119}$$

Легко найти изъ формулъ (117):

$$\begin{aligned} v &= (x_1-x_4)(x-x_2)(x-x_3) - (x_2-x_3)(x-x_1)(x-x_4) \\ w &= (x_1-x_4)(x-x_2)(x-x_3) + (x_2-x_3)(x-x_1)(x-x_4) \end{aligned} \tag{120}$$

изъ этихъ и подобныхъ имъ уравненій будемъ имѣть:

$$\frac{v^2-w^2}{\theta_2-\theta_3}=\frac{w^2-u^2}{\theta_3-\theta_1}=\frac{u^2-v^2}{\theta_1-\theta_2}=\frac{4U_4}{a_0} \tag{121}$$

гдѣ θ_1, θ_2, θ_3 имѣютъ значеніе (§ 226, (67')), слѣдовательно:

$$(\theta_2-\theta_3)u^2+(\theta_3-\theta_1)v^2+(\theta_1-\theta_2)w^2=0 \tag{122}$$

откуда:

$$-(\theta_2-\theta_3)u^2=\left(w\sqrt{\theta_1-\theta_3}+v\sqrt{\theta_1-\theta_3}\right)\left(w\sqrt{\theta_1-\theta_2}-v\sqrt{\theta_1-\theta_3}\right)$$

Изъ этого уравненія видимъ, что оба множителя второй части суть полные квадраты, поэтому можно положить:

$$\begin{aligned} w\sqrt{\theta_1-\theta_2}+v\sqrt{\theta_1-\theta_3}&=2u_1^2\\ w\sqrt{\theta_1-\theta_2}-v\sqrt{\theta_1-\theta_3}&=2u_2^2 \end{aligned} \tag{123}$$

откуда имѣемъ:

$$w\sqrt{\theta_1-\theta_2}=u_1^2+u_2^2\ ,\quad v\sqrt{\theta_1-\theta_3}=u_1^2-u_2^2\ ,\quad u\sqrt{\theta_3-\theta_2}=2u_1u_2 \tag{124}$$

изъ этихъ уравненій заключаемъ, что квадратные множители u, v, w соизмѣнной G_x взаимно-гармоничны.

§ 271. Соизмѣнная гессевская H_x можетъ быть выражена квадратными множителями соизмѣнной G_x.

Въ § 192 нашли:

$$\Sigma(x_1-x_2)^2(x-x_3)^2(x-x_4)^2=-48\frac{H_x}{a_0^2} \tag{125}$$

соединяя части попарно и замѣчая, что:

$$\Sigma(x_2-x_3)(x_1-x_4)U_4=0$$

и

$$\Sigma(x_1-x_2)^2(x-x_3)^2(x-x_4)^2=$$
$$=\Sigma\left\{(x_2-x_3)(x-x_1)(x-{}_4)+(x_1-x_4)(x-x_2)(x-x_3)\right\}^2$$

а выраженія находящіяся въ скобкахъ суть u, v и w, слѣдовательно:

$$-48\frac{H_x}{a_0^2}=u^2+v^2+w^2 \tag{126}$$

искомое выраженіе функціи H_x.

§ 272. Биквадратную форму (113) можно выразить квадратными множителями функціи G_x.

Изъ уравненій (121) можно получить симметрическое выраженіе формы U_4.

Подставляя въ эти уравненія вмѣсто θ_1, θ_2, θ_3 ихъ выраженія въ функціи корней уравненія (99):

$$4s^3 - J_1 s + J_2 = 0$$

гдѣ $s = a_0 t$, найдемъ:

$$\begin{aligned} a_0^2(v^2 - w^2) &= 16(s_2 - s_3)U_4 \\ a_0^2(w^2 - u^2) &= 16(s_3 - s_1)U_4 \\ a_0^2(u^2 - v^2) &= 16(s_1 - s_2)U_4 \end{aligned} \tag{127}$$

Изъ этихъ уравненій, съ помощью выраженія H_x (126), найдемъ:

$$\begin{aligned} (a_0 u)^2 &= 16\,(s_1 U_4 - H_x) \\ (a_0 v)^2 &= 16\,(s_2 U_4 - H_x) \\ (a_0 w)^2 &= 16\,(s_3 U_4 - H_x) \end{aligned} \tag{128}$$

Если положимъ:

$$u^2 = \Delta_1 X^2 \quad , \quad v^2 = \Delta_2 Y^2 \quad , \quad w^2 = \Delta_3 Z^2 \tag{129}$$

гдѣ:

$$\Delta_1 = -(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3) \ , \ \Delta_2 = -(\theta_2 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_1) \ , \ \Delta_3 = -(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2) \tag{130}$$

Цѣль этого преобразованія замѣстить u, v, w квадратными формами, коихъ призначныя были-бы равны единицѣ. Формы X, Y, Z опредѣляемыя уравненіями удовлетворяютъ этой цѣли. Въ самомъ дѣлѣ, если Δ_1 есть призначная формы u, то имѣемъ:

$$\Delta_1 = (x_2 + x_3 - x_1 - x_4)\left\{x_2 x_3 (x_1 + x_4) - x_1 x_3 (x_2 + x_4)\right\} - (x_2 x_3 - x_1 x_4)^2$$

выраженіе, которому можно дать форму:

$$(x_2 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 x_3 + x_1 x_4) - (x_3 x_1 + x_2 x_4)(x_1 x_2 + x_3 x_4) - (x_2 x_3 + x_1 x_4)^2$$

изъ котораго легко найдемъ, какъ выше:

$$\Delta_1 = -(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3)$$

подобныя же выраженія найдемъ и для Δ_2 и Δ_3.

Подставляя выраженія (129) въ (128), найдемъ:

$$\begin{aligned}(s_1-s_2)(s_1-s_3)X^2 &= H_x - s_1 U_4\\(s_2-s_3)(s_2-s_1)Y^2 &= H_x - s_2 U_4\\(s_3-s_1)(s_3-s_2)Z^2 &= H_x - s_3 U_4\end{aligned} \qquad (131)$$

изъ этихъ уравненій легко вывесть слѣдующія выраженія для U_4 и H_x и еще тождество, связывающе X, Y, Z:

$$\begin{aligned}H_x &= s_1^2 X^2 + s_2^2 Y^2 + s_3^2 Z^2\\-U_4 &= s_1 X^2 + s_2 Y^2 + s_3 Z^2\\0 &= X^2 + Y^2 + Z^2\end{aligned} \qquad (122)$$

гдѣ X, Y, Z суть три взаимно-гармоническія квадратныя формы, коихъ призначныя равны единицѣ, какъ было показано выше.

Функція G_x можетъ быть выражена въ функціи X, Y, Z слѣдующимъ образомъ:

Мы выше нашли (§ 270, 119):

$$32G_x = a_0^3 uvw$$

и

$$u^2v^2w^2 = (\theta_2-\theta_3)^2(\theta_3-\theta_1)^2(\theta_1-\theta_2)^2 X^2Y^2Z^2 = \frac{256}{a_0^6}(J_1^3-27J_2^2)X^2Y^2Z^2 \qquad (133)$$

слѣдовательно:

$$G_x = \tfrac{1}{2}\sqrt{J_1^3-27J_2^2}\,.\,XYZ \qquad (134)$$

§ 273. *Способъ 7.* Рѣшеніе биквадратнаго уравненія по этому способу состоитъ въ слѣдующемъ:

Изъ уравненій (122):

$$-U_4 = s_1X^2 + s_2Y^2 + s_3Z^2 \quad , \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

находимъ:

$$\begin{aligned}U_4 &= (s_1-s_2)Y^2 + (s_1-s_3)Z^2\\U_4 &= (s_2-s_3)Z^2 + (s_2-s_1)X^2\\U_4 &= (s_3-s_1)X^2 + (s_3-s_2)Y^2\end{aligned}$$

подставляя въ эти уравненія выраженія X^2, Y^2, Z^2 (131) и разлагая эти выраженія для U_4 на множители, мы будемъ имѣть три способа рѣшенія U_4, зависящіе отъ рѣшенія уравненія:

$$4s^3 - J_1 s + J_2 = 0$$

Рѣшеніе биквадратнаго уравненія представлено геометромъ Келе иначе, въ симметрической формѣ, это рѣшеніе можно легко получить изъ выраженій, данныхъ выше, для U_4 и H_x.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$l(a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2)+m(b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2)+n(c_0x^2+2c_1xy+c_2y^2)$$

есть полный квадратъ, если:

$$\sum l^2(a_0a_2-a_1^2)+\sum mn(b_0c_2+b_2c_0-2b_1c_1)=0$$

а форма:

$$lX+mY+nZ$$

есть полный квадратъ, если $l^2+m^2+n^2=0$, X, Y, Z суть взаимно-гармоническія формы, коихъ призначныя равны единицѣ. Рѣшеніе формы $U_4=0$, сводится на опредѣленіе количествъ l, m, n, такъ чтобы форма $lX+mY+nZ$ или:

$$l\sqrt{s_2-s_3}\sqrt{H_x-s_1U_4}+m\sqrt{s_3-s_1}\sqrt{H_x-s_2U_4}+n\sqrt{s_1-s_2}\sqrt{H_x-s_3U_4}$$

будучи полнымъ квадратомъ, обращалась въ нуль вмѣстѣ съ формою U_4, или которая-бы удовлетворяла уравненіямъ:

$$l\sqrt{s_2-s_3}+m\sqrt{s_3-s_1}+n\sqrt{s_1-s_2}=0 \quad , \quad l^2+m^2+n^2=0$$

Эти уравненія вполнѣ удовлетворяются, если:

$$\frac{l}{\sqrt{s_2-s_3}}=\frac{m}{\sqrt{s_3-s_1}}=\frac{n}{\sqrt{s_1-s_2}}$$

слѣдовательно:

$$(s_2-s_3)\sqrt{H_x-s_1U_4}+(s_3-s_1)\sqrt{H_x-s_2U_4}+(s_1-s_2)\sqrt{H_x-s_3U_4} \quad (135)$$

есть квадратъ линейнаго множителя формы U_4.

Если-бы требовалось рѣшить биквадратное уравненіе:

$$\varkappa U_4-\lambda H_x=0$$

то точно такимъ же образомъ видно, что:

$$l\sqrt{s_2-s_3}\sqrt{H_x-s_1U_4}+m\sqrt{s_3-s_1}\sqrt{H_x-s_2U_4}+\sqrt{s_1-s_2}\sqrt{H_x-s_3U_4}$$

будучи полнымъ квадратомъ, должно уничтожиться съ уничтоженіемъ

$\varkappa U_4 - \lambda H_x$ или l, m, n должны быть такъ опредѣлены, чтобы удовлетворить уравненіямъ:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0$$

$$l\sqrt{(s_2-s_3)(\varkappa-s_1\lambda)} + m\sqrt{(s_3-s_1)(\varkappa-s_2\lambda)} + n\sqrt{(s_1-s_2)(\varkappa-s_3\lambda)} = 0$$

эти уравненія удовлетворяются, если:

$$\frac{l}{\sqrt{(s_2-s_3)(\varkappa-s_1\lambda)}} = \frac{m}{\sqrt{(s_3-s_1)(\varkappa-s_2\lambda)}} = \frac{n}{\sqrt{(s_1-s_2)(\varkappa-s_3\lambda)}}$$

слѣдовательно:

$$(s_2-s_3)\sqrt{\varkappa-s_1\lambda}\sqrt{H_x-s_1U_4} + (s_3-s_1)\sqrt{\varkappa-s_2\lambda}\sqrt{H_x-s_2U_4} +$$
$$+ (s_1-s_2)\sqrt{\varkappa-s_3\lambda}\sqrt{H_x-s_3U_4}$$

есть квадратъ линейнаго множителя въ формѣ $\varkappa U_4 - \lambda H_x$.

§ 274. Неизмѣнныя и соизмѣнныя формы:

$$\varkappa U_4 - \lambda H_x \tag{136}$$

Съ помощью уравненій (134)

$$s_1^2X^2 + s_2^2Y^2 + s_3^2Z^2 = H_x$$
$$s_1X^2 + s_2Y^2 + s_3Z^2 = -U_4$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = V = 0$$

можно прибавляя $-\frac{\lambda J_1}{6}V$ къ формѣ (136) преобразовать ее въ форму:

$$R_1X^2 + R_2Y^2 + R_3Z^2$$

гдѣ:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0$$

Если это сдѣлано, то будемъ имѣть слѣдующія величины для R_1, R_2, R_3:

$$3R_1 = \varkappa(2s_1-s_2-s_3) + \lambda(2s_2s_3-s_3s_1-s_1s_2)$$
$$3R_2 = \varkappa(2s_2-s_3-s_1) + \lambda(2s_3s_1-s_1s_2-s_2s_3) \tag{137}$$
$$4R_3 = \varkappa(2s_3-s_1-s_2) + \lambda(2s_1s_2-s_2s_3-s_3s_1)$$

На основаніи подобія формъ:

$$s_1X^2 + s_2Y^2 + s_3Z^2 \quad \text{и} \quad R_1X^2 + R_2Y^2 + R_3Z^2$$

найдемъ неизмѣнныя и соизмѣнныя формы (136), замѣщая просто s_1, s_2, s_3 величинами R_1, R_2, R_3 въ выраженіяхъ неизмѣнныхъ и соизмѣнныхъ формы U_4.—Но мы имѣемъ:

$$J_1 = \tfrac{2}{3}[(s_2-s_3)^2+(s_3-s_1)^2+(s_1-s_2)^2] \quad , \quad J_2 = -4s_1s_2s_3 \qquad (138)$$

и (137):

$$\begin{aligned} R_2 - R_3 &= (s_2-s_3)(\varkappa-\lambda s_1) \\ R_3 - R_1 &= (s_3-s_1)(\varkappa-\lambda s_2) \\ R_1 - R_2 &= (s_1-s_2)(\varkappa-\lambda s_3) \end{aligned} \qquad (139)$$

откуда найдемъ слѣдующія выраженія для неизмѣнныхъ формы (136):

$$J_{1(\varkappa\lambda)} = J_1\varkappa^2 - 3J_2\varkappa\lambda + \frac{J_1^2}{12}\lambda^2$$

$$J_{2(\varkappa\lambda)} = J_2\varkappa^3 - \frac{J_1^2}{6}\varkappa^2\lambda + \frac{J_1J_2}{4}\varkappa\lambda^2 - \frac{54J_2^2-J_1^3}{216}\lambda^3 \qquad (140)$$

Полагая въ этихъ выраженіяхъ $\varkappa=0$, $\lambda=-1$ найдемъ неизмѣнныя гессевской H_x именно:

$$J_{1,H} = \frac{J_1^2}{12} \quad , \quad J_{2,H} = \frac{54J_2^2-J_1^3}{216} \qquad (141)$$

Если мы составимъ соизмѣнныя гессевской $H_{\varkappa\lambda}$ и $G_{\varkappa\lambda}$ разрѣшающаго кубическаго уравненія, сдѣланнаго однороднымъ относительно $\varkappa$ и λ:

$$\Omega = 4\varkappa^3 - J_1\varkappa\lambda + J_2\lambda^2 \qquad (142)$$

то найдемъ:

$$J_{1(\varkappa\lambda)} = -\tfrac{3}{4}H_{(\varkappa\lambda)} \quad , \quad J_{2(\varkappa\lambda)} = \tfrac{1}{16}G_{(\varkappa\lambda)} \qquad (143)$$

Чтобы составить гессевскую формы:

$$\varkappa U_4 - \lambda H_x \qquad (144)$$

преобразуемъ:

$$R_1^2X^2 + R_2^2Y^2 + R_3^2Z^2$$

подстановленіями:

$$s_1^3X^2 + s_2^3Y^2 + s_3^3Z^2 = -\tfrac{1}{4}(J_1U_4 + J_2V) = -\tfrac{1}{4}J_1U_4$$

$$s_1^4X^2 + s_2^4Y^2 + s_3^4Z^2 = +\tfrac{1}{4}(J_1H_x + J_2U_4)$$

первое изъ этихъ уравненій вытекаетъ изъ уравненій:

$$s_1^2 = s_2 s_3 + \tfrac{1}{4} J_1 \quad , \quad s_2^2 = s_1 s_3 + \tfrac{1}{4} J_1 \quad , \quad s_3^2 = s_1 s_2 + \tfrac{1}{4} J_1$$

умноженныхъ на $s_1 X^2$, $s_2 Y^2$, $s_3 Z^2$, а второе изъ перваго, замѣщая X^2, Y^2, Z^2 выраженіями $s_1 X^2$, $s_2 Y^2$, $s_3 Z^2$.

Этимъ способомъ мы найдемъ гессевскую формы (144):

$$H_x\left(4\varkappa^2 - \frac{J_1}{4}\lambda^2\right) + U_4(\tfrac{3}{2} J_1 \varkappa\lambda - J_2\lambda^2) \tag{145}$$

которую можно написать въ формѣ:

$$\frac{4}{3}\left(H_x \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - U_4 \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right) \tag{146}$$

Такъ какъ мы имѣемъ:

$$J_1^3 - 27J_2^2 = 16(s_2 - s_3)^2(s_3 - s_1)^2(s_1 - s_2)^2$$

и

$$G_x = \tfrac{1}{4}\sqrt{J_1^3 - 27J_2^2}\,.\,XYZ$$

то замѣщая s_1, s_2, s_3 количествами R_1, R_2, R_3, найдемъ:

$$J^3_{1(\varkappa\lambda)} - 27J_{2(\varkappa\lambda)} = \Omega^2(J_1^3 - 27J_2^2) \tag{147}$$

$$G_{x(\varkappa,\lambda)} = \Omega G_x \tag{148}$$

Полагая въ (140) $\varkappa = 0$, $\lambda = -1$, найдемъ гессевскую гессевской H_x:

$$-\tfrac{1}{4}(J_1 H_x - 4J_2 U_4) \tag{149}$$

и соизмѣнную G_x, также гессевской, которая будетъ:

$$-J_2 G_x \tag{150}$$

§ 275. *Число неизмѣнныхъ и соизмѣнныхъ биквадратной формы.* Биквадратная форма:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \tag{151}$$

подстановленіемъ $z = a_0x + a_1$ преобразуется въ форму:

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2J_1 - 3H^2 \tag{152}$$

Разсуждая, какъ выше, ясно что функція цѣлая и симметрическая разно-

стей корней уравненія (151) выражается раціонально въ коэфиціентахъ формы (152):

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(H, G, J_1) \qquad (153)$$

Если функція $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ будетъ нечетнаго порядка, то перемѣняя знаки корней будемъ имѣть:

$$2a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(H, G, J_1) - F(H, -G, J_1)$$

откуда видимъ, что вторая часть уничтожается вмѣстѣ съ G, а слѣдовательно:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = GF_0(H, G, J_1)$$

въ функцію F_0G будетъ входить уже въ четной степени, поэтому исключая его съ помощью тождества:

$$-G^2 = 4H^3 - a_0^2HJ_1 + a_0^3J_2 \qquad (154)$$

будемъ имѣть:

$$a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3, a_4) = GF_1(a_0, H, J_1, J_2) \qquad (155)$$

изъ этого уравненія видимъ, что функція φ нечетной степени разностей корней дѣлится (§ 145, пр. 9) на:

$$a_0^3(x_2+x_3-x_1-x_4)(x_3+x_1-x_2-x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4) = 32G \qquad (156)$$

раздѣляя (155) на (156), найдемъ:

$$a_0^{s-3}\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_1(a_0, H, J_1, J_2) \qquad (157)$$

гдѣ φ_1 есть функція четнаго порядка, а F_1 цѣлая раціональная.

Слѣдовательно функція $a_0^s\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ можетъ быть выражена формами:

$$GF(a_0, H, J_1, J_2) \quad \text{или} \quad F(a_0, H, J_1, J_2) \qquad (158)$$

смотря по тому будетъ-ли φ функція нечетнаго или четнаго порядка.

Теперь легко видѣть, что если функція:

$$F(a, H, J_1, J_2)$$

есть неизмѣнная, то она не должна содержать ни a_0, ни H, такъ какъ въ противномъ случаѣ, она измѣняется если a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 замѣстимъ чрезъ a_4, a_3, a_2, a_1, a_0. Функція же нечетнаго порядка:

$$GF(a_1, H, J_1, J_2)$$

не можетъ очевидно дать неизмѣнной. Откуда видимъ, что биквадратная форма имѣетъ *только двѣ* неизмѣнныя J_1 и J_2, а всѣ другія суть раціональныя функціи этихъ двухъ.

Если функціи:

$$GF(a_0, H, J_1, J_2) \quad , \quad F(a_0, H, J_1, J_2)$$

даютъ соизмѣнныя, то эти соизмѣнныя будутъ:

$$G_x F(U_4, H_x, J_1, J_2) \quad , \quad F(U_4, H_x, J_1, J_2)$$

слѣдовательно суть функціи соизмѣнныхъ H_x и G_x. Откуда слѣдуетъ, что биквадратная форма имѣетъ только двѣ соизмѣнныя H_x и G_x, а всѣ другія суть раціональныя функціи этихъ двухъ.

Примѣръ 4. Если биквадратная форма имѣетъ двойной множитель, показать, что и ея гессевская имѣетъ тотъ же двойной множитель, и опредѣлить зависимость между коэфиціентами биквадратной формы въ томъ случаѣ, когда ея гессевская тождественна съ нею?

Примѣръ 5. Показать что соизмѣнная G_x биквадратной формы $f(x)$ можетъ быть написана въ формѣ:

$$\Sigma f'(x_1) \frac{\{f(x)\}^2}{(x-x_1)^2}$$

и что, когда биквадратная форма имѣетъ двойной множитель, то этотъ множитель будетъ четвертымъ въ соизмѣнной G_x?

Примѣръ 6. Найти величину опредѣлителя:

$$R = \begin{vmatrix} x_2+x_3-x_1-x_4 & x_2x_3-x_1x_2 & x_2x_3(x_1+x_4)-x_1x_4(x_2+x_3) \\ x_3+x_1-x_2-x_4 & x_3x_1-x_2x_4 & x_3x_1(x_2+x_4)-x_2x_4(x_4+x_1) \\ x_1+x_2-x_3-x_4 & x_1x_2-x_3x_4 & x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2) \end{vmatrix}$$

коего элементы суть коэфиціенты въ квадратныхъ множителяхъ соизмѣнной $G_{4,x}$ биквадратной формы (§ 269).

Если эти элементы означимъ чрезъ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 и т. д. и обратные элементы означимъ чрезъ A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, то будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Ac_1 & 2Ab_1 & -Aa_1 \\ -Bc_2 & 2Bb_2 & -Ba_2 \\ -Cc_3 & 2Cb_3 & -Ca_3 \end{vmatrix}$$

гдѣ:

$$A=(x_2-x_3)(x_1-x_4) \quad , \quad B=(x_3-x_1)(x_2-x_4) \quad , \quad C=(x_1-x_2)(x_3-x_4)$$

слѣдовательно:

$$R^2=-2ABC.R$$

или:

$$R=-2ABC=-2(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$$

ГЛАВА XVIII.

Рѣшеніе двучленныхъ уравненій и дѣленіе окружности.

§ 276. Задача—вписать въ кругъ правильный многоугольникъ даннаго числа сторонъ, или что тоже, раздѣлить окружность на данное число равныхъ частей—была уже предметомъ разысканій древнихъ геометровъ, которые успѣли ее рѣшить для нѣсколькихъ частныхъ случаевъ. Такъ, у Евклида мы находимъ задачи на дѣленіе окружности на двѣ, три, четыре, пять, шесть, десять и пятнадцать частей.

1. Всякій діаметръ дѣлитъ окружность по-поламъ.

2. Два перпендикулярные діаметра дѣлятъ окружность на четыре равныя части.

3. Задача—вписать въ кругъ равноугольный треугольникъ—есть дѣленіе окружности на три равныя части.

4. Задача—построить равнобедренный треугольникъ, въ которомъ углы при основаніи были-бы вдвое больше угла въ вершинѣ—есть дѣленіе окружности на пять частей.

5. Предложеніе, что сторона правильнаго шестиугольника равна радіусу круга, даетъ возможность раздѣлить окружность на шесть равныхъ частей.

6. Зная построеніе пятиугольника, легко строится десятиугольникъ, а вычитая изъ 6-й части окружности ея 10-ю часть, найдемъ 15-ю.

Такъ какъ перпендикуляръ, опущенный изъ центра на сторону правильнаго многоугольника, дѣлитъ дугу, соотвѣтствующую сторонѣ, пополамъ, то элементарнымъ путемъ можно раздѣлить окружность на:

$$2^k \quad , \quad 3.2^k \quad , \quad 5.2^k \quad , \quad 15.2^k$$

частей. Это и всѣ случаи, извѣстные древнимъ геометрамъ, дѣленія окружности на равныя части.

Только спустя двѣ тысячи лѣтъ послѣ этого Гауссъ, введя эту задачу въ область алгебры, рѣшилъ ее вполнѣ въ сочиненіи „disguisitiones arithmeticae", изданномъ въ 1801 г. Это рѣшеніе мы изложимъ въ настоящей главѣ, основываясь на свойствахъ двучленныхъ уравненій, изложенныхъ въ XIV главѣ.

§ 277. Такъ какъ дѣленіе окружности на четное число частей весьма легко, то мы всегда будемъ полагать, что число p, на которое требуется раздѣлить окружность, есть *нечетное и притомъ простое.*

Пусть въ точкахъ $a_1, a_2, \ldots, a_p$ окружность раздѣлена на p равныхъ частей. Если проведемъ какую-нибудь хорду, напр., $a_1 a_3$, то очевидно:

$$a_1 a_3 = 2R \sin \frac{2\pi}{p} \tag{1}$$

гдѣ R есть радіусъ округа, а 2π окружность, коей радіусъ есть единица. Слѣдовательно, задача сводится на опредѣленіе тригонометрической функціи $\sin \frac{2\pi}{p}$ или какой-либо другой, напримѣръ, $\cos \frac{2\pi}{p}$, $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{p}$, такъ какъ эти послѣднія связаны съ первой извѣстной зависимостью.

§ 278. Вмѣсто опредѣленія величинъ:

$$\sin \frac{2\pi}{p} \quad , \quad \cos \frac{2\pi}{p}$$

для дѣленія окружности на p равныхъ частей, удобнѣе опредѣлять выраженіе составное:

$$\cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p} \tag{2}$$

и въ самомъ дѣлѣ, если-бы мы нашли, что:

$$\cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p} = a + bi$$

то имѣли бы:

$$\cos \frac{2\pi}{p} = a \quad , \quad \sin \frac{2\pi}{p} = b$$

Опредѣленіе же составной величины (2) сводится на рѣшеніе двучленнаго уравненія слѣдующимъ образомъ.

Какая-бы дуга φ не была по формулѣ Муавра, всегда имѣемъ:

$$(\cos\varphi + i\sin)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

откуда, полагая $\varphi = \frac{2\pi}{p}$, $n = p$, найдемъ:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^p = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

слѣдовательно выраженіе:

$$x = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p} \tag{3}$$

есть корень двучленнаго уравненія:

$$x^p - 1 = 0 \tag{4}$$

Легко видѣть, что выраженія:

$$\cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p} \tag{5}$$

полагая $k=0$, 1, 2, ..., $p-1$, всѣ удовлетворяютъ уравненію (4) и если они всѣ различны, то это и всѣ p корней уравненія (4).

Что всѣ значенія выраженія (5), полагая $k=0$, 1, 2, ..., $p-1$, различны въ этомъ легко убѣдиться.

Положимъ, что:

$$\cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p} = \cos\frac{2k'\pi}{p} + i\sin\frac{2k'\pi}{p}$$

k и $k' < p$. Изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$\cos\frac{2k\pi}{p} = \cos\frac{2k'\pi}{p}, \quad \sin\frac{2k\pi}{p} = \sin\frac{2k'\pi}{p}$$

откуда:

$$\frac{2(k-k')\pi}{p}$$

должно быть число кратное отъ 2π, что возможно только въ томъ случаѣ, если $k - k'$ дѣлится на p, а это невозможно, такъ какъ по условію k и $k' < p$. И такъ формула:

$$x = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}$$

представляетъ всѣ корни уравненія (4).

Легко видѣть, что:

$$\cos\frac{2\pi k}{p} = \cos\frac{2\pi k'}{p}$$

если:

$$k \equiv k'(Mp)$$

§ 279. Одинъ изъ корней уравненія (4) есть единица, исключая его, найдемъ уравненіе:

$$\frac{x^p-1}{x-1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0 \tag{6}$$

которое имѣетъ всѣ корни мнимые, всѣ они получатся изъ выраженія (5), полагая $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Если въ этомъ уравненіи положимъ:

$$z = x + \frac{1}{x} \quad , \quad p-1 = 2\mu$$

то оно приметъ форму (§ 221, 35):

$$z^\mu + z^{\mu-1} - (\mu-1)z^{\mu-2} - (\mu-2)z^{\mu-3} +$$

$$+ \frac{(\mu-2)(\mu-3)}{1.2} z^{\mu-4} + \frac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.2} z^{\mu-5} = 0 \tag{7}$$

Замѣчая, что если

$$x = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}$$

то:

$$\frac{1}{x} = \cos\frac{2k\pi}{p} - i\sin\frac{2k\pi}{p}$$

будемъ имѣть:

$$z = 2\cos\frac{2k\pi}{p} \tag{8}$$

такова форма корней уравненія (7), какъ видно, всѣ они дѣйствительные. Давая числу k всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots, p-1$, получимъ для (8) $p-1$ значеній, но легко видѣть, что

$$\cos\frac{2k\pi}{p} = \cos\frac{2(p-k)\pi}{p}$$

слѣдовательно выраженіе (8) имѣетъ только μ значеній. Полагая:

$$k = 2,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mu$$

будемъ имѣть всѣ μ корней уравненія (7).

§ 280. Теперь покажемъ, что уравненіе:

$$X = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (9)$$

несократимо, если p есть число простое или какая-нибудь степень простаго числа (§ 226).

Положимъ, что полиномъ X сократимый и что онъ разлагается на два раціональныхъ множителей съ цѣлыми коэфиціентами:

$$X = \varphi(x) . \psi(x)$$

Полагая $x = 1$ будемъ имѣть:

$$p = \varphi(1) . \psi(1)$$

но такъ какъ p есть число простое, то одинъ изъ множителей, напримѣръ $\varphi(1)$ долженъ быть равенъ ± 1, положимъ:

$$\varphi(1) = \pm 1$$

Но функція $\varphi(x)$, какъ множитель функціи X, должна имѣть съ уравненіемъ (9) по крайней мѣрѣ одинъ общій корень, слѣдовательно произведеніе:

$$\varphi(\alpha)\,\varphi(\alpha^2)\,\varphi(\alpha^3)\ldots\varphi(\alpha^{p-1}) = 0$$

откуда уравненіе:

$$\varphi(x)\,\varphi(x^2)\,\varphi(x^3)\ldots\varphi(x^{p-1}) = 0$$

удовлетворяется всѣми корнями уравненія (9), слѣдовательно будетъ дѣлиться на X т. е.:

$$\varphi(x)\,\varphi(x^2)\,\varphi(x^3)\ldots\varphi(x^{p-1}) = F(x)\,(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)$$

гдѣ $F(x)$ есть цѣлая раціональная функція съ цѣлыми коэфиціентами. Полагая въ этомъ тождествѣ $x = 1$ и замѣчая, что первая его часть сдѣлается $\{\varphi(1)\}^{p-1} = (\pm 1)^{p-1} = 1$, найдемъ:

$$1 = F(1) . p$$

уравненіе невозможное, такъ какъ $F(1)$ есть цѣлое число, а p число простое.

Точно также можно показать несократимость уравненія (9), если бы число p было степенью простого числа формы p^{μ}.

Несократимость уравненія (9) была еще доказана *Эйзенштейномъ*, *Штаудтомъ* и другими, данное здѣсь доказательство принадлежитъ *Кронекеру*.

§ 281. Мы выше показали, что дѣленіе окружности на p равныхъ частей (p есть число простое), сводится на рѣшеніе уравненія:

$$X = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0 \qquad (10)$$

и зная (§ 215), что если α есть одинъ изъ корней этого уравненія, то всѣ его корни будутъ:

$$\alpha \ , \ \alpha^2 \ , \ \alpha^3 \ , \ldots , \ \alpha^{p-1} \qquad (11)$$

при этомъ, если:

$$m \equiv m'(Mp)$$

то:

$$\alpha^m = \alpha^{m'} \qquad (11')$$

Изъ теоріи чиселъ извѣстно, что если g есть первообразный корень простаго числа p, то его степени:

$$1 \ , \ g \ , \ g^2 \ , \ g^3 \ , \ldots , \ g^{p-2} \qquad (12)$$

сравниваемы съ числами:

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ldots , \ p-1$$

по модулю p; слѣдовательно вмѣсто показателей $1, 2, 3, \ldots, p-1$ въ ряду (11) можемъ, соображаясь съ (11′), написать показателей (12), т. е. корни уравненія (10) будутъ:

$$\alpha \ , \ \alpha^g \ , \ \alpha^{g^2} \ , \ \alpha^{g^3} \ , \ldots , \ \alpha^{g^{p-2}} \qquad (13)$$

Легко видѣть, что каждый корень въ ряду (13) есть g-ая степень предъидущаго, а первый есть g-ая степень послѣдняго, т. е. каждый изъ корней есть раціональная функція одна и таже, одного, какого нибудь, изъ корней.

Если эту функцію означимъ чрезъ $\varphi(\alpha)$, то α, $\varphi(\alpha)$ $\varphi^2(\alpha)$, $\varphi^3(\alpha), \ldots, \varphi^{p-1}(\alpha)$ будутъ всѣ корни уравненія (10). Это та зависимость, между корнями двучленнаго уравненія, въ силу которой они рѣшаются алгебраически.

§ 282. *Сложныя числа.* Возьмемъ какую-нибудь цѣлую раціональную функцію съ цѣлыми коэфиціентами корней уравненія (10), пусть эта функція будетъ:

$$F(\alpha,\ \alpha^2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha^{p-1}) \tag{14}$$

эту функцію можно написать въ формѣ:

$$b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ .\ .\ .\ .\ + b_m\alpha^m$$

изъ которой, исключая степени α выше $p-1$, съ помощью уравненія $\alpha^p = 1$, можно дать форму:

$$b'_0 + b'_1\alpha + b'_2\alpha^2 + \ .\ .\ .\ .\ + b'_{p-1}\alpha^{p-1}$$

помножая уравненіе (10) на b_0', въ которое предварительно подставлено α вмѣсто x, и вычитая его изъ предъидущей функціи, найдемъ:

$$A_1\alpha + A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 + \ .\ .\ .\ .\ + A_{p-1}\alpha^{p-1}$$

замѣщая наконецъ показателей $1, 2, 3, \ldots, p-1$ степенями первообразнаго корня g, простаго числа p, функція (14) получитъ наконецъ форму, которая называется *нормальною:*

$$f(\alpha) = a_0\alpha + a_1\alpha^g + a_2\alpha^{g^2} + a_3\alpha^{g^3} + \ .\ .\ .\ + a_{p-2}\alpha^{g^{p-2}} \tag{15}$$

такова форма всякой цѣлой раціональной функціи корней уравненія (10).

Если въ эту функцію подставимъ послѣдовательно всѣ корни α, α^2, $\alpha^3, \ldots, \alpha^{p-1}$ и результаты $f(\alpha)$, $f(\alpha^2)$, $f(\alpha^3), \ldots, f(\alpha^{p-1})$ перемножимъ, то получимъ число, независящее отъ корня α, такъ какъ это произведеніе симметрическая функція корней уравненія (10). Это число называется *нормою* функціи $f(x)$ и обозначается $Nf(\alpha)$:

$$Nf(\alpha) = f(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ .\ .\ .\ f(\alpha^{p-1}) \tag{16}$$

Функцію (15) назовемъ *сложнымъ числомъ.*

Примѣръ. Пусть:

$$f(\alpha) = a_0\alpha + a_1\alpha^2$$

будетъ сложное число корней уравненія $x^2 + x + 1 = 0$, его норма будетъ:

$$Nf(\alpha) = f(\alpha).f(\alpha^2) = (a_0\alpha + a_1\alpha^2)(a_0\alpha^2 + a_1\alpha) = a_0^2 - a_0a_1 + a_1^2$$

Сложныя числа $f(\alpha)$, $f(\alpha)^2$, $f(\alpha)^3, \ldots$ называются *сопряженными.* Всякое

сложное число, котораго норма равна единицѣ, т. е.:

$$Nf(\alpha)=1$$

назовемъ *сложной единицей* и означимъ символомъ $E(\alpha)$.

§ 283. *Періоды.* Такъ какъ число p есть простое нечетное, то $p-1$ есть число составное и притомъ четное; положимъ, что оно разлагается на два множителя e и f, т. е. $p-1=e.\mathrm{f}$. Распредѣлимъ корни уравненія (10):

$$\alpha\ ,\ \alpha^{g}\ ,\ \alpha^{g^2}\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha^{g^e}\ ,\ \alpha^{g^{e+1}}\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha^{g^{p-1}}$$

на слѣдующіе e группъ по f членовъ въ каждой:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha & ,\ \alpha^{g^e} & ,\ \alpha^{g^{2e}} & ,\ \alpha^{g^{3e}} & ,\ \ldots & ,\ \alpha^{g^{e(\mathrm{f}-1)}} \\
\alpha^{g} & ,\ \alpha^{g^{e+1}} & ,\ \alpha^{g^{2e+1}} & ,\ \alpha^{g^{3e+1}} & ,\ \ldots & ,\ \alpha^{g^{e(\mathrm{f}-1)+1}} \\
\alpha^{g^2} & ,\ \alpha^{g^{e+2}} & ,\ \alpha^{g^{2e+2}} & ,\ \alpha^{g^{3e+2}} & ,\ \ldots & ,\ \alpha^{g^{2e(\mathrm{f}-1)+2}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha^{g^{e-1}} & ,\ \alpha^{g^{2e-1}} & ,\ \alpha^{g^{3e-1}} & ,\ \alpha^{g^{4e-1}} & ,\ \ldots & ,\ \alpha^{g^{e\mathrm{f}-1}}
\end{array} \qquad (17)$$

Каждая изъ этихъ горизонтальныхъ группъ имѣетъ такое же свойство, какъ и вся группа корней уравненія (10), именно, что каждый изъ корней группы есть g^e-я степень предыдущаго, а первый корень группы есть g^e-я степень послѣдняго. Сложимъ члены каждой группы и суммы означимъ чрезъ $\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_{e-1}$, т. е.:

$$\begin{array}{l}
\eta_0=\alpha+\alpha^{g^e}+\alpha^{g^{2e}}+\ldots+\alpha^{g^{e(\mathrm{f}-1)}} \\
\eta_1=\alpha^{g}+\alpha^{g^{e+1}}+\alpha^{g^{2e+1}}+\ldots+\alpha^{g^{e(\mathrm{f}-1)+1}} \\
\eta_2=\alpha^{g^2}+\alpha^{g^{e+2}}+\alpha^{g^{2e+2}}+\ldots+\alpha^{g^{e(\mathrm{f}-1)+2}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_{e-1}=\alpha^{g^{e-1}}+\alpha^{g^{2e-1}}+\alpha^{g^{3e-1}}+\ldots+\alpha^{g^{e\mathrm{f}-1}}
\end{array} \qquad (18)$$

Эти суммы называются *періодами*, состоящими каждый изъ f членовъ. Очевидно, множители e и f числа $p-1$ были выбраны произвольно.

Вотъ основныя свойства періодовъ (18):

Свойство 1. Если въ періодахъ $\eta_0,\ \eta_1,\ldots,\ \eta_{e-1}$ замѣнимъ корень α однимъ изъ корней, составляющихъ періодъ η_0, то періодъ не измѣняется; если же корень α замѣнимъ какимъ нибудь изъ корней, составляющихъ другіе періоды $\eta_1,\ \eta_2,\ldots,\ \eta_{e-1}$, то періоды кругообразно переходятъ одинъ въ другой.

Такъ, напримѣръ, если α измѣнимъ въ α^g, то очевидно періоды $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$ перейдутъ въ $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}, \eta_0$ и вообще замѣщая корень α корнемъ α^{g^h}, мы найдемъ, что періоды:

$$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$$

перейдутъ въ

$$\eta_h, \eta_{h+1}, \eta_{e-1}, \eta_0, \ldots, \eta_{h-1}$$

Свойство 2. Всѣ періоды $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$ различны и не зависятъ отъ выбора первообразнаго корня g простаго числа p. Это легко показать и мы на этомъ не остановимся.

§ 284. *Предложеніе.* Всякая цѣлая функція корней уравненія (10), которая не измѣняется замѣщеніемъ корня α корнемъ α^{g^e}, есть линейная функція періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$, въ которой коэфиціенты суть цѣлыя функціи коэфиціентовъ данной функціи.

Доказательство. Пусть данная функція будетъ написана въ нормальной формѣ (15):

$$f(\alpha) = a_0\alpha + a_1\alpha^g + a_2\alpha^{g^2} + \ldots + a_{p-2}\alpha^{g^{p-2}} \tag{19}$$

по условію предложенія имѣемъ:

$$f(\alpha) = f(\alpha^{g^e})$$

откуда:

$$f(\alpha) = f(\alpha^{g^e}) = f(\alpha^{g^{2e}}) = \ldots = f(\alpha^{g^{e(f-1)}})$$

Слѣдовательно:

$$f(\alpha) = \frac{1}{f}\left\{f(\alpha) + f(\alpha^{g^e}) + f(\alpha^{g^{2e}}) + \ldots + f(\alpha^{g^{e(f-1)}})\right\}$$

подставляя во 2-ю часть вмѣсто $f(\alpha^{g^h})$ ихъ выраженія (19), легко видѣть, что:

$$f(\alpha) = \frac{1}{f}(a_0\eta_0 + a_1\eta_1 + \ldots + a_{p-2}\eta_{p-2})$$

или, совокупляя равные періоды:

$$f(\alpha) = m_0\eta_0 + m_1\eta_1 + \ldots + m_{e-1}\eta_{e-1}$$

гдѣ $m_0, m_1, \ldots, m_{e-1}$ суть цѣлыя функціи коэфиціентовъ данной функціи.

Изъ настоящаго предложенія непосредственно вытекаютъ весьма важныя слѣдствія:

Слѣдствіе 1. Произведеніе двухъ или нѣсколькихъ равныхъ или неравныхъ періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$ и вообще, каждая цѣлая функція періодовъ есть линейная функція тѣхъ же періодовъ съ коэфиціентами, которыя суть цѣлыя или раціональныя числа функціи коэфиціентовъ данной функціи. Въ самомъ дѣлѣ, такія произведенія и функціи періодовъ удовлетворяютъ условіямъ предъидущаго предложенія, т. е. не измѣняются подстановленіемъ вмѣсто α корня α^{g^e}.

Слѣдствіе 2. Всякая цѣлая функція корней уравненія (10) съ цѣлыми числовыми коэфиціентами, которая не измѣняется, замѣняя корень α корнемъ α^g, есть цѣлое число.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ въ $p-1=e.f$, $e=1$, тогда будемъ имѣть только одинъ періодъ:

$$\eta_0=\alpha+\alpha^g+\alpha^{g^2}+\ldots\ldots+\alpha^{g^{p-2}}$$

коего числовое значеніе есть -1, но въ силу предъидущаго предложенія всякая цѣлая функція, не измѣняющаяся отъ подстановленія вмѣсто α корня α^g, есть линейная функція періода $\eta_0=-1$ т. е. цѣлое число.

Слѣдствіе 3. Цѣлая симметрическая функція періодовъ $\eta_0, \eta, \ldots, \eta_{e-1}$ есть цѣлое число, если ея коэфиціенты цѣлыя числа.

Это слѣдуетъ изъ того, что такая функція не измѣняется отъ подстановленія вмѣсто α корня α^g.

§ 285. Съ помощію предъидущихъ свойствъ легко показать, 1) что періоды $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$ суть корни несократимаго e-ой степени уравненія съ цѣлыми коэфиціентами, 2) что корни этого уравненія т. е. періоды имѣютъ такое же свойство какъ и корни уравненія (10), 3) что всѣ корни могутъ быть получены изъ одного, произвольно выбраннаго, повторяя надъ нимъ одно и тоже раціональное дѣйствіе (§ 281).

Въ самомъ дѣлѣ, если $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$ суть корни уравненія, то это уравненіе будетъ:

$$F(\eta)=(\eta-\eta_0)(\eta-\eta_0)\ldots(\eta-\eta_{e-1}) \tag{20}$$

Коэфиціенты въ этомъ уравненіи суть симметрическія функціи корней, т. е. періодовъ, а слѣдовательно (§ 285, слѣд. 3) суть цѣлыя числа. Далѣе, если-бы это уравненіе было сократимо, то функція $F(\eta)$ разлагалась бы на раціональныхъ множителей, пусть $F_1(\eta)$ будетъ одинъ изъ такихъ множителей. Корнемъ этого множителя будетъ хотя одинъ изъ періодовъ на-

примѣръ η_h т. е. $F_1(\eta_h)=0$. Это раціональное уравненіе съ уравненіемъ (10) имѣетъ, очевидно, общій корень α, а по свойству несократимаго уравненія (§ 226), это уравненіе будетъ имѣть корнями $\alpha^g, \alpha^{g^2}, \ldots, \alpha^{g^{e-1}}$, т. е. будемъ имѣть:

$$F_1(\eta_h)=0 \quad , \quad F_1(\eta_{h+1})=0 \quad , \ldots , \quad F_1(\eta_{h-1})=0 \qquad (20')$$

слѣдовательно уравненіе $F_1(\eta)=0$, коего степень меньше e имѣетъ больше этого числа корней, что невозможно.

Остается показать послѣднюю часть нашего предложенія. Для этого замѣтимъ, что каждый періодъ и его степени суть линейныя функціи тѣхъ же періодовъ (§ 284), слѣдовательно:

$$\eta_h=\mu_0'\eta_0+\mu'_1\eta_1+\ldots\ldots+\mu'_{e-1}\eta_{e-1}$$

$$\eta_h^2=\mu_0''\eta_0+\mu''_1\eta_1+\ldots\ldots+\mu''_{e-1}\eta_{e-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_h^{e-1}=\mu_0^{(e-1)}\eta_0+\mu_1^{(e-1)}\eta_1\ \ldots\ldots+\mu_{e-1}^{(e-1)}\eta_{e-1}$$

присовокупляя къ этимъ уравненіямъ еще уравненіе:

$$-1=\eta_0+\eta_1+\ldots\ldots+\eta_{e-1}$$

можно опредѣлить изъ этихъ e линейныхъ уравненій каждый изъ періодовъ η_k въ функціи одного изъ нихъ такъ, напримѣръ, въ функціи періода η_h.

$$D\eta_k=A_0+A_1\eta_h+A_2\eta_h^2+\ldots+A_{e-1}\eta_h^{e-1}$$

гдѣ A_0, $A_1\ldots$ суть цѣлыя числа, а D опредѣлитель изъ чиселъ μ.

Слѣдовательно:

$$\eta_k=\Phi(\eta_h)$$

откуда также $\eta_1=\Phi(\eta_0)$, гдѣ $\Phi(\eta_0)$ есть цѣлая раціональная функція. Такъ какъ раціональное уравненіе:

$$\Phi(\eta_0)-\eta_1=0$$

имѣетъ корнемъ α, то, вслѣдствіе несократимости уравненія (10), его корнями будутъ $\alpha^g, \alpha^{g^2}, \ldots$, а слѣдовательно будемъ также имѣть:

$$\eta_1=\Phi(\eta_0) \ , \ \eta_2=\Phi(\eta_1) \ , \ \eta_3=\Phi(\eta_2), \ldots, \eta_{e-1}=\Phi(\eta_{e-2}) \ , \ \eta_1=\Phi(\eta_{e-1}) \quad (21)$$

или

$$\eta_1 = \Phi(\eta_0) \quad , \quad \eta_2 = \Phi^2(\eta_0) \, , \ldots , \, \eta_{e-1} = \Phi^{(e-1)}(\eta_0) \quad , \quad \eta_0 = \Phi^e(\eta_0) \qquad (21')$$

что и выражаетъ сказанное свойство, въ силу котораго и эти уравненія рѣшаются алгебраически.

§ 286. Рѣшивъ уравненіе (20) намъ будутъ извѣстны періоды η_0, $\eta_1, \ldots, \eta^{e-1}$. Спрашивается теперь, если e будетъ какой-нибудь опредѣленный корень уравненія (20), то какой изъ e періодовъ соотвѣтствуетъ этому корню? Положимъ, что при извѣстномъ выборѣ корня α, періодъ $\eta_k = a$, если теперь возьмемъ за α одинъ изъ корней, составляющихъ періодъ η_k, то періоды $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots, \eta_{e-1}$ измѣнятся такъ: η_k перейдетъ въ η_0, η_{k+1}, перейдетъ въ η_1 и т. д. Слѣдовательно, выбравъ извѣстнымъ образомъ корень α всегда можемъ положить $\eta_0 = a$, гдѣ корень α останется неопредѣленнымъ, такъ какъ весь періодъ η_0 можетъ быть составленъ изъ какого-угодно корня уравненія (10).

Какъ только періодъ η_0 опредѣленъ, то другіе періоды будутъ раціональныя функціи этого послѣдняго.

§ 287. Легко теперь показать, что f корней, составляющихъ періодъ η_k, суть корни уравненія f-ой степени, коего коэфиціенты суть линейныя функціи періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$, это уравненіе *несократимо*, т. е. не можетъ быть разложено на множителей, коихъ коэфиціенты суть цѣлыя раціональныя функціи тѣхъ же періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, корни, составляющіе періодъ η_k, суть:

$$\alpha^{g^k} \quad , \quad \alpha^{g^{2+k}} \quad , \quad \alpha^{g^{2e+k}} \, , \ldots , \, \alpha^{g^{e(f-1)+k}} \qquad (22)$$

коэфиціенты уравненія, коего эти количества суть корни, будутъ симметрическія функціи этихъ количествъ, а слѣдовательно подстановленіе вмѣсто α корня α^{g^e} не измѣняетъ этихъ коэфиціентовъ, поэтому (§ 284) эти коэфиціенты суть линейныя функціи періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$. Означимъ это уравненіе чрезъ

$$\psi_k(x) = 0 \qquad (23)$$

Это уравненіе несократимо. Положимъ, что оно сократимо и что одинъ изъ его раціональныхъ множителей есть

$$f(x, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}) = 0 \qquad (24)$$

въ которомъ всѣ коэфиціенты суть раціональныя функціи періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots$ Этотъ множитель долженъ имѣть по крайней мѣрѣ одно изъ количествъ (22) корнемъ. Если вмѣсто періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots$ подставимъ ихъ выраженія въ

корняхъ, то уравненіе (24) будетъ функція отъ α, которая обращается въ нуль для одного изъ корней (24), а слѣдовательно и для всѣхъ корней уравненія (1), такъ, напримѣръ, для корней (22), т. е. уравненіе (24) будетъ имѣть больше корней чѣмъ его степень, что невозможно.

Составимъ e уравненій:

$$\psi_0(x) = 0 \quad , \quad \psi_1(x) = 0 \quad , \quad \psi_k(x) = 0 \; , \; . \; . \; . \; , \; \psi_{e-1}(x) = 0 \qquad (25)$$

коихъ корнями суть корни, составляющіе періоды $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots, \eta_{e-1}$, ихъ рѣшеніе содержитъ полное рѣшеніе дѣленія окружности.

Изъ этого видимъ, что рѣшеніе уравненія (10) или дѣленіе круга на p равныхъ частей сводится на рѣшеніе уравненія (20) и одного изъ уравненій (25).

Послѣ рѣшенія уравненія (20), функція X (10) разлагается на e множителей каждой f-ей степени, слѣдовательно дѣлается сократимой въ извѣстномъ смыслѣ (§ 226), множители же остаются несократимыми.

§ 287. Разложимъ число f, въ свою очередь, на двухъ множителей e' и f', т. е. положимъ, что $f = e'f'$. Мы можемъ образовать ee' періодовъ въ каждомъ по f' членовъ:

$$\eta'_0 = \alpha + \alpha^{g^{ee'}} + \alpha^{g^{2ee'}} + \ldots + \alpha^{g^{ee'(f'-1)}}$$

$$\eta'_1 = \alpha^{g} + \alpha^{g^{ee'+1}} + \alpha^{g^{2ee'+1}} + \ldots + \alpha^{ee'(f'-1)+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta'_e = \alpha^{g^e} + \alpha^{g^{ee'+e}} + \alpha^{g^{2ee'+e}} + \ldots + \alpha^{g^{ee'(f'-1)+e}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta'_{2e} = \alpha^{g^{2e}} + \alpha^{g^{ee'+2e}} + \alpha^{g^{2ee'+2e}} + \ldots + \alpha^{g^{ee'(f'-1)+2e}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta'_{ee'} = \alpha^{g^{ee'-1}} + \alpha^{g^{2ee'-1}} + \alpha^{g^{3ee'-1}} + \ldots + \alpha^{g^{f'ee'-1}}$$

Изъ этихъ періодовъ, взятыхъ по e', составлены, очевидно, періоды $\eta_0, \eta_1 \ldots$ такъ, напримѣръ:

$$\eta_0 = \eta'_0 + \eta'_e + \eta'_{2e} + \ldots + \eta'_{(e'-1)e}$$

Относительно этихъ новыхъ періодовъ имѣютъ мѣсто тѣ-же предложенія, какія были показаны для періодовъ $\eta_0, \eta_1 \ldots$ такъ, напримѣръ, что каждый изъ періодовъ η' есть цѣлая раціональная функція какого-нибудь изъ тѣхъ-же періодовъ.

§ 288. Періоды η', составляющіе одинъ изъ періодовъ η, напримѣръ періоды:

$$\eta'_0 \;,\; \eta'_e \;,\; \eta'_{2e} \;,\; \ldots\ldots \;,\; \eta_{(e'-1)e}$$

составляющіе періодъ η_0, суть корни несократимаго уравненія e'-ой степени, коего коэфиціенты суть линейныя функціи періодовъ η.

Составимъ уравненія:

$$\Phi'_0(\eta') = (\eta'-\eta'_0)(\eta'-\eta'_e)(\eta'-\eta'_{2e}) \;\ldots\; (\eta'-\eta'_{e(e'-1)}) = 0$$

въ которомъ коэфиціенты суть симметрическія функціи періодовъ η_0', η_e', $\eta'_{2e}, \ldots$, слѣдовательно, не измѣняются отъ замѣщенія корней α корнемъ α^{g^e} такъ какъ при этомъ замѣщеніи эти періоды кругообразно переходятъ одинъ въ другой; но если эти коэфиціенты не измѣняются замѣщеніемъ α корнемъ α^{g^e}, то въ силу свойства (§ 284)) они суть линейныя функціи періодовъ η.

Такимъ образомъ составимъ e уравненій:

$$\Phi'_0(\eta') = 0 \quad , \quad \Phi'_1(\eta') = 0 \quad , \ldots\ldots , \quad \Phi'_{e-1}(\eta') = 0 \qquad (26)$$

коихъ корни суть періоды η', составляющіе періодъ η.

Всѣ эти уравненія несократимы. Пусть напримѣръ уравненіе $\Phi'_0(\eta')=0$ разлагается на множителей въ коихъ коэфиціенты суть линейныя функціи періодовъ η, пусть одинъ изъ такихъ множителей будетъ $\varphi(\eta')$, этотъ множитель, для одного изъ періодовъ η'_0, η'_e, $\eta'_{2e}, \ldots, \eta'_{ge}, \ldots, \eta'_{(e-1)e}$, напримѣръ, для η'_{he} долженъ обращаться въ нуль, т. е. $\varphi(\eta'_{he}) = 0$. Это уравненіе можно разсматривать какъ уравненіе, которому удовлетворяетъ одинъ изъ корней несократимаго уравненія $\Phi_0(\eta) = 0$, напримѣръ корень α, слѣдовательно ему должны удовлетворять и корни:

$$\alpha^{g^e} \;,\; \alpha^{g^{2e}} \;,\; \ldots\ldots \;,\; \alpha^{g^{e(e'-1)}}$$

Слѣдовательно это уравненіе будетъ имѣть больше корней чѣмъ его степень, что невозможно.

Изъ уравненій (26) опредѣляются періоды η' какъ функціи періодовъ η, но необходимо рѣшить только одно изъ этихъ уравненій (26), такъ какъ остальные періоды суть извѣстныя раціональныя функціи одного изъ нихъ.

Рѣшивъ одно изъ уравненій (26) будемъ имѣть всѣ періоды η', вслѣдствіе чего каждый изъ e множителей f-ой степени, на которые разлагается функція X, разлагаются въ свою очередь каждый на e' множителей, слѣдовательно функція X разлагается на ee' множителей каждой степени f', которые въ свою очередь несократимы.

Продолжая подобный процессъ дойдемъ наконецъ до множителей 1-ой степени на которые разлагается функція X, а слѣдовательно будемъ имѣть непосредственно корни уравненія $X = 0$.

§ 289. Изъ всего выше сказаннаго видно, что рѣшеніе двучленныхъ уравненій по способу Гаусса состоитъ въ слѣдующемъ: разлагается число $p-1$ на множителей $p-1 = a.b.c...d$, и дѣлятся всѣ корни уравненія $X=0$ на a періодовъ η въ каждомъ по $\frac{p-1}{a}$ членовъ. Эти періоды суть корни уравненія a-ой степени съ цѣлыми коэфиціентами.

Рѣшеніе этого уравненія даетъ періоды η, а функція X разлагается на a множителя каждой степени $\frac{p-1}{a}$, коихъ коэфиціенты суть функціи извѣстныхъ уже періодовъ η. Послѣ этого дѣлятъ корни, каждого изъ періодовъ η, на b меньшихъ періодовъ η' каждый изъ $\frac{p-1}{ab}$ членовъ. Тѣ изъ этихъ послѣднихъ періодовъ, которые составляютъ періоды η, суть корни уравненій b-ой степени, коихъ коэфиціенты суть линейныя функціи извѣстныхъ уже періодовъ η. Рѣшеніе этихъ уравненій дастъ всѣ періоды η' числомъ ab, а функція X разложится на ab множителей каждой степени $\frac{p-1}{ab}$ съ извѣстными коэфиціентами. Дѣлятъ опять періоды η' на еще меньшіе η'' числомъ c по $\frac{p-1}{abc}$ членовъ въ каждомъ. Тѣ изъ этихъ періодовъ, которые составляютъ періоды η' суть корни уравненій, коихъ коэфиціенты суть линейныя функціи періодовъ η'. Рѣшеніе этихъ уравненій дастъ всѣ η'' періоды, а функція X разложится на множителей числомъ abc каждая $\frac{p-1}{abc}$ -ой степени съ извѣстными коэфиціентами. Наконецъ дойдемъ до періодовъ состоящихъ изъ одного члена, т. е. до корней уравненія $X=0$ изъ коихъ составлены непосредственно предъидущіе d періодовъ, которые суть корни уравненій d-ой степени, коихъ коэфиціенты суть функціи извѣстныхъ уже предъидущихъ періодовъ, рѣшеніе которыхъ даетъ наконецъ корни двучленнаго уравненія $x^p-1 = 0$.

Изъ этого видимъ, что рѣшеніе уравненія $x^p-1 = 0$ или дѣленіе окружности на p равныхъ частей сводится на уравненія a-ой, b-ой, ..., d-ой степеней.

§ 290. Въ какомъ порядкѣ разлагается число $p-1$ на множителей — безразлично, хотя лучше чтобы вспомогательныя уравненія были возможно низшей степени, а это достигается тѣмъ, что число $p-1$ разлагается на его простыхъ множителей равныхъ или неравныхъ. Если случится, что всѣ простые множители суть два т. е.; если число p будетъ имѣть

форму 2^k+1, то всѣ вспомогательныя уравненія будутъ 2-ой степени, а слѣдовательно ихъ корни будутъ выражаться радикалами 2-ой степени. А такъ какъ всѣ выраженія, незаключающія ирраціональностей выше 2-ой степени, могутъ быть построены геометрически съ помощью линейки и круга, то изъ этого вытекаетъ слѣдующее весьма важное предложеніе:

Предложеніе. Если форма простого числа p есть 2^k+1, то окружность можетъ быть раздѣлена на p равныхъ частей или, что тоже, въ кругъ можетъ быть вписанъ правильный многоугольникъ съ p сторонами съ помощью линейки и круга. Числа 3, 5, 17 имѣютъ эту форму, слѣдовательно такіе многоугольники могутъ быть вписаны въ кругъ съ помощью линейки и круга.

§ 291. Такъ какъ число $p-1$ есть всегда четное, то выгодно разлагать его на множителей такъ, чтобы множитель *два* былъ послѣднимъ. При такомъ способѣ всѣ періоды будутъ состоять изъ четнаго числа членовъ и будутъ составлены изъ суммы послѣднихъ двучленныхъ періодовъ:

$$\alpha+\alpha^{g^{\frac{p-1}{2}}}\,,\ \alpha^g+\alpha^{g^{\frac{p-1}{2}+1}}\,,\ \alpha^{g^2}+\alpha^{g^{\frac{p-1}{2}+2}}\,,\ \ldots\,,\ \alpha^{g^{\frac{p-3}{2}}}+\alpha^{g^{\frac{p-3}{2}+\frac{p-1}{2}}}$$

но такъ какъ имѣемъ (§ 110):

$$g^{\frac{p-1}{2}}\equiv-1\,(Mp)$$

то предъидущіе періоды могутъ быть написаны въ формѣ:

$$\alpha+\alpha^{-1}\,,\ \alpha^g+\alpha^{-g}\,,\ \alpha^{g^2}+\alpha^{-g^2}\,,\ \ldots\,,\ \alpha^{g^{\frac{p-3}{2}}}+\alpha^{-g^{\frac{p-3}{2}}} \tag{27}$$

и суть величины дѣйствительныя. Въ самомъ дѣлѣ, если:

$$\alpha=\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}$$

то:

$$\alpha^{g^h}=\cos\frac{2kg^h\pi}{p}+i\sin\frac{2kg^h\pi}{p}$$

$$\alpha^{-g^h}=\cos\frac{2kg^h\pi}{p}-i\sin\frac{2kg^h\pi}{p}$$

откуда, слѣдовательно, имѣемъ:

$$\alpha^{g^h}+\alpha^{-g^h}=2\cos\frac{2kg^h\pi}{p} \tag{28}$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть вспомогательныя уравненія съ дѣйствительными корнями, только послѣднія квадратичныя уравненія, коихъ корни суть члены двучленныхъ періодовъ, будутъ имѣть мнимые корни.

Остается показать какъ рѣшаются вспомогательныя уравненія, опредѣляющія періоды различныхъ порядковъ, но прежде пояснимъ все сказанное нѣсколькими примѣрами.

Если въ (28) положимъ:

$$\frac{2k\pi}{p} = a$$

то это уравненіе сдѣлается:

$$\alpha^{g^h} + \alpha^{-g^h} = 2\cos(g^h a)$$

полагая $h = 0,\ 1,\ 2, \ldots \frac{p-1}{2}$, будемъ имѣть:

$$\alpha + \alpha^{-1} = 2\cos a \quad , \quad \alpha^g + \alpha^{-g} = 2\cos ga \quad , \quad \alpha^{g^2} + \alpha^{-g^2} = \cos g^2 a \ , \ \ldots$$

$$\alpha^{g^{\frac{p-1}{2}}} + \alpha^{-g^{\frac{p-1}{2}}} = 2\cos g^{\frac{p-1}{2}} a \tag{29}$$

Если теперь положимъ:

$$z = 2\cos a \quad , \quad \varphi(z) = 2\cos ga$$

то выраженія (29) будутъ:

$$z \quad , \quad \varphi(z) \quad , \quad \varphi^r(z) \ , \ \ldots \ , \ \varphi^{\frac{p-3}{2}}(z) \tag{30}$$

$\varphi(z)$ есть раціональная функція, какъ извѣстно, изъ тригонометріи:

$$\varphi(z) = z^g - gz^{g-2} + \frac{g(2-3)}{1.2} z^{2-4} - \frac{g(2-4)(2-5)}{1.2.3} z^{2-6} + \ \ldots$$

очевидно, что (30) суть корни уравненія такого свойства, что каждый изъ нихъ есть раціональная функція предъидущаго, а первый та же функція послѣдняго, такъ какъ мы имѣемъ:

$$g^{\frac{p-1}{2}} = -(Mp)$$

т. е.:

$$\cos g^{\frac{p-1}{2}} a = 2\cos a$$

Примѣръ. 1. Рѣшить уравненіе:

$$x^5 - 1 = 0$$

или что тоже раздѣлить окружность на пять равныхъ частей?

Рѣшеніе. Здѣсь $p = 5$, $p - 1 = 4 = 2.2$. Возьмемъ одинъ изъ первообразныхъ корней числа 5, напримѣръ $g = 2$, то степень g:

$$1 \quad , \quad g \quad , \quad g^2 \quad , \quad g^3$$

сравниваемы съ числами:

$$1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 4 \quad , \quad 3$$

Если означимъ чрезъ α одинъ изъ корней уравненія:

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

то всѣ корни его будутъ:

$$\alpha \quad , \quad \alpha^2 \quad , \quad \alpha^3 \quad , \quad \alpha^4$$

или:

$$\alpha \quad , \quad \alpha^g \quad , \quad \alpha^{g^3} \quad , \quad \alpha^{g^2}$$

два періода будутъ:

$$\eta_0 = \alpha + \alpha^{g^2} = \alpha + \alpha^4 \quad , \quad \eta_1 = \alpha^g + \alpha^{g^3} = \alpha^2 + \alpha^3$$

Эти періоды суть корни уравненія:

$$\eta^2 - (\eta_0 + \eta_1)\eta + \eta_0\eta_1 = 0$$

Но

$$\eta_0 + \eta_1 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1 \quad , \quad \eta_0\eta_1 = (\alpha + \alpha_1)(\alpha^2 + \alpha_3) = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1$$

Слѣдовательно, предъидущія уравненія будутъ:

$$\eta^2 + \eta - 1 = 0$$

$$\eta_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \eta_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

если представимъ, что за корень α взятъ тотъ изъ корней, для котораго періодъ η_0 равенъ $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Уравненія, коихъ корни суть корни періодовъ η_0 и η_1, очевидно:

$$x^2 - \eta_0 x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - \eta_1 x + 1 = 0$$

такъ какъ:

$$\alpha + \alpha^4 = \eta_0 \quad , \quad \alpha^2 + \alpha^3 = \eta_1$$

а

$$\alpha.\alpha^4 = \alpha^5 = 1 \quad , \quad \alpha^2.\alpha^3 = \alpha^5 = 1$$

Рѣшая предъидущія уравненія, мы будемъ имѣть корни α, α^4, α^2, α^3 уравненія:

$$X = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (a)$$

именно:

$$\alpha = \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1} \quad , \quad \alpha^4 = \frac{\eta_0}{2} - \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1}$$

$$\alpha^2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} - 1} \quad , \quad \alpha^3 = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} - 1}$$

подставляя выше найденныя значенія для η_0 и η_1, корни уравненія (a) будутъ:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad , \quad \alpha^4 = \frac{-1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \quad , \quad \alpha^3 = \frac{-1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{16}$$

Если положимъ:

$$\alpha = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$$

то

$$\eta_0 = 2\cos\frac{2k\pi}{5} \quad , \quad \text{а } \eta_1 = 2\cos\frac{4k\pi}{5}$$

Чтобы періодъ имѣлъ взятое выше выраженіе $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, нужно положить $k = 1$ или $k = 4$, что дастъ:

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{2} \quad , \quad \text{а } \eta_0 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

Такъ какъ число 5 имѣетъ форму $2^k + 1$, то раздѣлить окружность на 5 равныхъ частей можно, съ помощью линейки и круга, слѣдующимъ образомъ.

Построеніе. Въ кругѣ (фиг. 17), коего центръ O, а радіусъ $OA = 1$ проведемъ два перпендикулярные діаметра AB и CD и въ точкахъ A и D проведемъ касательныя, которыя встрѣчаются въ точкѣ S; раздѣлимъ пополамъ AS въ точкѣ E и проведемъ OE, то будемъ имѣть:

$$OF = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AE}^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Опишемъ изъ точки E какъ изъ центра радіусомъ OE кругъ, который пересѣчетъ AS въ точкѣ F, то:

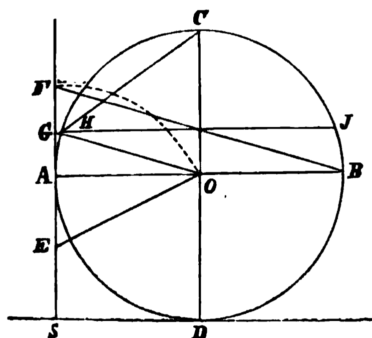
$$AF = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \eta_0 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

Если проведемъ FB и $OG \parallel FB$, то будемъ имѣть:

$$AG = \cos\frac{2\pi}{5}$$

такъ какъ въ точкѣ G, AF дѣлится прямою OG пополамъ. Пусть H и J будутъ точки встрѣчи прямой $GJ \parallel AB$ съ окружностію. Легко видѣть,

Фиг. 17.



что HC есть сторона пятиугольника.

Примѣръ 2. Раздѣлить окружность на семь равныхъ частей?

Рѣшеніе. Число $p = 7$, $p - 1 = 3.2$, уравненіе:

$$X = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (a)$$

самый меньшій первообразный корень простаго числа 7 есть $g = 3$, корни уравненія (a), если одинъ изъ нихъ означимъ чрезъ α, будутъ:

$$\alpha \;,\; \alpha^{g} \;,\; \alpha^{g^2} \;,\; \alpha^{g^3} \;,\; \alpha^{g^4} \;,\; \alpha^{g^5}$$

или такъ какъ:

$$g^0 \equiv 1(M7) \quad , \quad g \equiv 3(M7) \quad , \quad g^2 \equiv 2(M7)$$

$$g^3 \equiv 6(M7) \quad , \quad g^4 \equiv 4(M7) \quad , \quad g^5 \equiv 5(M7)$$

то

$$\alpha \quad , \quad \alpha^3 \quad , \quad \alpha^2 \quad , \quad \alpha^6 \quad , \quad \alpha^4 \quad , \quad \alpha^5$$

откуда три періода η_0, η_1, η_2 будутъ:

$$\eta_0 = \alpha + \alpha^6 \quad , \quad \eta_1 = \alpha^3 + \alpha^4 \quad , \quad \eta_2 = \alpha^2 + \alpha^5$$

Складывая эти періоды найдемъ:

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = -1$$

а перемножая по два будемъ имѣть:

$$\eta_0\eta_1 = \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^3 = \eta_1 + \eta_2$$

$$\eta_1\eta_2 = \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha + \alpha^2 = \eta_2 + \eta_0$$

$$\eta_2\eta_0 = \alpha^3 + \alpha + \alpha^6 + \alpha^4 = \eta_0 + \eta_1$$

откуда:

$$\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2 = 2(\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) = -2$$

наконецъ:

$$\eta_0\eta_1\eta_2 = (\eta_1 + \eta_2)\eta_2 = \eta_1\eta_2 + \eta^2_2 = 2 + \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = 1$$

слѣдовательно кубическое уравненіе, коего корнями суть періоды η_0, η_1, η_2, всѣ дѣйствительные, есть:

$$\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0 \qquad (b)$$

рѣшивъ это уравненіе будемъ имѣть періоды η_0, η_1, η_2:

$$\eta_0 = \alpha + \alpha^6 = 2\cos\frac{2k\pi}{7} \quad , \quad \eta_1 = \alpha^3 + \alpha^4 = 2\cos\frac{6k\pi}{7} \quad , \quad \eta_2 = \alpha^2 + \alpha^5 = 2\cos\frac{4k\pi}{7}$$

Если положимъ $k = 1$, то:

$$\eta_0 = 2\cos\frac{2\pi}{7} \quad , \quad \eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -2\cos\frac{\pi}{7} \quad , \quad \eta_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -2\cos\frac{3\pi}{7}$$

изъ коихъ первый корень положительный, а два послѣдніе отрицательные.

Корень α будетъ:

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$$

Если корень η_0 извѣстенъ, то η_1 и η_2 будутъ раціональныя функціи этого послѣдняго:

$$\eta_1 = 1 - \eta_0 - \eta_0^2 = -\frac{1+\eta_0}{\eta_0} = \varphi(\eta_0)$$

$$\eta_2 = \eta_0^2 - 2 = -\frac{1}{1+\eta_0} = \varphi(\eta_1) = \varphi^2(\eta_0)$$

Такъ какъ число 7 не имѣетъ формы 2^k+1 то раздѣлить окружность на 7 равныхъ частей съ помощью элементарной геометріи нельзя.

Примѣръ 3. Раздѣлить окружность на одиннадцать равныхъ частей.

Рѣшеніе. Число:

$$p = 11 \quad , \quad p-1 = 5.2$$

Наименьшій первообразный корень простаго числа 11 есть $g=2$. Слѣдовательно, корни уравненія:

$$X = x^{10} + x^9 + x^8 + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

можно написать въ формѣ:

$$\alpha \ , \ \alpha^{g} \ , \ \alpha^{g^2} \ , \ \alpha^{g^3} \ , \ \alpha^{g^4} \ , \ \alpha^{g^5} \ , \ \alpha^{g^6} \ , \ \alpha^{g^7} \ , \ \alpha^{g^8} \ , \ \alpha^{g^9}$$

или, замѣчая, что:

$$g^0 \equiv 1(M11) \ , \ g \equiv 2(M11) \ , \ g^2 \equiv 4(M11) \ , \ g^3 \equiv 8(M11) \ , \ g^4 \equiv 5(M11)$$

$$g^5 \equiv 10(M11) \ , \ g^6 \equiv 9(M11), \ g^7 \equiv 7(M11) \ , \ g^8 \equiv 3(M11) \ , \ g^9 \equiv 6(M11)$$

эти корни будутъ:

$$\alpha \ , \ \alpha^2 \ , \ \alpha^4 \ , \ \alpha^8 \ , \ \alpha^5 \ , \ \alpha^{10} \ , \ \alpha^9 \ , \ \alpha^7 \ , \ \alpha^3 \ , \ \alpha^6$$

пять двучленныхъ періодовъ изъ этихъ корней будутъ:

$$\eta_0 = \alpha + \alpha^{10} \ , \ \eta_1 = \alpha^2 + \alpha^9 \ , \ \eta_2 = \alpha^4 + \alpha^7 \ , \ \eta_3 = \alpha^8 + \alpha^3 \ , \ \eta_4 = \alpha^5 + \alpha^6$$

Замѣчая, что $\alpha^{11} = 1$, будемъ имѣть:

$$\eta_0^2 = 2 + \eta_1 \ , \ \eta_1^2 = 2 + \eta_2 \ , \ \eta_2^2 = 2 + \eta_3 \ , \ \eta_3^2 = 2 + \eta_4 \ , \ \eta_5 = 2 + \eta_0 \qquad (a)$$

а перемножая періоды, найдемъ:

$$\eta_0\eta_1 = \eta_0 + \eta_3 \quad , \quad \eta_0\eta_2 = \eta_3 + \eta_4$$
$$\eta_0\eta_3 = \eta_1 + \eta_2 \quad , \quad \eta_0\eta_4 = \eta_2 + \eta_4$$
$$\eta_1\eta_2 = \eta_1 + \eta_4 \quad , \quad \eta_1\eta_3 = \eta_0 + \eta_4$$
$$\eta_1\eta_4 = \eta_2 + \eta_3 \quad , \quad \eta_2\eta_3 = \eta_0 + \eta_2$$
$$\eta_2\eta_4 = \eta_0 + \eta_2 \quad , \quad \eta_3\eta_4 = \eta_1 + \eta_3$$

Изъ этихъ уравненій, въ совокупности съ уравненіями (a), найдемъ:

$$\eta_1 = \eta_0^2 - 2$$
$$\eta_2 = \eta_0^4 - 4\eta_0^2 + 2$$
$$\eta_3 = \eta_0^3 - 3\eta_0$$
$$\eta_4 = \eta_0^5 - 5\eta_0^3 + 5\eta_0$$

откуда, если $\eta_1 = \eta_0^2 - 2 = \varphi(\eta_0)$, то:

$$\eta_1 = \varphi(\eta_0) \;,\; \eta_2 = \varphi^2(\eta_0) \;,\; \eta_3 = \varphi^3(\eta_0) \;,\; \eta_4 = \varphi^4(\eta_0) \;,\; \eta_0 = \varphi^5(\eta_0) \qquad (b)$$

Замѣчая, что:

$$1 + \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 0$$

найдемъ:

$$\eta_0^5 + \eta_0^4 - 4\eta_0^3 - 3\eta_0^2 + 3\eta + 1 = 0$$

или:

$$\eta^5 + \eta^4 - 4\eta^3 - 3\eta^2 + 3\eta + 1 = 0$$

Это уравненіе 5-й степени, коего корни суть періоды η_0, η_1, η_2, η_3, η_4 и выражаются раціонально (b) въ функціи одного изъ нихъ η_0.

Рѣшивъ это уравненіе, мы будемъ имѣть пять квадратныхъ уравненій формы:

$$x^2 - \eta x + 1 = 0$$

которыя дадутъ корни уравненія $X = 0$, эти корни суть степени корня:

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}$$

Примѣръ 4. Раздѣлить окружность на тринадцать равныхъ частей?

Рѣшеніе. Число $p = 13$, $p-1 = 12 = 3.4 = 3.2.2$. Одинъ изъ первообразныхъ корней число 13 есть $g = 6$, слѣдовательно, корни уравненія:

$$X = x^{12} + x^{11} + \;.\;.\;.\;.\; + x^2 + x + 1 = 0$$

будутъ:

$$\alpha \ , \ \alpha^{g} \ , \ \alpha^{g^2} \ , \ \alpha^{g^3} \ , \ \alpha^{g^4} \ , \ \alpha^{g^5} \ , \ \alpha^{g^6} \ , \ \alpha^{g^7} \ , \ \alpha^{g^8} \ , \ \alpha^{g^9} \ , \ \alpha^{g^{10}} \ , \ \alpha^{g^{11}}$$

Замѣчая, что:

$$g^0 \equiv 1(M13) \ , \ g \equiv 6(M13) \ , \ g^2 \equiv 10(M13) \ , \ g^3 \equiv 8(M13) \ , \ g^4 \equiv 9(M13)$$

$$g^5 \equiv 2(M13) \ , \ g^6 \equiv 12(M13) \ , \ g^7 \equiv 7(M13) \ , \ g^8 \equiv 3(M13) \ , \ g^9 \equiv 5(M13)$$

$$g^{10} \equiv 4(M13) \ , \ g^{11} \equiv 11(M13)$$

слѣдовательно корни можно написать въ формѣ:

$$\alpha \ , \ \alpha^6 \ , \ \alpha^{10} \ , \ \alpha^8 \ , \ \alpha^9 \ , \ \alpha^2 \ , \ \alpha^{12} \ , \ \alpha^7 \ , \ \alpha^3 \ , \ \alpha^5 \ , \ \alpha^4 \ , \ \alpha^{11}$$

три четырехчленные періода будутъ:

$$\eta_0 = \alpha + \alpha^{g^3} + \alpha^{g^6} + \alpha^{g^9} = \alpha + \alpha^8 + \alpha^{12} + \alpha^5$$

$$\eta_1 = \alpha^{g} + \alpha^{g^4} + \alpha^{g^7} + \alpha^{g^{10}} = \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^7 + \alpha^4$$

$$\eta_2 = \alpha^{g^2} + \alpha^{g^5} + \alpha^{g^8} + \alpha^{g^{11}} = \alpha^{10} + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^{11}$$

Кубическое уравненіе, коего корни суть періоды η_0, η_1, η_2, будетъ:

$$\eta^3 - (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2)\eta^2 + (\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2)\eta - \eta_0\eta_1\eta_2 = 0$$

перемножая періоды, найдемъ:

$$\begin{aligned} \eta_0\eta_1 &= 2\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1\eta_2 &= \eta_0 + 2\eta_1 + \eta_2 \\ \eta_2\eta_0 &= \eta_0 + \eta_1 + 2\eta_2 \\ \eta_0^2 &= 4 + 2\eta_1 + \eta_2 \end{aligned} \qquad (a)$$

Замѣчая, что:

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = -1$$

найдемъ:

$$\eta_0\eta_1 + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_0 = 4(\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) = -4$$

$$\eta_0\eta_1\eta_2 = \eta_0^2 + 2\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 = -1$$

слѣдовательно искомое кубическое уравненіе будетъ:

$$\eta^3 + \eta^2 - 4\eta + 1 = 0$$

Изъ уравненія легко найти:

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{\eta_0} = \eta_0^2 + \eta_0 - 3 \quad , \quad \eta_2 = \frac{1}{1 - \eta_0} = 2 - 2\eta_0 - \eta_0^2$$

откуда видимъ, что если $\eta_1 = \varphi(\eta_0)$, то $\eta_2 = \varphi(\eta_1) = \varphi^2(\eta_0)$, т. е. корни кубическаго уравненія будутъ:

$$\eta_0 \quad , \quad \varphi(\eta_0) \quad , \quad \varphi^2(\eta_0)$$

Каждый изъ трехъ періодовъ η_0, η_1, η_2 разбивается на два меньшіе періода:

$$\eta_0 = \eta'_0 + \eta'_1 \quad , \quad \eta_1 = \eta_0'' + \eta_1'' \quad , \quad \eta_2 = \eta_0''' + \eta_1'''$$

гдѣ:

$$\eta'_0 = \alpha + \alpha^{12} \quad , \quad \eta_1' = \alpha^8 + \alpha^5$$

$$\eta''_0 = \alpha^6 + \alpha^4 \quad , \quad \eta_1'' = \alpha^9 + \alpha^7$$

$$\eta_0''' = \alpha^{10} + \alpha^3 \quad , \quad \eta_1''' = \alpha^2 + \alpha^{11}$$

Уравненія коихъ корнями будутъ періоды η'_0, η_1'; η_0'', η_0''', η_1''' будутъ:

$$\eta^2 - (\eta_0' + \eta_1')\eta + \eta_0'\eta'_1 = 0$$

$$\eta^2 - (\eta_0'' + \eta_1'')\eta + \eta_0''\eta_1'' = 0$$

$$\eta^2 - (\eta_0''' + \eta_1''')\eta + \eta_0'''\eta_1''' = 0$$

или, замѣчая, что:

$$\eta_0' + \eta_1' = \eta_0 \quad , \quad \eta_0'\eta_1' = \eta_1$$

$$\eta_0'' + \eta_1'' = \eta_1 \quad , \quad \eta_0''\eta_1'' = \eta_2$$

$$\eta_0''' + \eta_1''' = \eta_2 \quad , \quad \eta_0'''\eta_1''' = \eta_0$$

найдемъ:

$$\eta^2 - \eta_0\eta + \eta_1 = 0 \quad , \quad \eta^2 - \eta_1\eta + \eta_2 = 0 \quad , \quad \eta^2 - \eta_2\eta + \eta_0 = 0$$

Наконецъ, уравненія, коихъ корни составляютъ періоды η_0', η_0'', η_0''; η_0', η_1'', η_1'' будутъ формы:

$$x^2 - \eta_0'x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - \eta_1'x + 1 = 0$$

$$x^2 - \eta_0''x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - \eta_1''x + 1 = 0$$

$$x^2 - \eta_0'''x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - \eta'''x + 1 = 0$$

Примѣръ 5. Раздѣлить окружность на семнадцать равныхъ частей?

Рѣшеніе. Такъ какъ число 17 имѣетъ форму 2^4+1, то раздѣлить окружность на 17 частей можно съ помощью линейки и круга, какъ мы выше показали.

Въ настоящемъ случаѣ $p=17$, $p-1=16=2.2.2.2$ одинъ изъ первообразныхъ корней простаго числа 17 есть $g=3$, слѣдовательно, корни уравненія:

$$x^{16}+x^{15}+\ldots+x^2+x+1=0$$

будутъ, если одинъ изъ нихъ назовемъ чрезъ α:

$$\alpha\,,\ \alpha^{g}\,,\ \alpha^{g^2}\,,\ \alpha^{g^3}\,,\ \alpha^{g^4}\,,\ \alpha^{g^5}\,,\ \alpha^{g^6}\,,\ \alpha^{g^7}\,,\ \alpha^{g^8}\,,\ \alpha^{g^9}$$

$$\alpha^{g^{10}}\,,\ \alpha^{g^{11}}\,,\ \alpha^{g^{12}}\,,\ \alpha^{g^{13}}\,,\ \alpha^{g^{14}}\,,\ \alpha^{g^{15}}$$

или:

$$\alpha\,,\ \alpha^3\,,\ \alpha^9\,,\ \alpha^{10}\,,\ \alpha^{13}\,,\ \alpha^5\,,\ \alpha^{15}\,,\ \alpha^{11}\,,\ \alpha^{16}\,,\ \alpha^{14}\,,\ \alpha^8$$

$$\alpha^7\,,\ \alpha^4\,,\ \alpha^{12}\,,\ \alpha^2\,,\ \alpha^6$$

такъ какъ мы имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} g^0\equiv 1\,,\ g\equiv 3\,,\ g^2\equiv 9\,,\ g^3\equiv 10\,,\ g^4\equiv 13\,,\ g^5\equiv 5\,,\ g^6\equiv 15\,,\ g^7\equiv 11 \\ g^8\equiv 16,\ g^9\equiv 14,\ g^{10}\equiv 8,\ g^{11}\equiv 7,\ g^{12}\equiv 4,\ g^{13}\equiv 12,\ g^{14}\equiv 2,\ g^{15}\equiv 6 \end{array}\right\}\ (M17)$$

Эти корни дѣлятся на два 8-ми членные періода:

$$\eta_0=\alpha+\alpha^9+\alpha^{13}+\alpha^{15}+\alpha^{16}+\alpha^8+\alpha^4+\alpha^2$$

$$\eta_1=\alpha^3+\alpha^{10}+\alpha^5+\alpha^{11}+\alpha^7+\alpha^{12}+\alpha^6$$

эти два періода суть корни уравненія:

$$\eta^2-(\eta_0+\eta_1)\eta+\eta_0\eta_1=0$$

или, замѣчая, что $\eta_0+\eta_1=-1$, а $\eta_0\eta_1=4(\eta_0+\eta_1)=-4$:

$$\eta^2+\eta-4=0$$

откуда найдемъ періоды:

$$\eta_0=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\quad,\quad \eta_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

выбравъ примѣрно корень η_0.

Періоды η_0 и η_1 въ свою очередь, каждый разлагается на два 4-хъ членные періода:

$$\eta_0 = \eta'_0 + \eta''_0 \quad , \quad \eta_1 = \eta'_1 + \eta''_2$$

гдѣ:

$$\eta'_0 = \alpha + \alpha^{13} + \alpha^{16} + \alpha^4 \quad , \quad \eta'_1 = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^{12}$$

$$\eta''_0 = \alpha^8 + \alpha^{15} + \alpha^8 + \alpha^2 \quad , \quad \eta''_1 = \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^7 + \alpha^6$$

каждая пара этихъ періодовъ суть корни квадратныхъ уравненій:

$$\eta^2 - (\eta'_0 + \eta''_0)\eta + \eta'_0\eta''_0 = 0 \quad , \quad \eta^2 - (\eta'_1 + \eta''_1)\eta + \eta'_1\eta''_1 = 0$$

или:

$$\eta^2 - \eta_0\eta - 1 = 0 \quad , \quad \eta^2 - \eta_1\eta - 1 = 0$$

корни этихъ уравненій будутъ:

$$\eta'_0 = \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1} \quad , \quad \eta''_0 = \frac{\eta_0}{2} - \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1}$$

$$\eta'_1 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} - 1} \quad , \quad \eta''_1 = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1}$$

Эти четыре періода η'_0, η''_0; η'_1, η''_1 разбиваются каждый еще на два двучленные:

$$\eta'_0 = \eta_0''' + \eta_0^{IV} \quad , \quad \eta_0'' = \eta_0^{V} + \eta_0^{VI} \quad , \quad \eta_1'' = \eta_1''' + \eta_1^{IV} \quad , \quad \eta_1'' = \eta_1^{V} + \eta_1^{VI}$$

гдѣ:

$$\eta_0''' = \alpha + \alpha^{16} \quad , \quad \eta_0^{V} = \alpha^3 + \alpha^{14} \quad , \quad \eta_1''' = \alpha^9 + \alpha^8 \quad , \quad \eta_1^{V} = \alpha^{10} + \alpha^7$$

$$\eta_0^{IV} = \alpha^{13} + \alpha^4 \quad , \quad \eta_0^{VI} = \alpha^5 + \alpha^{12} \quad , \quad \eta_1^{IV} = \alpha^{15} + \alpha^2 \quad , \quad \eta_1^{VI} = \alpha^{11} + \alpha^6$$

Уравненіе коего корни суть періоды η_0''', η_0^{IV} есть:

$$\eta^2 - (\eta_0''' + \eta_0^{IV})\eta + \eta_0'''\eta_0^{IV} = 0$$

или:

$$\eta^2 - \eta_0'\eta + \eta'_1 = 0$$

откуда:

$$\eta_0''' = \frac{\eta'_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0'^2}{4} - \eta'_1}$$

Наконецъ, зная этотъ періодъ, найдемъ корни α и α^{16}, его составляющіе, изъ уравненія:

$$x^2 - (\alpha + \alpha^{16})x + \alpha.\alpha^{16} = 0$$

или:

$$x^2 - \eta_0'''x + 1 = 0$$

откуда:

$$x = \alpha = \frac{\eta_0'''}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0'''^2}{4} + 1}$$

этотъ корень, какъ мы выше видѣли, своими степенями даетъ всѣ остальные корни уравненія:

$$\frac{x^{17} - 1}{x - 1} = 0$$

§ 292. Такъ какъ число 17 имѣетъ форму $2^\mu + 1$, то корни предъидущаго уравненія могутъ быть построены, съ помощью линейки и круга, слѣдующимъ образомъ.

Изъ выраженій періодовъ η_0 и η_1 видно, что первый изъ нихъ есть величина положительная, а второй—отрицательная, періоды же η_0', η_1', η_0'', изъ коихъ послѣдній есть:

$$\eta_0'' = 2\cos\frac{2k\pi}{17}$$

если:

$$\alpha = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}$$

суть величины положительныя.

Построеніе. Опишемъ радіусомъ (фиг. 17) равнымъ единицѣ кругъ $ACBD$ и проведемъ два перпендикулярныя діаметра $AB \perp CD$; въ точкахъ A и D проведемъ касательныя, которыя пересѣкаются въ точкѣ S и отложимъ $AE = \frac{1}{4}AS$. Слѣдовательно, изъ $AEAO$ будемъ имѣть:

$$OE = \sqrt{AO^2 + AE^2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{17}$$

Изъ точки E какъ изъ центра радіусомъ EO опишемъ кругъ, который пересѣчетъ AS въ точкахъ F и F' откуда будемъ имѣть:

$$AF = EF - EA = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} = \frac{\eta_0}{2}$$

$$AF' = EF' + EA = \frac{\sqrt{17} + 1}{4} = -\frac{\eta_1}{2}$$

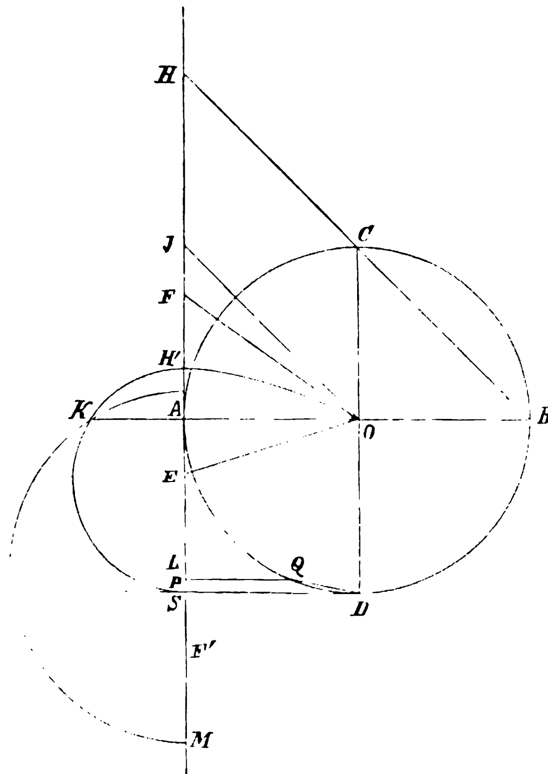
далѣе изъ прямоугольныхъ треугольниковъ FAO и $F'AO$ найдемъ (фиг. 18):

$$OF = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{AF}^2} = \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} + 1}$$

$$OF' = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{AF'}^2} = \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1}$$

Изъ точки F, какъ изъ центра радіусомъ FO, а изъ точки F' радіусомъ $F'O$ опишемъ два круга, которые пересѣкутъ AS въ точкахъ H и H'. Проведемъ BH и $OJ \parallel BH$, то очевидно $AJ = \frac{1}{2} AH$.

Фиг. 18.



Изъ этихъ построеній легко видѣть, что:

$$AH = FH + FA = FO + FA = \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} + 1} = \eta_0'$$

$$AH' = F'H' - F'A = F'O + F'A = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1} = \eta_1'$$

Опишемъ на $H'S$ полукругъ $SK'H$ и продолжимъ BA до встрѣчи съ полукругомъ въ точкѣ K, то будемъ имѣть:

$$AK^2 = AH'.AS = \eta'^2_1$$

Если изъ точки K, какъ изъ центра радіусомъ AJ опишемъ кругъ, который пересѣчетъ AS, въ точкѣ L, изъ которой какъ изъ центра того же радіуса опишемъ кругъ MKN, то:

$$AK^2 = AH'.AS = AM.AN = \eta_1'$$

а

$$AM + AX = 2AJ = \eta_0'$$

Откуда видимъ, что AM и AN суть корни уравненія:

$$\eta^2 - \eta_0'\eta + \eta_1 = 0$$

слѣдовательно, большій изъ корней $AM = \eta_0'''$. Наконецъ, если P есть среднее AM, то:

$$AP = \cos\frac{2k\pi}{17}$$

остается только провести $PQ \parallel AB$, чтобы получить вершину Q семьнадцатиугольника, который будетъ построенъ, если по окружности отложимъ семьнадцать разъ отрѣзокъ QD.

Простыя числа 257, 65537 имѣютъ форму $2^\mu+1$, поэтому окружность можетъ быть раздѣлена на 257, 65537 частей съ помощью линейки и круга.

Остается показать, какъ рѣшаются вообще вспомогательныя уравненія, которыя имѣютъ корнями періоды различныхъ порядковъ, къ этимъ изслѣдованіямъ мы теперь и перейдемъ.

ГЛАВА XIX.

Алгебраическое рѣшеніе вспомогательныхъ уравненій. Разрѣшающая функція и ея свойства.

§ 293. Въ предъидущей главѣ мы показали какимъ образомъ рѣшеніе уравненія:

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0 \qquad (1)$$

сводится на рѣшеніе уравненій, коихъ корни суть періоды, составленныя изъ корней уравненія (1), а затѣмъ на рѣшеніе уравненій, коихъ корни суть корни уравненія (1), составляющіе періоды. Всѣ эти уравненія рѣшаются *алгебраически*, вслѣдствіе того, что корни этихъ уравненій суть раціональныя функціи одного изъ нихъ, какъ мы видѣли уже. Если η_0 есть одинъ изъ корней уравненія періодовъ, то другіе будутъ:

$$\eta_1 = \varphi(\eta_0) \quad , \quad \eta_2 = \varphi^2(\eta_0) \quad , \quad \eta_3 = \varphi^3(\eta_0)$$

Такое же свойство, какъ мы уже показали, имѣютъ и корни самаго уравненія (1).

Абель обобщилъ методъ Гаусса и показалъ, что всякое уравненіе, коего корни имѣютъ выше-сказанное свойство, рѣшаются алгебраически.

§ 294. Выше было показано (§ 288), что періоды числомъ e', составляющіе періоды f членные, суть корни уравненія e'-ей степени, коего коэфиціенты суть линейныя функціи f членныхъ періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{f-1}$, которые предполагаются уже извѣстными. Покажемъ, что это уравненіе e'-ей степени сводится на рѣшеніе двучленнаго уравненія той же e'-ой степени.

Къ этому служитъ функція, названная Лагранжемъ *разрѣшающею* (Resolvante). Эта функція составлена слѣдующимъ образомъ.

Пусть ε будетъ одинъ изъ первообразныхъ корней двучленнаго уравненія:

$$x^{e'} - 1 = 0 \qquad (2)$$

а α корень уравненія (1). Функція:

$$\alpha + \varepsilon\alpha^{g^e} + \varepsilon^2\alpha^{g^{2e}} + \varepsilon^3\alpha^{g^{3e}} + \ldots + \varepsilon^{(f-1)}\alpha^{g^{(f-1)e}} \qquad (3)$$

и есть *разрѣшающая*. Она содержитъ, очевидно, только тѣ періоды числомъ e', въ каждомъ по f' членовъ, которые составляютъ періодъ η_0.

Въ самомъ дѣлѣ, члены функціи (3):

$$\varepsilon \;,\; \varepsilon^{g^{ee'}} \;,\; \varepsilon^{g^{2ee'}} \;,\; \dots \;,\; \varepsilon^{g^{(f'-1)ee'}}$$

по причинѣ уравненій:

$$\varepsilon^{e'} = \varepsilon^{2e'} = \varepsilon^{3e'} = \dots = \varepsilon^{(f-1)e'} = 1$$

имѣютъ одинъ и тотъ же коэфиціентъ, поэтому ее можно написать, обозначивъ символомъ (ε, η_0), въ формѣ:

$$(\varepsilon, \eta_0) = \eta_0' + \varepsilon\eta_e' + \varepsilon^2\eta'_{2e} + \dots + \varepsilon^{e'-1}\eta'_{(e'-1)e} \tag{4}$$

Если подставимъ въ эту функцію вмѣсто α корень α^{g^h}, то періоды η_0', η_e', $\eta'_{2e}, \dots, \eta'_{(e'-1)e}$ перейдутъ въ η'_h, η'_{h+e}, $\eta'_{h+2e}, \dots, \eta'_{h+(e'-1)e}$, полученную такимъ образомъ функцію означимъ символомъ (ε, η_h), она такъ составлена изъ η'_h, какъ (ω, η_0) составлена изъ η_0. Еали положимъ $h = e$, то легко видѣть, что:

$$(\varepsilon, \eta'_e) = \varepsilon^{-1}(\varepsilon, \eta'_0) \tag{5}$$

и вообще:

$$(\varepsilon, \eta_{he}) = \varepsilon^{-h}(\varepsilon, \eta'_0) \tag{6}$$

откуда:

$$(\varepsilon, \eta_{he})^{e'} = (\varepsilon, \eta'_0)^{e'} \tag{7}$$

уравненіе изъ котораго видимъ, что функція $(\varepsilon, \eta'_0)^{e'}$ не измѣняется замѣщеніемъ α степенью α^{g^e}, а изъ этого слѣдуетъ (§ 284), что $(\varepsilon, \eta_0)^{e'}$ есть линейная функція f членныхъ періодовъ η_0, η_1, $\eta_2, \dots,$ коей коэфиціенты суть цѣлыя функціи корня ε.

Если предположимъ, что уравненіе (2) рѣшено, такъ что ε есть извѣстное количество, также какъ и періоды $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{f-1}$, то $(\varepsilon, \eta'_0)^{e'}$ есть также извѣстная функція, которую, означивъ чрезъ T, будемъ имѣть:

$$(\varepsilon, \eta'_0)^{e'} = T \tag{8}$$

откуда видимъ, что разрѣшающая функція (ε, η'_0) есть корень двучленнаго уравненія:

$$x^{e'} = T \tag{9}$$

Спрашивается какой изъ корней уравненія (9) долженъ быть выбранъ для (ε, η'_0)? Можно легко показать, что за функцію (ε, η'_0) можетъ быть принятъ произвольный корень, если ε есть первообразный корень уравне-

нія (2). Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$(\varepsilon, \eta'_0) \ , \ (\varepsilon, \eta'_{e'}) \ , \ (\varepsilon, \eta'_{2e'}) \ , \ldots\ldots , \ (\varepsilon, \eta'_{(e'-1)e'}) \qquad (10)$$

будутъ всѣ корни уравненія (9). Всѣ эти выраженія, возвышенныя въ степень e' равны T. Всѣ они различны между собою, такъ какъ отношенія между ними равны различнымъ степенямъ 1, ε^{-1}, $\varepsilon^{-2}, \ldots, \varepsilon^{-(e'-1)}$ и очевидно удовлетворяютъ уравненію (9). Съ другой стороны, какъ только періоды $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{f-1}$ опредѣлены, то α остается еще произвольнымъ изъ корней составляющихъ періодъ η_0. Пусть α будетъ одинъ изъ этихъ корней, то остальные будутъ:

$$\alpha^{g^{e}} \ , \ \alpha^{g^{2e}} \ , \ \ldots\ldots \ , \ \alpha^{g^{(f-1)e}}$$

и если послѣдовательно возьмемъ ихъ вмѣсто α, то (ε, η'_0) послѣдовательно перейдетъ въ

$$(\varepsilon, \eta'_{e'}) \ , \ (\varepsilon, \eta'_{2e'}) \ , \ \ldots$$

такъ что выбирая приличнымъ образомъ α, опредѣленный корень уравненія (9), можетъ быть сдѣланъ равнымъ, одному изъ выраженій (10), напримѣръ выраженію (ε, η'_0).

§ 295. Какъ только функція (ε, η'_0) опредѣлена, то легко опредѣляется и функція (ε^n, η'_0) для всякого числа n. Для этого подставимъ въ уравненіе (5) ε^n вмѣсто ε, найдемъ:

$$(\varepsilon^n, \eta'_{e'}) = \varepsilon^{-n}(\varepsilon^n, \eta'_0) \qquad (11')$$

а возвышая тоже уравненіе (5) въ $e'-n$ степень, будемъ имѣть:

$$(\varepsilon, \eta'_{e'})^{e'-n} = \varepsilon^n(\varepsilon, \eta'_0)^{e'-n}$$

перемножая эти два уравненія найдемъ:

$$(\varepsilon^n, \eta'_{e'}) \,.\, (\varepsilon, \eta'_0)^{e'-n} = (\varepsilon^n \, \eta'_0)(\varepsilon, \eta'_0)^{e'-n} \qquad (11)$$

т. е. функція $(\varepsilon^n, \eta'_0)(\varepsilon, \eta'_0)^{e'-n}$ не измѣняется замѣщеніемъ α на α^{g^e}, а слѣдовательно она есть линейная функція періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{f-1}$ коей коэфиціенты суть цѣлыя функціи отъ ε. Если эту функцію будемъ разсматривать какъ извѣстное количество T_n, то изъ уравненія (11) имѣемъ:

$$(\varepsilon^n, \eta'_0) = \frac{T_n}{T}\,(\varepsilon, \eta'_0)^n \qquad (12)$$

Если въ функціи (ε, η'_0) сдѣлаемъ $\varepsilon = 1$, то будемъ имѣть:

$$(1, \eta'_0) = \eta'_0 + \eta'_e + \dots + \eta'^{(e'-1)e} = \eta_0 \qquad (13)$$

Полагая послѣдовательно въ уравненіи (12) $n = 0, 1, 2, 3, \dots, e'-1$ будемъ имѣть слѣдующую систему линейныхъ уравненій числомъ e':

$$\begin{aligned}
&\eta'_0 + \eta'_e + \eta'_{2e} + \dots + \eta_{(e'-1)e} = \eta_0 \\
&\eta'_0 + \varepsilon\eta'_e + \varepsilon^2\eta'_{2e} + \dots + \varepsilon^{e'-1}\eta'_{(e'-1)e} = (\varepsilon, \eta'_0) = \sqrt[e']{T} \\
&\eta'_0 + \varepsilon^2\eta'_e + \varepsilon^4\eta'_{2e} + \dots + \varepsilon^{2(e'-1)}\eta'_{(e'-1)e} = (\varepsilon^2, \eta'_0) = \frac{T_2}{T}\left(\sqrt[e']{T}\right)^2 \qquad (14) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\eta_0' + \varepsilon^{e'-1}\eta'_e + \varepsilon^{2(e'-1)}\eta'_{2e} + \dots + \varepsilon^{(e'-1)(e-1)}\eta'_{(e'-1)e} = (\varepsilon^{e'-1}, \eta'_0) = \\
&= \frac{T_{e'-1}}{T}\left(\sqrt[e']{T}\right)^{e'-1}
\end{aligned}$$

изъ которыхъ непосредственно опредѣляютъ періоды η_0', η_e'.... въ функціи уже извѣстныхъ количествъ. Если изъ этихъ уравненій опредѣлимъ одинъ изъ періодовъ η_0', η_e', ..., напримѣръ η_0', то всѣ другіе суть раціональныя функціи этого послѣдняго (§ 285). Періодъ η_0' найдемъ, складывая уравненія (14) и замѣчая, что для $h=1, 2, 3, \dots, e'-1$ имѣемъ:

$$1 + \varepsilon^h + \varepsilon^{2h} + \dots + \varepsilon^{(e'-1)h} = 0$$

при этомъ условіи періоды η'_e, η'_s, ... исчезнутъ и мы найдемъ:

$$\begin{aligned}
\eta'_0 &= \frac{1}{e'}\left\{(1, \eta'_0) + (\varepsilon, \eta'_0) + (\varepsilon^2, \eta'_0) + \dots + (\varepsilon^{e'-1}, \eta'_0)\right\} \\
&= \frac{1}{e'}\left\{\eta_0 + \sqrt[e']{T} + \frac{T_2}{T}\left(\sqrt[e']{T}\right)^2 + \dots + \frac{T_{e'-1}}{T}\left(\sqrt[e']{T}\right)^{e'-1}\right\}
\end{aligned} \qquad (15)$$

гдѣ $\sqrt[e']{T}$ есть e'-й корни уравненія и такъ какъ этотъ корень имѣетъ e' значеній, то выраженіе (15) будетъ имѣть e' значеній, которыя и будутъ представлять всѣ e' періодовъ:

$$\eta'_0 \ , \ \eta'_e \ , \ \eta'_{2e} \ , \ \dots \ , \ \eta'_{(e_1-1)e} \qquad (16)$$

Изъ формулы (15) видимъ, что уравненія e'-й степени, коего корнями суть періоды (16) сводятся на рѣшеніе двучленныхъ уравненій (2) и (9), какъ было сказано выше.

§ 296. Такъ какъ вообще T есть составное количество, то оно имѣетъ форму:

$$R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{17}$$

гдѣ R положительное количество, слѣдовательно:

$$(\varepsilon, \eta'_0)^{e'} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{18}$$

откуда:

$$(\varepsilon, \eta'_0) = \sqrt[e']{R}\left(\cos\frac{\varphi+2h\pi}{e'} + i\sin\frac{\varphi+2h\pi}{e'}\right) \tag{19}$$

гдѣ $\sqrt[e']{R}$ должно взять со знакомъ $+$. Замѣтимъ, что ε^{-1}, α^{-1} суть выраженія, сопряженныя выраженіямъ ε и α, такъ что чрезъ подстановленіе α^{-1}, т. е. $\alpha^{g^{\frac{p-1}{2}}}$ вмѣсто α періоды η_0', η_f', ..., $\eta'_{(e'-1)f}$ переходятъ въ $\eta'_{\frac{p-1}{2}}$, $\eta'_{\frac{p-1}{2}+f}$, ..., $\eta'_{\frac{p-1}{2}+(e'-1)f}$, выраженіе $\left(\varepsilon^{-1}, \eta'_{\frac{p-1}{2}}\right)$ есть сопряженное выраженію (ε, η'_0), а уравненіе:

$$\left(\varepsilon^{-1}, \eta'_{\frac{p-1}{2}}\right)^{e'} = R(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

есть сопряженное уравненію:

$$(\varepsilon, \eta'_0)^{e'} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

перемножая которыя, найдемъ:

$$R^2 = (\varepsilon, \eta'_0)\left(\varepsilon^{-1}, \eta'_{\frac{p-1}{1}}\right) \tag{20}$$

Соображаясь съ уравненіями (5) и (11'), имѣемъ:

$$(\varepsilon, \eta'_0)\left(\varepsilon^{-1}, \eta'_{\frac{p-1}{2}+f}\right) = (\varepsilon, \eta'_0)\left(\varepsilon^{-1}, \eta'_{\frac{p-1}{2}}\right) \tag{21}$$

т. е. выраженіе:

$$(\varepsilon, \eta_0')\left(\varepsilon^{-1}, \eta'_{\frac{p-1}{2}}\right) = U \tag{22}$$

не измѣняется замѣщеніемъ α на $\alpha^{g^{e'}}$, слѣдовательно его величина извѣстна, означимъ ее чрезъ U. Соображаясь съ уравненіемъ (20), найдемъ:

$$+\sqrt[e']{R} = +\sqrt{U} \tag{23}$$

гдѣ знакъ $+$ означаетъ, что въ обѣихъ числахъ этого уравненія взятъ знакъ предъ корнями $+$. Такимъ образомъ изъ (19) найдемъ:

$$(\varepsilon, \eta'_0) = +\sqrt{U}\left(\cos\frac{\varphi+2h\pi}{e'} i \sin\frac{\varphi+2h\pi}{e'}\right) \qquad (24)$$

гдѣ должно положить послѣдовательно:

$$h = 0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ e'-1$$

Такъ какъ η'_0 съ помощью формулъ (15) выражается раціонально чрезъ (ε, η'_0) и чрезъ извѣстныя количества, то мы имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Уравненіе e'-й степени, коего корень есть η'_0 будетъ рѣшено, если рѣшимъ уравненіе $x^{e'}-1=0$, раздѣляя уголъ, который можетъ быть построенъ, на e' равныхъ частей, и извлекая квадратный корень изъ извѣстной величины.

§ 297. Мы предположили, что уравненіе, коего корнями суть періоды $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots . \eta_{e-1}$ рѣшено, и на основаніи этого нашли выраженія для періодовъ $\eta'_0, \eta'_e, \ldots, \eta'_{2e}, \ldots, \eta_{(e'-1)e}$, изъ коихъ составленъ періодъ η_0. Но предыдущій способъ можно приложить прямо къ опредѣленію періодовъ $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$. Для этого надобно только e, e', f' замѣнить 1, e, f, то изложенный выше методъ даетъ способъ выразить e f-членныхъ періодовъ въ функціи коэфиціентовъ уравненія (1). Для этого необходимо только опредѣлить *разрѣшающую* функцію:

$$(\varepsilon, \eta_0) = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \ . \ . \ . \ . + \varepsilon^{e-1}\eta_{e-1} \qquad (25)$$

гдѣ ε есть первообразный корень уравненія:

$$x^e - 1 = 1 \qquad (26)$$

Опредѣливъ разрѣшающую функцію (ε, η_0) съ помощью ее и уравненій (12), будемъ имѣть функціи:

$$(\varepsilon^2, \eta_0) \ , \ (\varepsilon^3, \eta_0) \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ (\varepsilon^{e-1}, \eta_0) \qquad (27)$$

выраженные раціонально въ извѣстныхъ количествахъ къ которымъ причисляется и корень ε. Если функція (25) и функціи (27) будутъ опредѣлены, какъ сказано выше, то будемъ имѣть выраженіе для періода η_0:

$$\eta_0 = \frac{1}{e}\left[(1, \eta_0) + (\varepsilon, \eta_0) + (\varepsilon^2, \eta_0) + \ldots + (\varepsilon^{e-1}, \eta_0)\right] \qquad (28)$$

въ которомъ:

$$(1, \eta_0) = \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_{e-1} = -1$$

Сама же разрѣшающая функція (ε, η_0) есть корень двучленнаго уравненія:

$$x^e = T \tag{29}$$

гдѣ T есть раціональная функція отъ цѣлыхъ чиселъ и отъ корня ε.

§ 298. Наконецъ этотъ методъ можно прямо приложить къ уравненію (1):

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0 \tag{30}$$

для этого надобно положить $e = 1$, $e' = p - 1$, $f' = 1$ и опредѣлить разрѣшающую функцію:

$$(\varepsilon, \alpha) = \alpha + \omega\alpha^g + \omega^2\alpha^{g^2} + \ldots + \omega^{p-2}\alpha^{g^{p-2}} \tag{31}$$

гдѣ ω есть первообразный корень уравненія:

$$x^{p-1} - 1 = 0 \tag{32}$$

и разрѣшающая функція (ω, α) есть корень уравненія:

$$x^{p-1} = T \tag{33}$$

гдѣ T есть извѣстная раціональная функція цѣлыхъ чиселъ и корня ω. Если рѣшивъ уравненіе (33), будемъ имѣть разрѣшающую функцію (ω, α), то формулы (12) дадутъ функціи:

$$(\omega^2, \alpha) \quad , \quad (\omega^3, \alpha) \quad , \quad \ldots \quad , \quad (\omega^{p-2}, \alpha)$$

которыя будутъ выражены раціонально въ функціи (ω, α), а затѣмъ будемъ имѣть корень α:

$$\alpha = \frac{1}{p-1}\left[(1, \alpha) + (\omega, \alpha) + (\omega^2, \alpha) + \ldots + (\omega^{p-2}, \alpha)\right] \tag{34}$$

§ 299. Если въ выраженіи (ω^h, α) числу h дадимъ значенія f, $2f$, $3f, \ldots, (e-1)f$ и замѣтимъ, что ω^f есть первообразный корень уравненія $x^e - 1 = 0$ (2), который можно взять вмѣсто ε, то выраженіе (ω^h, α) получитъ послѣдовательно значенія:

$$(\varepsilon, \eta_0) \quad , \quad (\varepsilon^2, \eta_0) \quad , \quad \ldots \quad , \quad (\varepsilon^{e-1}, \eta_0)$$

Слѣдовательно необходимо опредѣлить только функцію (ω, α), чтобы имѣть всѣ данныя для рѣшенія не только уравненія (30), но и уравненій коихъ корни суть періоды, составленные изъ корней уравненія (30). И такъ, рѣшеніе всѣхъ уравненій какъ (30), такъ и уравненій періодовъ сводится къ опредѣленію функцій (ω, α). Займемся этой функціей.

§ 300. Функцію (ω^h, α) можно написать въ символической формѣ:

$$(\omega^h, \alpha) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} \omega^{\lambda h}.\alpha^{g^\lambda} \tag{35}$$

Если μ будетъ наименьшій остатокъ степени g^λ по (Mp), то:

$$g^\lambda \equiv \mu(Mp)$$

слѣдовательно:

$$\lambda = \text{Ind}(\mu)$$

откуда имѣемъ также:

$$\alpha^{g^\lambda} = \alpha^\mu$$

въ силу этого, формулу (35) можно написать въ формѣ:

$$(\omega^h, \alpha) = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \omega^{h\,\text{Ind}\,\mu}.\alpha^\mu \tag{36}$$

если λ получитъ значенія $0, 1, 2, p-2$, то μ получитъ значенія $1, 2, 3, .., p-1$. Для $h = 0$ имѣемъ:

$$(1, \alpha) = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ . \ . \ . + \alpha^{p-1} = -1 \tag{32}$$

прилагая формулу (11') къ настоящему случаю, основное свойство разрѣшающей функціи (ω, α) выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$(\omega^h, \alpha^g) = \omega^{-h}(\omega^h, \alpha) \tag{38}$$

изъ котораго, если $h = f$, то $\omega^f = \varepsilon$, ε есть первообразный корень уравненія $x^e - 1 = 0$, а возвышая $(\omega^f, \alpha) = (\varepsilon, \eta_0)$ въ e-ю степень, получимъ:

$$(\omega^f, \alpha^g)^e = (\omega^f, \alpha)^e$$

или

$$(\varepsilon, \eta_1)^e = (\varepsilon, \eta_0)^e \tag{39}$$

изъ этого уравненія видимъ, что $(\varepsilon, \eta_0)^e$ съ измѣненіемъ α на α^g не измѣняется, слѣдовательно есть величина извѣстная (§ 284). Если въ (38) положимъ $h=1$ и возвысимъ въ $p-1$-ю степень, то будемъ имѣть:

$$(\omega, \alpha^g)^{p-1} = (\omega, \alpha)^{p-1} \tag{40}$$

т. е. $p-1$-ая степень разрѣшающей функціи (ω, α) есть величина раціонально-извѣстная.

Чтобы опредѣлить эту степень и двучленное уравненіе, отъ котораго зависитъ функція, разсмотримъ произведеніе:

$$(\omega^h, \alpha).(\omega^k, \alpha) \tag{41}$$

гдѣ h и k суть цѣлыя числа, коихъ сумма не дѣлится на $p-1$.

Это произведеніе можетъ быть, въ силу формулы (36), написано какъ двойная сумма:

$$(\omega^h, \omega)(\omega^k, \alpha) = \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \omega^{h \operatorname{Ind}\mu + k \operatorname{Ind}\mu'} \alpha^{\mu+\mu'} \tag{42}$$

Тѣ изъ членовъ этой двойной суммы, въ которыхъ μ' имѣетъ одно и тоже значеніе образуютъ простую сумму:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \alpha^{\mu+\mu'} \omega^{h \operatorname{Ind}\mu + k \operatorname{Ind}\mu'} \tag{43}$$

Если μ получитъ всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots, p-1$, то въ тоже время произведеніе $\mu\mu'$, будетъ сравниваемо съ этими числами по (Mp), только въ иномъ порядкѣ, далѣе, такъ какъ показатели корня α могутъ быть замещены числами сравниваемыми по (Mp), а индексы такихъ чиселъ равны, то очевидно въ формулѣ (43) вмѣсто μ можно поставить $\mu\mu'$ и соображаясь съ уравненіемъ (§ 110, 13):

$$\operatorname{Ind}\mu\mu' = \operatorname{Ind}\mu + \operatorname{Ind}\mu'(Mp-1)$$

суммѣ (43) можно дать форму проще:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \omega^{h \operatorname{Ind}\mu + (h+k) \operatorname{Ind}\mu'} \alpha^{(1+\mu)\mu'}$$

откуда найдемъ:

$$(\omega^h, \alpha)(\omega^k, \alpha) = \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \omega^{h \operatorname{Ind} \mu + (h+k) \operatorname{Ind} \mu'} \alpha^{(1+\mu)\mu'} \qquad (44)$$

Начнемъ съ суммы относительно μ'. Эта простая сумма:

$$\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p-1} \omega^{(h+k) \operatorname{Ind} \mu'} \alpha^{(1+\mu)\mu'}$$

получится изъ формулы (36), если въ ней замѣстимъ α и h, величинами $\alpha^{1+\mu}$ и $h+k$, что дастъ:

$$\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p-1} \omega^{(h+k) \operatorname{Ind} \mu'} \alpha^{(1+\mu)\mu'} = (\omega^{h+k}, \alpha^{1+\mu}) \qquad (45)$$

Между числовыми значеніями, которыя получаетъ μ, есть одно $p-1$, для котораго $1+\mu$ дѣлится на p. Этому значенію соотвѣтствуетъ простая сумма:

$$(\omega^{h+k}, 1) = 1 + \omega^{h+k} + \omega^{2(h+k)} + \ldots + \omega^{(p-2)(h+k)}$$

которая (§ 220, 32) равна нулю, такъ какъ $h+k$ не дѣлится на $p-1$. Для остальныхъ значеній μ, прилагая послѣднее уравненіе (38):

$$(\omega^h, \alpha^{g^m}) = \omega^{-hm} (\omega^h, \alpha)$$

или также:

$$(\omega^h, \alpha^n) = \omega^{-h \operatorname{Ind} n} (\omega^h, \alpha) \qquad (45')$$

найдемъ:

$$(\omega^{h+k}, \alpha^{1+\mu}) = \omega^{-(h+k) \operatorname{Ind} (1+\mu)} (\omega^{h+k}, \alpha)$$

Подставляя это выраженіе въ (45), найдемъ:

$$\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p-1} \omega^{(h+k) \operatorname{Ind} \mu'} \alpha^{(1+\mu)\mu'} = \omega^{-(h+k) \operatorname{Ind} (1+\mu)} (\omega^{h+k}, \alpha)$$

помножая это уравненіе на $\omega^{h \operatorname{Ind} \mu}$ и суммируя относительно μ, найдемъ наконецъ:

$$\frac{(\omega^h, \alpha)(\omega^k, \alpha)}{(\omega^{h+k}, \alpha)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-2} \omega^{h \operatorname{Ind} \mu - (h+k) \operatorname{Ind} (1+\mu)} \qquad (46)$$

Откуда видимъ, что частное первой части этого уравненія есть цѣлая функція корня ω, или есть сложное число корня двучленнаго уравненія (§ 282).

Изъ симметріи первой части уравненія (46) относительно h и k слѣдуетъ, что сумма второй части можетъ быть замѣщена другой:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p-2} \omega^{k\,\mathrm{Ind}\,\nu-(h+k)\,\mathrm{Ind}\,(1+\nu)} \tag{47}$$

что легко показать слѣдующимъ образомъ:

Опредѣлимъ число ν такъ, чтобы оно было меньше p и удовлетворяло сравненію $\mu\nu \equiv 1 (Mp)$, то μ, ν одновременно получатъ всѣ значенія 1, 2, 3, . . . , $p-2$, только въ различныхъ порядкахъ, такъ какъ для значенія μ изъ этого ряда получится значеніе изъ ряда 1, 2, 3, . . . , $p-1$ за исключеніемъ послѣдняго, которое соотвѣтствуетъ значенію $\mu=p-1$ и обратному. Но мы имѣемъ изъ сравненія $\mu\nu \equiv 1 (Mp)$:

$$\mathrm{Ind}\,\mu \equiv -\mathrm{Ind}\,\nu (Mp-1)$$

и

$$\mathrm{Ind}\,(1+\mu) + \mathrm{Ind}\,\nu \equiv \mathrm{Ind}\,(\nu+\mu\nu) \equiv \mathrm{Ind}\,(\nu+1)$$

Слѣдовательно:

$$\mathrm{Ind}\,(1+\mu) \equiv -\mathrm{Ind}\,\nu + \mathrm{Ind}\,(1+\nu)$$

откуда:

$$h\,\mathrm{Ind}\,\mu-(h+k)\,\mathrm{Ind}\,(1+\mu) \equiv k\,\mathrm{Ind}\,\nu-(h+k)\,\mathrm{Ind}\,(1+\nu) (Mp-1)$$

а изъ этого вытекаетъ равенство вышеупомянутыхъ суммъ (46) и (47).

§ 301. Формула (46) теряетъ свое значеніе, если $k=h$, такъ какъ въ этомъ случаѣ $h+k$ дѣлится на $p-1$, но составляя прямо произведеніе:

$$(\omega^h, \alpha).(\omega^{-h}, \alpha)$$

найдемъ:

$$(\omega^h, \alpha)(\omega^{-h}, \alpha) = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p-1} \omega^{h(\mathrm{Ind}\,\mu-\mathrm{Ind}\,\mu')}\alpha^{\mu+\mu'}$$

Если теперь будемъ поступать какъ въ общемъ случаѣ, замѣщая μ чрезъ

$\mu\mu'$ и суммируя относительно μ', то найдемъ:

$$(\omega^h, \alpha)(\omega^{-h}, \alpha) = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p-1} \omega^{h \operatorname{Ind} \mu} \alpha^{\mu'(1+\mu)}$$

$$= \sum_{\mu-1}^{\mu=p-1} \omega^{h \operatorname{Ind} \mu} (\alpha^{1+\mu} + \alpha^{2(1+\mu)} + \ldots + \alpha^{(p-1)(1+\mu)})$$

Если $1+\mu$ отлично отъ p, то сумма, стоящая въ скобкахъ, равна -1, только при $\mu = p-1$ эта сумма равна $p-1$, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$(\omega^h, \alpha)(\omega^{-h}, \alpha) = p\omega^{h \operatorname{Ind}(p-1)} - \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \omega^{h \operatorname{Ind} \mu}$$

Но мы имѣемъ $\operatorname{Ind}(p-1) = \frac{p-1}{2}$, а изъ уравненія:

$$\omega^{p-1} - 1 = \left(\omega^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(\omega^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) = 0$$

имѣемъ $\omega^{\frac{p-1}{2}} = -1$, ибо въ противномъ случаѣ ω не былъ бы первообразнымъ корнемъ уравненія $x^{p-1} - = 0$. Если h не дѣлится на $p-1$, то очевидно будемъ имѣть:

$$1 + \omega^h + \omega^{2h} + \ldots + \omega^{(p-2)h} = \frac{\omega^{(p-1)h} - 1}{\omega^h - 1} = 0$$

такъ какъ, когда μ получаетъ значенія $1, 2, 3, \ldots, p-1$, то $\operatorname{Ind} \mu$ получитъ значеніе $\omega, 1, 2, \ldots, p-1$. Слѣдовательно найдемъ, если h не дѣлится на $p-1$, слѣдующее замѣчательное уравненіе:

$$(\omega^h, \alpha) . (\omega^{-h}, \alpha) = (-1)^h p \tag{48}$$

Если въ этой формулѣ измѣнимъ α на α^{-1}, то будемъ имѣть:

$$(\omega^h, \alpha^{-1})(\omega^{-h}, \alpha^{-1}) = (-1)^h p \tag{49}$$

положивъ $h = 1$ въ (48) и (49) и перемножая результаты, найдемъ:

$$(\omega, \alpha)(\omega^{-1}, \alpha^{-1})(\omega^{-1}, \alpha)(\omega, \alpha^{-1}) = p^2 \tag{50}$$

Легко видѣть, соображаясь съ (45'), что множители $(\omega, \alpha)(\omega^{-1}, \alpha^{-1})$ и

$(\omega^{-1}, \alpha).(\omega, \alpha^{-1})$ равны и какъ произведенія сопряженныхъ составныхъ количествъ имѣютъ положительную величину. Извлекая квадратный корень изъ (50), пайдемъ:

$$(\omega, \alpha)(\omega^{-1}, \alpha^{-1}) = p \tag{51}$$

Произведеніе $(\omega, \alpha)(\omega^{-1}, \alpha^{-1})$ будетъ ничто иное, какъ U (22), если тамъ изложенный методъ приложимъ къ случаю $e = 1$, $e' = p-1$, $f' = 1$, т. е. къ рѣшенію уравненія (38).

§ 302. Формулы (46) и (48) ведутъ къ весьма важной формулѣ, которая даетъ всѣ элементы, служащіе къ рѣшенію какъ уравненія дѣленія круга, такъ и уравненій періодовъ.

Если положимъ въ (46) $k = nh$, то вторая часть этого уравненія будетъ цѣлая съ цѣлыми коэфиціентами функція отъ ω^h, или будетъ *сложное* (§ 282) число, образованное изъ ω^h, означимъ его символомъ $\psi_n(\omega^h)$, такъ что уравненіе (46) приметъ форму:

$$(\omega^h, \alpha).(\omega^{nh}, \alpha) = (\omega^{(n+1)h}, \alpha).\psi_n(\omega^h) \tag{52}$$

гдѣ предполагается, что ни одно изъ чиселъ h, nh, $(n+1)h$ не дѣлится на $p-1$.

Положимъ въ уравненіи (52) послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \ldots, m-1$, полученные результаты перемножимъ, выбросивъ равныхъ множителей изъ обоихъ частей, найдемъ искомую форму:

$$(\omega^h, \alpha)^m = (\omega^{mh}, \alpha).\psi_1(\omega^h).\psi_2(\omega^h)\ , \ \ldots\ , \ \psi_{m-1}(\omega^h) \tag{53}$$

Если въ уравненіи (52) положимъ $h=1$, то n можетъ получить только тѣ значенія: $1, 2, 3, \ldots, p-3$, при которыхъ ни одно изъ чиселъ h, nh, $(n+1)h$ не будетъ дѣлиться на $p-1$. Слѣдовательно, при этомъ условіи уравненіе (53) сдѣлается:

$$(\omega, \alpha)^m = (\omega^m, \alpha).\psi_1(\omega).\psi_2(\omega)\ , \ \ldots\ , \ \psi_{m-1}(\omega) \tag{54}$$

Это основное уравненіе, которое существуетъ для всѣхъ значеній $m < p-1$, даетъ выраженіе (ω^m, α) въ раціональной функціи (ω, α) и извѣстныхъ величинъ.

Чтобы найти то двучленное уравненіе, которымъ опредѣляется (ω, α), положимъ $m = p-2$, уравненіе (54) сдѣлается:

$$(\omega, \alpha)^{p-2} = (\omega^{p-2}, \alpha).\psi_1(\omega).\psi_2(\omega)\ , \ \ldots\ , \ \psi_{p-3}(\omega) \tag{55}$$

помножимъ это уравненіе на уравненіе:

$$(\omega, \alpha).(\omega^{p-2}, \alpha) = -p$$

которое получится изъ (48), полагая въ немъ $h=1$, найдемъ уравненіе:

$$(\omega, \alpha)^{p-1} = -p\psi_1(\omega).\psi_2(\omega) \;,\; \ldots \;,\; \psi_{p-3}(\omega) \qquad (56)$$

отъ котораго зависитъ рѣшеніе всѣхъ остальныхъ.

§ 303 .Мы выше сказали, что функція (ε, η_0) и ей подобныя могутъ быть выражены раціонально въ функціи (ω, α) и извѣстныхъ величинъ. Это можно показать съ помощью формулы (55), если въ ней вмѣсто m возьмемъ $\mathfrak{f}$, $2\mathfrak{f}, \ldots, (e-1)\mathfrak{f}$.

Легко показать какимъ образомъ уравненіе (53) можетъ служить къ составленію того двучленнаго уравненія, изъ котораго получается прямо функція (ω, η_0). Для этого положимъ $h=\mathfrak{f}$ и $\omega^{\mathfrak{f}}=\varepsilon$, то $(\omega^{\mathfrak{f}}, \alpha)=(\varepsilon, \eta_0)$. Формула (52) въ этомъ случаѣ можетъ быть только тогда приложена, когда числа $n\mathfrak{f}$, $(n+1)\mathfrak{f}$ не дѣлятся на $p-1$, а слѣдовательно, числа n и $n+1$ не дѣлятся на e. Формула (53) при этихъ условіяхъ сдѣлается:

$$(\varepsilon, \eta_0)^m = (\varepsilon^m, \eta_0)\,\psi_1(\varepsilon).\psi_2(\varepsilon) \;,\; \ldots \;,\; \psi_{m-1}(\varepsilon) \qquad (57)$$

полагая $m=e-1$, найдемъ:

$$(\varepsilon, \eta_0)^{e-1} = (\varepsilon^{e-1}, \eta_0)\,\psi_1(\varepsilon).\psi_2(\varepsilon) \;,\; \ldots \;,\; \psi^{e-1}(\varepsilon) \qquad (57')$$

Но уравненіе (48), полагая въ немъ $h=\mathfrak{f}$, даетъ:

$$(\varepsilon, \eta_0)(\varepsilon^{e-1}, \eta_0) = (-1)^{\mathfrak{f}}p$$

умножая на него (57') найдемъ:

$$(\varepsilon, \eta_0)^e = (-1)^{\mathfrak{f}}p\,.\,\psi_1(\varepsilon)\,.\,\psi_2(\varepsilon)\;\ldots\;\psi_{e-1}(\varepsilon) \qquad (58)$$

Чтоже касается до функцій $(\varepsilon^2, \eta_0).(\varepsilon^3, \eta_0)\ldots(\varepsilon^{e-1}, \eta_0)$ для всѣхъ значеній $m<e$, то онѣ опредѣляются изъ формулы (57), полагая $m=2, 3, \ldots, e-1$, въ функціи (ε, η_0).

§ 304. Если въ уравненіи (56), для краткости, на мѣсто второй части поставимъ снова T и разложимъ дробь $\frac{1}{p-1}$ на частныя дроби:

$$\frac{1}{p-1} = \frac{m}{q^a} + \frac{m_1}{q_1^{a_1}} + \ldots \pm n \qquad (59)$$

гдѣ q^a, $q_1^{a_1}, \ldots$ суть простыя числа составляющія $p-1$, и n, m, $m_1, \ldots$

суть цѣлыя числа изъ коихъ $m < q^a$, $m_1 < q^{a_1}, \ldots$, то можно положить:

$$(\omega, \alpha) = T^{\frac{1}{n}} \sqrt[q^a]{T^m} . \sqrt[q_1^{a_1}]{T^{m_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (60)$$

Въ этомъ выраженіи для каждаго изъ корней можно взять произвольно одну изъ его возможныхъ величинъ, такъ какъ такія соединенія дадутъ всего $p-1$ различныхъ величинъ для $(\omega, \alpha) = \sqrt[p-1]{T}$, одну изъ нихъ произвольно взятую и можно принять за (ω, α).

Изъ этого видимъ, что неизвѣстные элементы въ рѣшеніи выражаются раціонально въ функціи (ω, α), которая, какъ видно изъ формулы (60), составлена изъ корней, степени коихъ суть степени простыхъ чиселъ q^a, $q_1^{a_1}, \ldots$, подъ которыми находятся степени извѣстной функціи T. Такимъ образомъ въ рѣшенія уравненій какъ (1), такъ уравненій періодовъ будутъ входить корни, коихъ показатели будутъ степени простыхъ чиселъ.

§ 305. Остается еще показать, что всѣ *разрѣшающія* (ω^{n_1}, α) выражаются тѣми изъ нихъ въ которыхъ ω^m есть первообразный корень уравненія, степень коего есть степень простаго числа. Чтобы это показать, положимъ какъ выше:

$$p - 1 = q^a q_1^{a_1} q_2^{a_2} \; . \; . \; .$$

и

$$t = \frac{p-1}{q^a} \;, \quad t_1 = \frac{p-1}{q_1^{a_1}} \quad , \; . \; . \; . \; . \; , \quad t_i = \frac{p-1}{q_i^{a_i}}$$

пусть m будетъ какое нибудь цѣлое число меньше $p-1$, то можно положить:

$$m = nt + n_1 t_1 + n_2 t_2 + \; . \; . \; . \; . \; + n_i t_i + z(p-1) \qquad (61)$$

гдѣ n, n_1, $n_2, \ldots$ суть цѣлыя положительныя числа меньше $q^a, q_1^{a_1}, \ldots, q_i^{a_i}$, а z положительное или отрицательное цѣлое число.

Такъ какъ $\omega^{p-1} = 1$, то имѣемъ, очевидно:

$$(\omega^m, \alpha) = \left(\omega^{nt + n_1 t_1 + \ldots + n_i t_i}, \alpha\right)$$

Если чрезъ $\psi(h, k, \omega)$ означимъ выраженіе:

$$\frac{(\omega^h, \alpha)(\omega^k, \alpha)}{(\omega^{h+k}, \alpha)} = \psi(h, k, \omega)$$

которое есть цѣлая съ цѣлыми коэфиціентами функція только корня ω, и если $h+k$ не дѣлится на $p-1$, то будемъ имѣть изъ уравненія:

$$(\omega^h, \alpha)(\omega^k, \alpha) = \psi(h, h, \omega).(\omega^{h+k}, \alpha) \tag{62}$$

послѣдовательно слѣдующія уравненія:

$$\left(\omega^{nt}, \alpha\right)\left(\omega^{n_1 t_1}, \alpha\right) = \psi(nt, n_1 t_1, \omega).\left(\omega^{nt+n_1 t_1}, \alpha\right)$$

$$\left(\omega^{nt+n_1 t_1}, \alpha\right)\left(\omega^{n_2 t_2}, \alpha\right) = \psi(nt+n_1 t_1, n_2 t_2, \omega).\left(\omega^{nt+n_1 t_1+n_2 t_2}, \alpha\right)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\left(\omega^{nt+n_1 t_1+\ldots+n_{i-1} t_{i-1}}, \alpha\right)\left(\omega^{n_i t_i}, \alpha\right) = \psi(nt+a_1 t_1+\ldots+n_i t_i, \omega).\left(\omega^{nt+n_1 t_1+\ldots+n_i t_i}, \alpha\right)$$

перемножая которыя найдемъ:

$$(\omega^m, \alpha) = \frac{\left(\omega^{nt}, \alpha\right)\left(\omega^{n_1 t_1}, \alpha\right) \ldots . \left(\omega^{n_i t_i}, \alpha\right)}{\Phi(\omega)} \tag{63}$$

гдѣ:

$$\Phi(\omega) = \psi(nt, n_1 t_1, \omega) . \psi(nt+n_1 t_1, n_2 t_2, \omega) \ldots \psi(nt+\ldots+n_{i-1} t_{i-1}, n_i t_i, \omega)$$

$\Phi(\omega)$ есть цѣлая съ цѣлыми коэфиціентами функцій только отъ ω, гдѣ сумма цѣлыхъ чиселъ, входящихъ въ каждую изъ функціи ψ, какъ легко видѣть не дѣлится на $p-1$.

Пусть $\delta = q^{a-\beta} q_1^{a_1-\beta_1} \ldots q_i^{a_i-\beta_i}$ есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ m и $p-1$, ω^m есть первообразный корень уравненія степени $q^a q_1^{a_1} \ldots q_i^{a_i}$, то изъ уравненія (61), такъ какъ всѣ числа $t_1, t_2, \ldots, t_i$ дѣлятся на q^a, слѣдуетъ, что наибольшая степень q въ числахъ n и $p-1$ есть $q^{a-\beta}$, то наибольшій общій дѣлитель чиселъ nt и $p-1$ есть $q^{a-\beta} q_1^{a_1}, \ldots, q_i^{a_i}$, а слѣдовательно ω^{nt} есть первообразный корень двучленнаго уравненія коего степень есть q^a. Точно также можно показать, что $\omega^{n_1 t_1}, \ldots, \omega^{n_i t_i}$ суть первообразные корни двучленныхъ уравненій, коихъ степени суть $q^{a_1}, q^{a_2}, \ldots, q_i^{a_i}$, какъ выше было сказано.

§ 306. Тѣ разрѣшающія функціи (ω^h, α), въ которыхъ ω^h есть корень двучленнаго уравненія степени q^a, могутъ быть найдены слѣдующимъ образомъ.

Положимъ въ уравненіи (54) $m=q$, то извлекая корень q-ей степени будемъ имѣть:

$$(\omega^h, \alpha) = \sqrt[q]{\psi_1(\omega^h).\psi_2(\omega^h) \ldots \psi_{q-1}(\omega^h).(\omega^{hq}, \alpha)} \tag{64}$$

если вмѣсто ω поставимъ послѣдовательно:

$$\omega^{q} \quad , \quad \omega^{q^2} \quad , \quad \omega^{q^3} \quad , \quad \omega^{q^{a-2}}$$

то найдемъ слѣдующія выраженія:

$$(\omega^{hq}, \alpha) = \sqrt[q]{\psi_1(\omega^{hq}).\psi_2(\omega^{hq}) \ldots \psi_{q-1}(\omega^{hq}).(\omega^{hq^2}, \alpha)}$$

$$(\omega^{hq^2}, \alpha) = \sqrt[q]{\psi_1(\omega^{hq^2}).\psi_2(\omega^{hq^2}) \ldots \psi_{q-1}(\omega^{hq^2}).(\omega^{hq^3}, \alpha)} \qquad (65)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\omega^{hq^{a-2}}, \alpha) = \sqrt[q]{\psi_1(\omega^{hq^{a-2}}).\psi_2(\omega^{hq^{a-2}}) \ldots \psi_{q-1}(\omega^{hq^{a-2}}).(\omega^{hq^{a-1}}, \alpha)}$$

Если теперь въ формулѣ (54) ω замѣстимъ чрезъ $\omega^{q^{a-1}}$, m чрезъ $q-1$ и умножимъ на $(\omega^{hq^{a-1}}, \alpha)$, то найдемъ, замѣчая, что:

$$\omega^{(q-1)hq^{a-1}} = \omega^{hq^a}.\omega^{-hq^{a-1}} \quad \text{и} \quad (\omega^h)^{q^a} = 1$$

$$(\omega^{hq^{a-1}}, \alpha)^q = \psi_1(\omega^{hq^{a-1}}) \ldots\ldots \psi_{q-2}(\omega^{hq^{a-1}}).(\omega^{hq^{a-1}}, \alpha).(\omega^{-hq^{a-1}}, \alpha)$$

но изъ (48) имѣемъ:

$$(\omega^{hq^{a-1}}, \alpha).(\omega^{-hq^{a-1}}, \alpha) = (-1)^{hq^{a-1}}.p$$

Слѣдовательно будемъ имѣть послѣднюю форму:

$$(\omega^{hq^{a-1}}, \alpha) = \sqrt[q]{\psi_1(\omega^{hq^{a-1}}) \ldots \psi_{q-2}(\omega^{hq^{a-1}}).(-1)^{hq^{a-1}}.p} \qquad (66)$$

которая служитъ, вмѣстѣ съ формулами (64) и 65), для нахожденія функціи (ω^h, α) a послѣдовательнымъ извлеченіемъ корней q-й степени.

Функціи ψ, числомъ $q-1$, входящія въ предыдущія формулы, могутъ быть сведены еще на меньшее число и такимъ образомъ еще упростятъ рѣшеніе, но мы на этомъ не остановимся, а отошлемъ читателя къ сочиненію Гаусса.

Рѣшеніе двучленнаго уравненія, данное до § 299 находится въ Гаусса Disqui § 360. Послѣ Гаусса Лагранжъ въ его „Traité sur la resolution des equations numeriques“ занимался тѣмъ же предметомъ и казалось упростилъ способъ Гаусса, но это упрощеніе только кажущееся. Сведеніе же рѣшенія двучленныхъ уравненій на опредѣленіе функціи $\psi_h(\omega^h)$, данное Якоби было уже извѣстно и Гауссу, но опубликовано было только послѣ его

смерти. Этимъ предметомъ занимались также Коши и Эйзенштейнъ. Приложимъ это къ частнымъ случаямъ.

§ 307. Остается показать какъ найти въ каждомъ случаѣ сложное число $\psi_n(\omega^k)$, образованное изъ корня ω^k. Пусть ω^k будетъ первообразный корень уравненія $x^e-1=0$, что случится, если положимъ $k=f$, а $p-1=e.f$. Пусть $\omega^f=\varepsilon$, то:

$$\psi_n(\varepsilon)=\sum_{\mu=1}^{\mu=p-2}\varepsilon^{\operatorname{Ind}\mu-(n+1)\operatorname{Ind}(1+\mu)} \tag{62}$$

Въ этой формулѣ показатели корня ε должны быть взяты по (Me). Для вставленія индексовъ надобно взять какой нибудь изъ первообразныхъ корней g простаго числа p и вычислить $\operatorname{Ind}\mu$, давая числу μ всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots, p-2$, и затѣмъ вычислить показателя:

$$\operatorname{Ind}\mu-(n+1)\operatorname{Ind}(1+\mu)$$

и взять ихъ остатки по модулю e. Затѣмъ сосчитать сколько разъ повторяется число $0, 1, 2, 3, \ldots, e-1$, и если найдемъ, что оно повторяется 0, A_0 разъ, 1 A_1 разъ, 2 A_2 разъ и т. д., наконецъ, $e-1$ A_{e-1} разъ, то:

$$A_0+A_1+A_2\,.\,.\,.\,.\,.+A_{e-1}=p-2$$

и составное число $\psi_n(\varepsilon)$ будетъ:

$$\psi_n(\varepsilon)=A_0+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^2+\,.\,.\,.\,.+A_{e-1}\varepsilon^{e-1}$$

Пояснимъ это примѣромъ. Пусть $p=61$ и $\psi_1(\varepsilon)$ требуется вычислить для первообразнаго корня ε уравненія $x^5-1=0$. Слѣдовательно, здѣсь $e=5$. Одинъ изъ первообразныхъ корней простаго числа 61 есть 2, требуется вычислить составное число:

$$\psi_1(\varepsilon)=\sum_{\mu=1}^{\mu=59}\varepsilon^{\operatorname{Ind}\mu-2\operatorname{Ind}(\mu+1)}$$

Составимъ слѣдующую таблицу:

$\mu =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\text{Ind}\,\mu =$	0	1	6	2	22	7	49	3	12	23	15	8	40	50	28	4	47	13	26	24
$\text{Ind}\,\mu - 2\,.\,\text{Ind}(1+\mu)\ M5$	3	4	2	3	3	4	3	4	1	3	4	3	0	4	0	0	1	1	3	4
$\mu =$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\text{Ind}\,\mu =$	55	16	57	9	44	41	18	51	35	29	59	5	21	48	11	14	39	27	46	25
$\text{Ind}\,\mu - 2\,.\,\text{Ind}(1+\mu)\ M5$	3	2	4	1	2	0	1	1	2	1	4	3	0	1	3	1	0	0	1	2
$\mu =$	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\text{Ind}\,\mu =$	54	56	43	17	34	58	20	10	38	45	53	42	33	19	37	52	32	36	31	30
$\text{Ind}\,\mu - 2\,.\,\text{Ind}(1+\mu)\ M5$	2	0	4	4	3	3	0	4	3	4	4	1	0	0	3	3	0	4	1	. . .

Изъ этой таблицы видно, что показатель 0 корня ε повторялся 12 разъ, т. е. $A_0 = 12$, показатель 1 повторялся также 12 разъ, т. е. $A_1 = 12$, точно также найдемъ:

$$A_2 = 6 \quad , \quad A_3 = 15 \quad , \quad A_4 = 14$$

Слѣдовательно:

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 59$$

откуда:

$$\psi_1(\varepsilon) = 12 + 12\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 15\varepsilon^3 + 14\varepsilon^4$$

Приложимъ все вышеизложенное къ слѣдующимъ примѣрамъ:

Примѣръ 1. Для перваго приложенія предыдущей теоріи возьмемъ простое уравненіе, которое мы уже рѣшили выше (§ 291, пр. 1).

$$\frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Первообразный корень уравненія:

$$x^4 - 1 = 0$$

есть i, слѣдовательно, $\varepsilon = i$ и опредѣлимъ разрѣшающую функцію (i, α), которая есть корень, въ силу формулы (56), двучленнаго уравненія:

$$(i, \alpha)^4 = -5\,\psi_1(i)\,.\,\psi_2(i)$$

а сложныя числа $\psi_1(i)$ и $\psi_2(i)$ будутъ:

$$\psi_1(i) = \sum_{\mu=1}^{\mu=1} i^{\,\mathrm{Ind}\,\mu - 2\,\mathrm{Ind}\,(1+\mu)} \quad , \quad \psi_2(i) = \sum_{\mu=1}^{\mu=3} i^{\,\mathrm{Ind}\,\mu - 3\,\mathrm{Ind}\,(1+\mu)}$$

Возьмемъ первообразный корень простаго числа 5, меньшій изъ нихъ есть 2 и составимъ таблицу:

$$\begin{array}{rcccccc}
\mu = 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 \\
\mathrm{Ind}\,\mu = 0 & , & 1 & , & 3 & , & 2 \\
\mathrm{Ind}\,(1+\mu) = 1 & , & 3 & , & 2 & & \\
\mathrm{Ind}\,\mu - 2\,\mathrm{Ind}\,(1+\mu) \equiv 2 & , & 3 & , & 3 & & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ (M4)$} \\
\mathrm{Ind}\,\mu - 3\,\mathrm{Ind}\,(1+\mu) \equiv 1 & , & 0 & , & 1 & &
\end{array}$$

съ помощью этой таблицы найдемъ:

$$\psi_1(i) = -(1+2i) \quad , \quad \psi_2(i) = 1+2i \quad , \quad (i,\alpha)^4 = 5(1+2i)^2$$

Изъ уравненія (52) и (53) будемъ имѣть:

$$(i,\alpha)^2 = (-1,\alpha)\psi_1(i) \quad \text{и} \quad (i,\alpha)^3 = (-i,\alpha)\psi_1(i)\psi_2(i)$$

откуда:

$$(-1,\alpha) = -\sqrt{5} \quad , \quad (-i,\alpha) = -(-i,\alpha)\frac{\sqrt{5}}{1+2i}$$

наконецъ уравненіе (34) даетъ искомый корень α:

$$\alpha = \frac{1}{4}\left\{-1-\sqrt{5}+(i,\alpha)\left[1-\frac{\sqrt{5}}{1+2i}\right]\right\}$$

который, послѣ преобразованія:

$$(i,\alpha)^2\left(1-\frac{\sqrt{5}}{1+2i}\right)^2 = -\left(10-2\sqrt{5}\right)$$

получитъ слѣдующую форму:

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) = -\tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) \qquad (68)$$

которая совпадаетъ съ выше найденной (§ 291). Имѣя одинъ изъ корней, его степени дадутъ остальные:

$$\alpha^2 = -\tfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2} = -\tfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \qquad (68')$$

$$\alpha^4 = \frac{1}{\alpha} = -\tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

Примѣръ 2. Какъ 2-й примѣръ возьмемъ уравненіе.

$$\frac{x^{11}-1}{x-1} = 0$$

здѣсь $p=11$, $p-1=10=2.5$. Пусть $e=5$, $f=2$, если ε будетъ пер-

вообразный корень уравненія:

$$x^5 - 1 = 0$$

то:

$$(\varepsilon, \eta_0) = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3 + \varepsilon^4\eta_4$$

а въ силу формулы (58):

$$(\varepsilon, \eta_0)^5 = 11 . \psi_1(\varepsilon)\, \psi_2(\varepsilon)\, \psi_3(\varepsilon) \tag{69}$$

гдѣ:

$$\psi_1(\varepsilon) = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varepsilon^{\operatorname{Ind}\mu - 2\operatorname{Ind}(1+\mu)}$$

$$\psi_2(\varepsilon) = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varepsilon^{\operatorname{Ind}\mu - 3\operatorname{Ind}(1+\mu)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varepsilon^{\operatorname{Ind}\mu + 2\operatorname{Ind}(1+\mu)}$$

$$\psi_3(\varepsilon) = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varepsilon^{\operatorname{Ind}\mu - 4\operatorname{Ind}(1+\mu)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \varepsilon^{\operatorname{Ind}\mu + \operatorname{Ind}(1+\mu)}$$

Наименьшій первообразный корень простого числа 11 есть 2, полагая $g=2$ построимъ слѣдующую таблицу:

$$\begin{array}{r} \mu = 1 \;,\; 2 \;,\; 3 \;,\; 4 \;,\; 5 \;,\; 6 \;,\; 7 \;,\; 8 \;,\; 9 \;,\; 10 \\ \operatorname{Ind}\mu = 0 \;,\; 1 \;,\; 8 \;,\; 2 \;,\; 4 \;,\; 9 \;,\; 7 \;,\; 3 \;,\; 6 \;,\; 5 \\ \operatorname{Ind}(1+\mu) = 1 \;,\; 8 \;,\; 2 \;,\; 4 \;,\; 9 \;,\; 7 \;,\; 3 \;,\; 6 \;,\; 5 \qquad \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Ind}\mu + \operatorname{Ind}(1+\mu) \equiv 1 \;,\; 4 \;,\; 0 \;,\; 1 \;,\; 3 \;,\; 1 \;,\; 0 \;,\; 4 \;,\; 1 \\ \operatorname{Ind}\mu + 2\operatorname{Ind}(1+\mu) \equiv 2 \;,\; 2 \;,\; 2 \;,\; 0 \;,\; 2 \;,\; 3 \;,\; 3 \;,\; 0 \;,\; 1 \\ \operatorname{Ind}\mu - 2\operatorname{Ind}(1+\mu) \equiv 3 \;,\; 0 \;,\; 4 \;,\; 4 \;,\; 1 \;,\; 0 \;,\; 1 \;,\; 1 \;,\; 1 \end{array}\right\} (M5)$$

Съ помощью этой таблицы и уравненія:

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

найдемъ:

$$\psi_1(\varepsilon) = 2 + 4\varepsilon + \varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3$$

$$\psi_2(\varepsilon) = 2 + \varepsilon + 4\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 = -\varepsilon + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^4$$

$$\psi_3(\varepsilon) = 2 + 4\varepsilon + \varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3$$

откуда:

$$\psi_1(\varepsilon).\psi_2(\varepsilon) = 10\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 + 3\varepsilon^4$$

$$\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon)\psi_3(\varepsilon) = 6\varepsilon + 41\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3 + 26\varepsilon^4$$

слѣдовательно уравненіе (69) сдѣлается:

$$(\varepsilon, \eta_0)^5 = 66\varepsilon + 451\varepsilon^2 + 176\varepsilon^3 + 286\varepsilon^4$$

Этимъ уравненіемъ опредѣляется функція (ε, η_0), которую можно разсматривать какъ величину извѣстную, затѣмъ изъ формулы (57) найдемъ:

$$(\varepsilon^2, \eta_0) = \frac{(\varepsilon, \eta_0)^2}{\psi_1(\varepsilon)}, \quad (\varepsilon^3, \eta_0) = \frac{(\varepsilon, \eta_0)^3}{\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon)}, \quad (\varepsilon^4, \eta_0) = \frac{(\varepsilon, \eta_0)^4}{\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon)\psi_3(\varepsilon)}$$

Изъ предыдущаго примѣра мы имѣемъ корни уравненія $x^5-1=0$: ε, ε^2, ε^3, ε^4 (68) и (68'), подставляя которые въ ψ_1, ψ_2, ψ_3, найдемъ:

$$\psi_1(\varepsilon) = \tfrac{1}{4}(1 - 5\sqrt{5} + 2i\sqrt{10-2\sqrt{5}} + i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$

$$\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon) = \tfrac{1}{4}(-31 + 5\sqrt{5} + 7i\sqrt{10-2\sqrt{5}} + 6i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$

$$\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon)\psi_3(\varepsilon) = \tfrac{1}{4}(-89 - 25\sqrt{5} - 20i\sqrt{10-2\sqrt{5}} - 20i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$

откуда (69):

$$(\varepsilon, \eta_0) = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} - 20i\sqrt{10-2\sqrt{5}} - 25i\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$$

а наконецъ будемъ имѣть періодъ η_0:

$$\eta_0 = \frac{1}{5}\left(-1 + (\varepsilon, \eta_0) + \frac{(\varepsilon, \eta_0)^2}{\psi_1(\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon, \eta_0)^3}{\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon, \eta_0)^4}{\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon)\psi_3(\varepsilon)}\right)$$

Примѣръ 3. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{x^{19}-1}{x-1} = 0, \quad \frac{x^{23}-1}{x-1} = 0$$

Таковъ способъ Гаусса, который впослѣдствіи былъ обобщенъ Абелемъ для несократимыхъ уравненій, въ которыхъ одинъ изъ корней есть раціональная функція какого-нибудь другого. Такія уравненія были названы абелевскими, объ нихъ мы будемъ говорить ниже.

Образованіе уравненія, коего корни суть f-членные періоды и связь съ квадратичными вычетами.

§ 308. Въ предъидущихъ главахъ мы показали какимъ образомъ f-членные періоды могутъ быть найдены, не составляя тѣхъ уравненій, которыхъ они суть корнями, въ настоящей главѣ покажемъ какъ составить эти уравненія, т. е. какъ вычислить симметрическія функціи:

$$\begin{array}{c} \eta_0+\eta_1+\eta_2+\ldots\ldots+\eta_{e-1} \\ \eta_0\eta_1+\eta_0\eta_2 \quad +\ldots\ldots+\eta_{e-2}\eta_{e-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_0\eta_1\eta_2\,,\ldots\ldots,\eta_{e-1} \end{array}$$

и выведемъ замѣчательную связь между теоріей дѣленія круга и высшей ариѳметикой или теоріей чиселъ.

Замѣтимъ во первыхъ, что:

$$\eta_0+\eta_1+\eta_2+\ldots\ldots+\eta_{e-1}=-1 \tag{1}$$

такъ какъ это есть сумма всѣхъ корней уравненія $X=0$.

Произведеніе періодовъ:

$$\eta_0=\sum_{s=0}^{s=f-1}\alpha^{g^{se}} \quad , \quad \eta_k=\sum_{t=0}^{t=f-1}\alpha^{g^{te+k}}$$

можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\eta_0\eta_k=\sum_{s=0}^{s=f-1}\ \sum_{t=0}^{t=f-1}\alpha^{g^{se}(1+g^{te+k})}$$

въ силу того, что для извѣстнаго постояннаго значенія числа s, числа $t+s$ и t будутъ сравниваемы одновременно съ числами 0, 1, 2, . . . , f—1 по (Mf). Если мы сначала выполнимъ суммованіе относительно s, то должны разсмотрѣть два случая: или для опредѣленнаго значенія числа t имѣемъ:

$$1+g^{te+k}\equiv 0(Mp) \tag{2}$$

въ этомъ случаѣ соотвѣтствующая часть двойной суммы будетъ равна f; или найдемъ, что:

$$1+g^{te+k}\equiv g^{ze+h}(Mp) \tag{3}$$

гдѣ h означаетъ одно изъ чиселъ 0, 1, 2, . . . , e—1, а z одно изъ чиселъ 0, 1, 2, . . . , f—1. Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующая часть двойной суммы будетъ:

$$\sum_{s=0}^{s=t-1} \alpha^{g^{(s+t)e+h}} = \eta_h$$

Легко видѣть, что въ сравненіи (2):

$$g^{te+k} \equiv -1 (Mp)$$

или $te+k = \frac{p-1}{2}$, такъ какъ $te+k$ можетъ имѣть только $= 0, 1, 2, \ldots,$ $p-2$ значеніямъ, изъ коихъ единственное $\frac{p-1}{2}$ удовлетворяетъ ему.

Если f есть число четное, то изъ уравненія:

$$te + k = \frac{p-1}{2} = \frac{e.t}{2}$$

слѣдуетъ, что k должно дѣлиться на e, этому условію удовлетворяетъ только $k=0$ изъ ряда чиселъ 0, 1, 2, . . . , e—1. Слѣдовательно только для $t = \frac{f}{2}$ это уравненіе имѣетъ мѣсто. Если число f будетъ нечетное, то k должно дѣлиться на $\frac{e}{2}$, а нулемъ быть не можетъ, ибо мы бы имѣли:

$$f\,\frac{e}{2} \equiv 0 (Me)$$

а слѣдовательно f было бы число четное. Откуда необходимо:

$$k = \frac{e}{2} \quad , \quad t = \frac{f-1}{2}$$

Будемъ подразумѣвать подъ символомъ $n^{(k)}$ единицу, если f есть число четное, а $k=0$ или если f есть число нечетное, а $k = \frac{e}{2}$, во всѣхъ другихъ случаяхъ подъ этимъ символомъ будемъ подразумѣвать нуль т. е.:

$$n^{(k)} = 1 \quad \text{или} \quad 0$$

Означимъ символомъ m_h^k число значеній t, при которыхъ имѣетъ мѣсто второй случай, такъ что $m_h^k = 0$, если соотвѣтственно системѣ h и k

нѣтъ системы t и s удовлетворяющей сравненію (3). Откуда, очевидно имѣемъ:

$$\eta_0\eta_k = n^{(k)}.\mathrm{f} + m_0^k\eta_0 + m_1^k\eta_1 + \ldots\ldots + m_{e-1}^k\eta_{e-1} \qquad (4)$$

если въ этой формулѣ измѣнимъ α на α^{g^m}, то будемъ имѣть:

$$\eta_m\eta_{m+k} = n^{(k)}.\mathrm{f} + m_0^k\eta_m + m_1^k\eta_{m+1} + \ldots\ldots + m_{e-1}^k\eta_{m-1} \qquad (5)$$

§ 309. Вотъ нѣкоторыя, легко получаемыя свойства символа m_h^k.

Такъ какъ каждый періодъ содержитъ f членовъ, то произведеніе $\eta_0\eta_k$ содержитъ f^2 членовъ, слѣдовательно, изъ формы (4) этого произведенія слѣдуетъ, что:

$$n^{(k)} + m_0^k + m_1^k + \ldots\ldots + m^k{}_{e-1} = \mathrm{f} \qquad (6)$$

соображаясь съ этимъ уравненіемъ, найдемъ:

$$\eta_0\eta_k + \eta_1\eta_{k+1} + \ldots + \eta_{e-1}\eta_{k-1} = n^{(k)}.e\mathrm{f} - m_0^k - m_1^k - \ldots - m^k{}_{e-1} = pn^{(k)} - \mathrm{f} \qquad (7)$$

точно также:

$$\eta_m\eta_{k+m} + \eta_{m+1}\eta_{k+m+1} + \ldots\ldots + \eta_{m+1}\eta_{k+m-1} = pn^{(k)} - \mathrm{f}$$

или измѣняя k на $k+m$, будемъ имѣть:

$$\eta_m\eta_k + \eta_{m+1}\eta_{k+1} + \ldots\ldots + \eta_{m-1}\eta_{k-1} = n^{(k-m)}.p - \mathrm{f} \qquad (8)$$

Умножимъ уравненіе (4) на η_h и въ произведеніи замѣнимъ послѣдовательно α на $\alpha^g, \alpha^{g^2}, \ldots, \alpha^{g^{e-1}}$, это даетъ слѣдующую систему уравненій:

$$\eta_0\eta_h\eta_k = n^{(k)}.\mathrm{f}.\eta^h + m_0^k\eta_0\eta_h + m_1^k\eta_1\eta_h + \ldots\ldots + m^k{}_{e-1}\eta_{e-1}\eta_h$$

$$\eta_1\eta_{h+1}\eta_{k+1} = n^{(k)}\mathrm{f}\eta_{h+1} + m_0^k\eta_1\eta_{h+1} + m_1^k\eta_2\eta_{h-1} + \ldots\ldots + m^k{}_{e-1}\eta_0\eta_{h+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_e\eta_{h-1}\eta_{k-1} = n^{(k)}\mathrm{f}\eta_{h-1} + m_0^k\eta_{e+1}\eta_{h-1} + m_1^k\eta_0\eta_{h+1} + \ldots\ldots + m^k{}_{e-1}\eta_{e-2}\eta_{h-1}$$

Сложимъ эти уравненія, коэфиціентъ у $n^{(k)}$, также, какъ и коэфиціенты въ каждомъ изъ чиселъ m_i^k въ силу уравненія (8), будетъ равенъ $-\mathrm{f}$, исключая для частнаго f коэфиціентъ у m_i^k, который есть:

$$\eta_h\eta_h + \eta_{h+1}\eta_{h+1} + \ldots\ldots + \eta_{h-1}\eta_{h-1}$$

въ силу (5) равенъ $p-\mathrm{f}$, такъ какъ при f четномъ $n^{(k)} = 1$. Для извѣст-

наго f коэфиціентъ у $m^k_{h+\frac{e}{2}}$, который есть:

$$\eta_h\eta_{h+\frac{e}{2}}+\eta_{h+1}\eta_{h+\frac{e}{2}}+\ldots\ldots+\eta_{h-1}\eta_{h-1+\frac{e}{2}}$$

имѣетъ то-же значеніе, такъ какъ въ этомъ случаѣ $n^{\left(\frac{e}{2}\right)}=1$. Соображаясь съ (6), имѣемъ для обоихъ случаевъ f.

Если f четное, то:

$$\eta_0\eta_h\eta_k+\eta_1\eta_{h+1}\eta_{k+1}+\ldots\ldots+\eta_{e-1}\eta_{h-1}\eta_{k-1}=-f^2+pm^k_h$$

Если f нечетное, то: (9)

$$\eta_0\eta_h\eta_k+\eta_1\eta_{h+1}\eta_{k+1}+\ldots+\eta_{e-1}\eta_{h-1}\eta_{k-1}=-f^2+p.m^k_{h+\frac{e}{2}}$$

Такъ какъ первыя части этихъ уравненій не измѣняются перемѣщая h и k, то найдемъ слѣдующее свойство символовъ $m_h{}^k$:

$$m^k_h=m^h_k,\ \text{если f четное}$$

и (10)

$$m^k_{h+\frac{e}{2}}=m^h_{k+\frac{e}{2}},\ \text{если f нечетное.}$$

Наконецъ, если въ уравненіи (5) вмѣсто чиселъ m и k поставимъ $m+k$ и $e-k$, то найдемъ:

$$\eta_m\eta_{m+k}=n^{(e-k)}.f+m^{e-k}_0\eta_{m+k}+m^{e-k}_1\eta_{m+k+1}+\ldots+m^{e-k}_{e-1}\eta_{m+k-1}$$

Сравнимъ это выраженіе для $\eta_m\eta_{m+k}$ съ (5) легко найдемъ еще слѣдующую зависимость между числами m^k_h:

$$m^k_h=m^{e-k}_{h-k} \qquad (11)$$

§ 310. Послѣ этихъ изслѣдованій построимъ уравненіе корнями коего суть періоды $\frac{p-1}{2}$-членные. Пусть эти періоды будутъ η_0 и η_1, то форма уравненія будетъ:

$$\eta^2-(\eta_0+\eta_1)\eta+\eta_0\eta_1=0$$

въ которомъ надобно опредѣлить коэфиціенты $\eta_0+\eta_1$ и $\eta_0\eta_1$. Изъ нихъ первый коэфиціентъ:

$$\eta_0+\eta_1=-1$$

Если число $\frac{p-1}{2}$, которое является въ этомъ случаѣ вмѣсто f, есть четное, то по (4) имѣемъ:

$$\eta_0\eta_1 = m'_0\eta_0 + m'_1\eta_1$$

Цѣлыя числа m'_0 и m'_1 въ силу (11) равны между собою, что можно показать слѣдующимъ образомъ. Назовемъ чрезъ n произведеніе $\eta_0\eta_1$, которое есть число цѣлое, предъидущее уравненіе можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$(m'_0+n)\eta_0 + (m'_1+n)\eta_1 = 0$$

Въ этомъ уравненіи всѣ степени α ниже p, слѣдовательно, въ силу несократимости уравненія $X=0$, должно быть:

$$m'_0 = m'_1 = -n$$

Этотъ результатъ въ связи съ (6) $m'_0 + m'_1 = \frac{p-1}{2}$ даетъ:

$$\eta_0\eta_1 = -\frac{p-1}{2}$$

Если же $\frac{p-1}{2}$ есть число нечетное, то изъ уравненія (4):

$$\eta_0\eta_1 = \frac{p-1}{2} + m'_0\eta_0 + m'_0\eta_1$$

и точно также изъ равенства коэфиціентовъ m_0', m'_1 и изъ уравненія (6):

$$1 + m'_0 + m'_1 = \frac{p-1}{2}$$

найдемъ слѣдующія уравненія:

$$m'_0 = m'_1 = \frac{p-3}{2}$$

и

$$\eta_0\eta_1 = \frac{p+1}{4}$$

Оба эти случая можно выразить въ одной формулѣ:

$$\eta_0\eta_1 = \frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{4}$$

Откуда искомое уравненіе будетъ:

$$\eta^2+\eta+\frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot p}{4}=0 \tag{12}$$

а его корни т. е. періоды η_0 и η_1 будутъ:

$$\eta_0=\frac{-1+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2}\quad,\quad \eta_1=\frac{-1-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2} \tag{13}$$

Результатъ уже выше извѣстный.

Если положимъ $\eta'=2\eta+1$, то уравненіе (12) приметъ простую форму:

$$\eta'^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p \tag{14}$$

Если число $\frac{p-1}{2}$ есть четное т. е. если p есть простое число формы $4n+1$, то $n^{(1)}=0$, а сравненіе (2), которое въ этомъ случаѣ дѣлается:

$$g^{2t+1}\equiv-1\,(Mp) \tag{15}$$

такъ какъ $e=2$, $k=1$, ни для какого числоваго значенія t не имѣетъ мѣста, слѣдовательно -1 должна быть сравниваема съ четной степенью числа g т. е. -1 должна быть *вычетомъ* числа p. Если же число p имѣетъ форму $4n+3$, слѣдовательно $\frac{p-1}{2}$ число нечетное, то сравненіе (2) для $e=2$, $k=1$, т. е. сравненіе (15) имѣетъ мѣсто, если положимъ $t=\frac{p-3}{4}$; слѣдовательно -1 есть невычетъ числа p. Такимъ образомъ мы приходимъ опять къ формулѣ (§ 116, 28):

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

§ 311. Корни уравненія:

$$\frac{x^p-1}{x-1}=0$$

числомъ $\frac{p-1}{2}$, составляющіе періодъ η_0 суть корни уравненія $\frac{p-1}{2}$-ой степени, коэфиціенты коего суть цѣлыя линейныя функціи обоихъ періодовъ η_0 и η_1, слѣдовательно ихъ форма есть $a_0\eta_0+a_1\eta_1$, или въ силу вы-

раженія (13), эта форма будетъ:

$$\frac{m+n\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2}$$

гдѣ коэфиціенты суть цѣлыя числа. Пусть это уравненіе будетъ:

$$z=x^{\frac{p-1}{2}}+M_1 x^{\frac{p-1}{3}}+\ldots+M_{\frac{p-1}{2}}=0 \tag{16}$$

которое всегда будемъ означать чрезъ z. Это уравненіе, очевидно имѣетъ форму:

$$z=\frac{Y(x)+Z(x)\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2} \tag{17}$$

гдѣ $Y(x)$ и $Z(x)$ суть извѣстныя цѣлыя функціи отъ x съ цѣлыми коэфиціентами. Уравненіе $z_1=0$, корнями котораго суть корни періода η_1, получится изъ уравненія $z=0$ измѣняя въ немъ α на α^g, т. е. замѣщая періодъ η_0 періодомъ η_1, или просто измѣняя знакъ корня, что дастъ:

$$z_1=\frac{Y(x)-Y(x)\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2} \tag{18}$$

Такимъ образомъ уравненіе (15) разлагается на произведеніе двухъ множителей (17) и (18), слѣдовательно имѣемъ замѣчательную формулу:

$$4\frac{x^p-1}{x-1}=Y^2(x)-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p\,.\,Z^2(x) \tag{19}$$

Такъ какъ имѣемъ:

$$M_1=-\eta_0=\frac{1-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2} \tag{20}$$

то очевидно, что высшіе члены въ функціяхъ $Y(x)$ и $Z(x)$ суть:

$$2x^{\frac{p-1}{2}}+x^{\frac{p-3}{2}}\quad,\quad -x^{\frac{p-3}{2}}$$

Означимъ чрезъ $A(x)$ и $B(x)$ выраженія:

$$A(x)=\tfrac{1}{2}\left(Y(x)+\sqrt{\lambda p}\,.\,Z(x)\right)\quad,\quad B(x)=\tfrac{1}{2}\left(Y(x)-\sqrt{\lambda p}\,.\,Z(x)\right)$$

гдѣ для краткости положено $\lambda = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, то:

$$A(x) = \prod^{a} (x - \alpha^{a}) \quad , \quad B(x) = \prod^{b} (x - \alpha^{b})$$

если a, b суть квадратичные вычеты и невычеты меньше числа p. Послѣдніе коэфиціенты обѣихъ этихъ функцій суть:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \alpha^{\Sigma a} \quad \text{и} \quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} \alpha^{\Sigma b}$$

или, проще, они равны $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, такъ какъ Σa и Σb дѣлятся на p, что легко видѣть, если замѣтимъ, что:

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma a \equiv & 1 + g^2 + g^4 + \ldots\ldots + g^{p-3} \\ \Sigma b \equiv & g1 + g^2 + g^4 + \ldots\ldots + g^{p-3} \end{array}\right\} (Mp)$$

а сумма:

$$1 + g^2 + g^4 + \ldots\ldots + g^{p-3} = \frac{g^{p-1} - 1}{g^2 - 1} \equiv 0 (Mp)$$

Если изъ уравненія $A(x) = 0$, коего корни суть α^{a} желаемъ вывесть уравненіе, коего корни суть обратные этимъ корнямъ, т. е. коего корни суть α^{-1}, то надобно измѣнить x на $\frac{1}{x}$. Что дастъ, если умножимъ на $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$:

$$(-x)^{\frac{p-1}{2}} A\left(\frac{1}{x}\right) = \prod^{a} (x - \alpha^{-a})$$

и точно также:

$$(-x)^{\frac{p-1}{2}} B\left(\frac{1}{x}\right) = \prod^{b} (x - \alpha^{-b})$$

Здѣсь слѣдуетъ различить два случая, когда число p имѣетъ форму $4n+1$ и когда оно имѣетъ форму $4n+3$.

Въ первомъ случаѣ вычеты чиселъ $-a(Mp)$ совпадаютъ съ числами a, а вычеты $-b$ съ числами b, такъ какъ -1 есть вычетъ числа p. Слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$x^{\frac{p-1}{2}} A\left(\frac{1}{x}\right) = A(x) \,.\, x^{\frac{p-1}{2}} B\left(\frac{1}{x}\right) = B(x)$$

т. е.:

$$x^{\frac{p-1}{2}}\left[Y\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\lambda p}\,.\,Z\left(\frac{1}{x}\right)\right]=Y(x)+\sqrt{\lambda p}\,.\,Z(x)$$

откуда:

$$x^{\frac{p-1}{2}}Y\left(\frac{1}{x}\right)=Y(x)\quad,\quad x^{\frac{p-1}{2}}Z\left(\frac{1}{x}\right)=Z(x)\qquad(21)$$

Во второмъ случаѣ, такъ какъ —1 есть невычетъ числа p, то вычеты чиселъ $-a(Mp)$ совпадаютъ съ числами b, а вычеты чиселъ $-b(Mp)$ совпадаютъ съ числами a, что даетъ:

$$-x^{\frac{p-1}{2}}A\left(\frac{1}{x}\right)=B(x)\quad,\quad -x^{\frac{p-1}{2}}B\left(\frac{1}{x}\right)=A(x)$$

т. е.:

$$x^{\frac{p-1}{2}}\left\{Y\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\lambda p}Z\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=-Y(x)+\sqrt{\lambda p}\,Z(x)$$

откуда:

$$x^{\frac{p-2}{2}}Y\left(\frac{1}{x}\right)=-Y(x)\quad,\quad x^{\frac{p-1}{2}}Z\left(\frac{1}{x}\right)=Z(x)\qquad(22)$$

Изъ уравненія (21) и (22) можно получить зависимости между коэфиціентами функцій $Y(x)$ и $Z(x)$. Но мы на этомъ не остановимся, а перейдемъ къ другому замѣчательному свойству.

§ 312. Такъ какъ (§ 310, 13):

$$\eta_0=\sum^{a}\alpha^a=\frac{-1+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2}\quad;\quad \eta_1=\sum^{b}\alpha^b=\frac{-1-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}}{2}$$

то:

$$\eta_0-\eta_1=S=\sum\alpha^a-\sum\alpha^b=\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$$

но:

$$\eta_0=\sum^{a}\alpha^a=\tfrac{1}{2}(-1+S)$$

откуда, изъ обоихъ уравненій имѣемъ:

$$\sum^{a}\alpha^{ka}+\sum^{b}\alpha^{kb}=-1\quad,\quad \sum^{a}\alpha^{ka}-\sum^{b}\alpha^{kb}=S_k=\left(\frac{k}{p}\right)S$$

гдѣ k не дѣлится на p. Изъ этихъ уравненій найдемъ сумму k-хъ степеней корней уравненія $z = 0$.

$$\sum^{n} \alpha^{ka} = \frac{1}{2}\left(-1+\left(\frac{k}{p}\right)S\right)$$

Разсмотримъ теперь второй коэфиціентъ въ уравненіи, который по извѣстнымъ формуламъ Ньютона есть:

$$2M_r = \left(\sum^{a} \alpha^{a}\right)^2 - \sum \alpha^{2a}$$

гдѣ:

$$\sum \alpha^{2a} = \frac{1}{2}\left\{-1+\left(\frac{2}{p}\right)S\right\}$$

Слѣдовательно, въ предъидущей разности всѣ коэфиціенты, если они будутъ такъ преобразованы, что не заключаютъ корней α, должны быть четныя числа.

Но мы имѣемъ:

$$\left(\sum \alpha^{a}\right)^2 - \sum \alpha^{2a} = \frac{3+(-1)^{\frac{p-1}{2}}.p}{4} - \frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{2}{p}\right)\right\}S$$

или:

$$\left(\sum \alpha^{a}\right)^2 - \sum \alpha^{2a} = \left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{2}{p}\right)\right] - \frac{3+(-1)^{\frac{p-1}{2}}.p}{4}\right\}\sum^{b} \alpha^{b}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{2}{p}\right)\right] + \frac{3+(-1)^{\frac{p-1}{2}}.p}{4}\right\}\sum^{a} \alpha^{a}$$

Но такъ какъ коэфиціенты суть цѣлыя четныя числа, то:

$$2\left[1+\left(\frac{2}{p}\right)\right] = 3+(-1)^{\frac{p-1}{2}}.p(M8)$$

Изъ этого сравненія видимъ, что для простыхъ чиселъ p формы $8n+1$ и $8n+7$ должно имѣть $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$, а для чиселъ формы $8n+3$ и $8n+5$, $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$. Откуда имѣемъ предложеніе, которое уже было доказано выше.

Предложеніе. Число 2 есть квадратичный вычетъ простыхъ чиселъ формы $8n\pm1$ и невычетъ чиселъ формы $8n\pm3$, что выражается формулой:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \qquad (23)$$

Изъ этихъ двухъ примѣровъ мы видимъ ту тѣсную связь, которая существуетъ между теоріей дѣленія окружности и теоріей чиселъ.

ГЛАВА XX.

Преобразованіе уравненій по способу Чирнгаузена.

§ 313. Въ § 150 видѣли, что всякая раціональная функція какого нибудь изъ корней уравненія:

$$f(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\ldots\ldots+na_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

вида:

$$\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}$$

можетъ быть преобразована въ цѣлую раціональную функцію того же корня не выше n—1 степени, т. е. можно всегда положить:

$$y=\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_1)}=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p_{n-1}x_1^{n-1} \qquad (2)$$

Пусть требуется составить уравненіе, коего-бы корни были значенія:

$$\Phi(x_1)\ ,\ \Phi(x_2)\ ,\ \Phi(x_3)\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \Phi(x_n) \qquad (3)$$

функціи:

$$y=\Phi(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p_{n-1}x^{n-1} \qquad (4)$$

Возвышая эту функцію послѣдовательно въ 2, 3, 4,... n-ю степени и понижая степени x-са выше n—1 степени, какъ показано выше (§ 150),

будемъ имѣть:

$$
\begin{aligned}
y &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots\dots + p_{n-1} x^{n-1} \\
y^2 &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots + b_{n-1} x^{n-1} \\
y^3 &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots\dots + c_{n-1} x^{n-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y^n &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots + b_{n-1} x^{n-1}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Изъ выраженія (4) видно, что каждому значенію x-са $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ соотвѣтствуетъ только одно значеніе для y, а слѣдовательно уравненіе коего корни будутъ $y_1, y_2, y_3 \dots, y_n$ будетъ также n-й степени.

Подставляя въ уравненіе (5) вмѣсто x послѣдовательно корни уравненія (1) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ и складывая найдемъ; означая чрезъ S_1, S_2, $S_3, \dots, S_n$ суммы степеней значеній $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= np_0 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots\dots + p_{n-1} s_{n-1} \\
S_2 &= nb_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + \dots\dots + b_{n-1} s_{n-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
S_n &= nl_0 + n_1 l_1 + n_2 l_2 + \dots\dots + l_{n-1} s_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

$s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ извѣстны (§ 131) въ функціяхъ коэфиціентовъ уравненія (1), слѣдовательно и $S_1, S_2, \dots, S_n$ будутъ выражены въ функціи тѣхъ же коэфиціентовъ и коэфиціентовъ $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$. Такимъ образомъ имѣя $S_1, S_2, \dots, S_n$ можемъ составить (§ 133) коэфиціенты уравненія, коего корни суть:

$$y_1 = \Phi(x_1) \quad , \quad y_2 = \Phi(x_2) \quad , \quad \dots \quad , \quad y_n = \Phi(x_n)$$

и преобразованіе будетъ закончено. Приведенный способъ принадлежитъ германскому математику Чиргаузену (Tschirnhausen, 1631—1708).

§ 314. Есть другой способъ составить тоже уравненіе; онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Если уравненіе (4) напишемъ въ формѣ:

$$p_0 - y + p_1 x + p_2 x^2 + \dots\dots + p_{n-1} x^{n-1} = 0$$

и умножимъ послѣдовательно на $x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$, а затѣмъ исключимъ съ помощью уравненія $f(x) = 0$ степени x-са выше $n-1$ степени, то получимъ n уравненій, изъ которыхъ способомъ Сильвестра (§ 169)

можно исключить x, x^2, $x^3, \ldots, x^{n-1}$. Такимъ образомъ получимъ преобразованное уравненіе въ формѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} p_0-y & p_1 & p_2 & \cdot & p_{n-1} \\ p_{n-1} & p_0-y & p_1 & \cdot & p_{n-2} \\ p_{n-2} & p_{n-1} & p_0-y & \cdot & p_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdot & p_0-y \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Хотя этотъ методъ преобразованія по способу Чирнгаузена кажется очень простъ, но будучи приложенъ къ частнымъ случаямъ принимаетъ очень сложную форму; поэтому мы приложимъ къ кубическому и биквадратному уравненіямъ способъ Чирнгаузена, измѣненный геометромъ Келе, и основанный на замѣчаніи Ермита (Hermite).

§ 315. *Преобразованіе Чирнгаузена приложенное къ кубическому уравненію.* Пусть данное кубическое уравненіе будетъ:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \qquad (8)$$

которому можно дать форму (§ 53):

$$z^2 + 3Hz + G = 0 \qquad (9)$$

требуется преобразовать его подстановленіемъ:

$$y = \lambda + kz + z^2 \qquad (10)$$

Если z_1, z_2, z_3 суть корни уравненія (3), а y_1, y_2, y_3 корни искомаго преобразованнаго, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} y_2 - y_3 &= (z_2-z_3)(k-z_1) \\ y_3 - y_1 &= (z_3-z_1)(k-z_2) \\ y_1 - y_2 &= (z_1-z_2)(k-z_3) \end{aligned} \qquad (11)$$

слѣдовательно:

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 - y_3 &= (2z_1-z_2-z_3)k + (2z_2z_3-z_3z_1-z_1z_2) \\ 2y_2 - y_3 - y_1 &= (2z_2-z_1-z_3)k + (2z_3z_1-z_1z_2-z_2z_3) \\ 2y_3 - y_1 - y_2 &= (2z_3-z_2-z_1)k + (2z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1) \end{aligned} \qquad (12)$$

Слѣдовательно если искомое уравненіе съ выброшеннымъ вторымъ членомъ будетъ:

$$Y^3 + 3H'Y + G' = 0 \qquad (13)$$

то изъ уравненій (11) и (12) будемъ имѣть:

$$H' = H_k \quad , \quad G' = G_k \tag{14}$$

гдѣ H_k и G_k суть гессевская и кубическая соизмѣнныя кубической формы:

$$k^2 + 2Hk + G = 0 \tag{15}$$

такимъ образомъ преобразованіе вполнѣ закончено, такъ какъ $y_1 + y_2 + y_3$ легко опредѣлить.

§ 316. *Преобразованіе Чирнгаузена приложенное къ биквадратному уравненію.* Не будемъ дѣлать преобразованія биквадратнаго уравненія, а докажемъ только предложеніе, которое покажетъ, какъ это преобразованіе разбивается на два другія.

Предложеніе. Преобразованіе Чирнгаузена измѣняетъ биквадратную форму U_4 въ другую, имѣющую тѣ же неизмѣнныя какъ и форма $lU_4 + mH_x$, а слѣдовательно она вообще можетъ быть преобразована въ эту послѣднюю форму линейнымъ преобразованіемъ.

Доказательство. Пусть данная биквадратная форма будетъ:

$$U_4 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \tag{16}$$

и пусть:

$$y = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 \tag{17}$$

Если x_1, x_2, x_3, x_4 суть корни уравненія (16), а y_1, y_2, y_3, y_4 соотвѣтствующія значенія y, то имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} &= p_1 + p_2(x_2 + x_3) + p_2(x^2{}_2 + x_2x_3 + x^2{}_2) \\ \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} &= p_1 + p_2(x_1 + x_4) + p_2(x^2{}_1 + x_1x_4 + x^2{}_4) \end{aligned} \tag{18}$$

Покажемъ теперь что:

$$\frac{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = P_0 + Q_0(x_2x_3 + x_1x_4) \tag{19}$$

перемножая уравненія (18) и замѣчая что:

$$a_0^2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_1^2 + x_1x_4 + x_4^2) = 36a_2^2 - 4a_3a_4 + a_0a_4 - 6a_0a_2\theta_1$$

гдѣ (§ 261, пр. 1):

$$\theta_1 = x_2x_3 + x_1x_4$$

а

$$x_2^2+x_2x_3+x_3^2=(x_2+x_3)^2-x_2x_3\text{, и т. д.}$$

найдемъ:

$$a_0^2(x_2+x_3)(x_1^2+x_1x_4+x_4^2)+(x_1+x_4)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)=4a_0a_3-4a_1a_3+4a_0a_1\theta_1$$

откуда, сообразуясь съ другими членами произведенія, найдемъ выраженіе (19) или:

$$\frac{(y_2-y_3)(y_1-y_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}=P_0+Q_0\theta_1$$

замѣчая что:

$$(x_2-x_3)(x_1-x_4)=\theta_3-\theta_2$$

найдемъ:

$$(y_2-y_3)(y_1-y_4)=(\theta_3-\theta_2)(P_0+Q_0\theta_1) \tag{20}$$

Если на мѣсто θ_1, θ_2, θ_3 подставимъ t_1, t_2, t_3 корни уравненія (§ 262), и замѣстимъ P_0 и Q_0 соотвѣтственными значеніями P и Q, то найдемъ:

$$\begin{aligned}(y_2-y_3)(y_1-y_4)&=4(t_3-t_2)(P-Qt_1)\\(y_3-y_1)(y_2-y_4)&=4(t_1-t_3)(P-Qt_2)\\(y_1-y_2)(y_3-y_4)&=4(t_2-t_1)(P-Qt_3)\end{aligned} \tag{21}$$

изъ этихъ выраженій сейчасъ найдемъ выраженіе неизмѣнныхъ преобразованнаго биквадратнаго уравненія, которыя сравнивъ съ неизмѣнными формы $kU_4-\lambda H_x$ будемъ имѣть предложенную теорему.

§ 317. *Приведеніе кубическаго уравненія съ помощью преобразованія Чирнгаузена къ двучленной формѣ.* Пусть данное кубическое уравненіе:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \tag{22}$$

будетъ приведено подстановленіемъ:

$$y=q+px+x^2 \tag{23}$$

къ формѣ:

$$y^3-R=0 \tag{24}$$

Пусть x_1, x_2, x_3 будутъ корни уравненія (20), а y_1 одинъ изъ корней

уравненія (24), то для опредѣленія q и p будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$x_1^2+px_1+q=y_1$$
$$x_2^2+px_2+q=\alpha y_1$$
$$x_3^2+px_3+q=\alpha^2 y$$

откуда найдемъ:

$$p=-\frac{x_1^2+\alpha x_2^2+\alpha^2 x_3^2}{x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3}\quad,\quad q=-\tfrac{1}{3}(s_2+ps_1)$$

придавая $x_1+x_2+x_3$ къ выраженію p, будемъ имѣть:

$$p+x_1+x_2+x_3=-\frac{x_2x_3+\alpha x_3x_1+\alpha^2 x_1x_2}{x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3}=p-\frac{3a_1}{a_0}=u$$

составляя уравненіе, коего корнями были-бы выраженія:

$$-\frac{x_2x_3+\alpha x_3x_1+\alpha^2 x_1x_2}{x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3}=-\frac{L_1}{L}\quad,\quad -\frac{x_2x_3+\alpha^2 x_3x_1+\alpha x_1x_2}{x_1^2+\alpha^2 x_2+\alpha x_3}=-\frac{M_1}{M}$$

откуда видимъ, что опредѣленіе u зависитъ (§ 241) отъ гесевской $H_x=0$ даннаго кубическаго уравненія (22). Слѣдовательно, u будетъ имѣть два значенія, а потому такое преобразованіе можно сдѣлать двумя способами.

§ 318. *Приведеніе биквадратнаго уравненія къ трехчлену съ помощью преобразованія Чирнгаузена.* Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \tag{26}$$

а его искомая форма:

$$y^4+Py^2+Q=0 \tag{27}$$

полученная подстановленіемъ:

$$y=q+px+x^2 \tag{28}$$

Если x_1, x_2, x_3, x_4 суть корни уравненія (26), а y_1, y_2 два разные корня уравненія (27), то будемъ имѣть для опредѣленія p и q слѣдующія уравненія:

$$x_1^2+px_1+q=y_1\quad,\quad x_3^2+px_3+q=y_2$$
$$x_2^2+px_2+q=-y_1\quad,\quad x_4^2+px_4+q=-y_2$$

изъ которыхъ найдемъ:

$$p=-\frac{x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2}{x_1+x_2-x_3-x_4}\quad,\quad q=-\tfrac{1}{4}(s_2+ps_1)$$

придавая къ p по $x_1+x_2+x_3+x_4$, найдемъ:

$$p-\frac{4a_1}{a_0}=u=\frac{2(x_1x_2-x_3x_4)}{x_1+x_2-x_3-x_4} \tag{29}$$

Откуда видимъ (§ 265), что u будетъ зависѣть отъ *разрѣшающаго кубическаго уравненія*, слѣдовательно, преобразованіе можетъ быть совершено тремя способами.

§ 319. *Удаленіе втораго, третьяго и четвертаго членовъ изъ уравненія n-й степени.* Начнемъ съ слѣдующаго предложенія.

Предложеніе. Однородная функція V второй степени съ n перемѣнными $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ можетъ быть выражена суммою n квадратовъ.

Доказательство. Функція V разложенная по степенямъ x_1 принимаетъ слѣдующую форму:

$$V=P_1x_1^2+2Q_1x_1+R_1 \tag{30}$$

гдѣ P_1 не содержитъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а Q_1 и R_1 суть линейныя и квадратныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_3, \ldots, x_n$. Выраженіе (30) можно написать въ формѣ:

$$V=\left(x_1\sqrt{P_1}+\frac{Q_1}{\sqrt{P_1}}\right)^2+R_1-\frac{Q_1^2}{P_1}$$

Если положимъ:

$$V_1=R_1-\frac{Q_1^2}{P_1}$$

то очевидно:

$$V_1=P_2x_2^2+2Q_2x_2+R_2$$

гдѣ P_2 не зависитъ отъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$, а Q_2 и R_2 не содержатъ ни x_1, ни x_2. Точно также:

$$V_1=\left(x_2\sqrt{P_2}+\frac{Q_2}{\sqrt{P_2}}\right)^2+R_2-\frac{Q_2^2}{P_2}$$

откуда:

$$V=\left(x_1\sqrt{P_1}+\frac{Q_1}{\sqrt{P_1}}\right)^2+\left(x_2\sqrt{P_2}+\frac{Q_2}{\sqrt{P_2}}\right)^2+R_2-\frac{Q_2^2}{P_2}$$

продолжая подобнымъ образомъ, мы прійдемъ, наконецъ, къ выраженію:

$$R_{n-1}-\frac{Q^2_{n-1}}{P_{n-1}}$$

которое будетъ $P_n x_n^2$ и предложеніе доказано. Можетъ случиться, что $P_n = 0$ въ этомъ случаѣ V будетъ выражено суммою $n-1$ квадратовъ. Возвратимся теперь къ нашей задачѣ.

Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \dots\dots + n a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (31)$$

положимъ:

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4$$

пусть преобразованное уравненіе будетъ:

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots\dots + b_{n-1} y + b_n = 0 \qquad (32)$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_n$ суть однородныя функціи 1-й, 2-й,, . . . , r-й степеней относительно p_1, p_2, p_3, p_4 (§ 313). Если эти количества будутъ такъ опредѣлены, что:

$$b_1 = 0 \quad , \quad b_2 = 0 \quad , \quad b_3 = 0$$

то наша задача и будетъ рѣшена.—Для этого исключимъ p_1 изъ уравненій:

$$b_2 = 0 \quad \text{и} \quad b_3 = 0$$

подставляя вмѣсто p_0 въ эти уравненія его величину опредѣленную изъ уравненія $b_1 = 0$, въ результатѣ будемъ имѣть два однородныя уравненія:

$$R_2 = 0 \quad \text{и} \quad R_3 = 0$$

второй и третьей степеней относительно p_1, p_2, p_3, p_4 и въ силу предъидущаго предложенія R_2 можно написать въ формѣ:

$$u^2 - v^2 + w^2 - t^2 = 0$$

этому уравненію можно удовлетворить полагая:

$$u = v \quad \text{и} \quad w = t$$

Изъ этихъ уравненій, какъ легко видѣть, будемъ имѣть:

$$p_2 = l p_4 + m p_3 \quad , \quad p_1 = l_1 p_4 + m_1 p_3$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе $b_3 = 0$, будемъ имѣть кубическое уравненіе для опредѣленія отношенія $p_4 : p_3$. Имѣя это отношеніе легко опредѣляются количества p_3, p_1, p_0, которыя уравненію (32) даютъ форму:

$$y^n + b_4 y^{n-4} + b_5 y^{n-5} + \dots + b_n = 0$$

Подобнымъ образомъ можемъ удалить изъ биквадратнаго уравненія члены a_1x^3, a_2x^2, a_3x и свесть рѣшеніе его на рѣшеніе двучленнаго.

Прилагая этотъ способъ къ уравненію 5-й степени ему можно дать одну изъ слѣдующихъ формъ:

$$x^5 + Px + Q = 0 \quad \text{и} \quad x^5 + Px^2 + Q = 0$$

или, вмѣщая x на $\frac{1}{x}$, одну изъ формъ:

$$x^5 + Px^3 + Q = 0 \quad \text{и} \quad x^5 + Px^4 + Q = 0$$

Такія формы можно дать уравненію 5-й степени съ помощью преобразованія Чирнгаузана, рѣшивъ уравненіе 3-й или 4-й степени. Хотя эти формы въ анализѣ не имѣютъ важнаго значенія, но одна изъ нихъ, именно первая, послужила французскому геометру Ермиту для рѣшенія уравненій 5-й степени съ помощью эллиптическихъ функцій, подобно тому какъ мы выше рѣшили уравненіе 3-й степени съ помощью тригонометрическихъ функцій.

§ 320. *Приведеніе уравненія 5-й степени къ суммѣ трехъ членовъ 5-й степени.* Положимъ:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \between x, y)^5 = b_1(x+\beta_1 y)^5 + b_2(x+\beta_2 y)^5 + b_3(x+\beta_3 y)^5 \quad (33)$$

гдѣ β_1, β_2, β_3 суть корни уравненія:

$$p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = 0$$

сравнивая коэфиціенты въ уравненіи (33), найдемъ:

$$a_0 = b_1 + b_2 + b_3 \quad , \quad a_1 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$$

$$a_2 = b_1\beta_1^2 + b_2\beta_2^2 + b_3\beta_3^2 \quad , \quad a_3 = b_1b_1^3 + b_2\beta_2^3 + b_3\beta_3^3$$

$$a_4 = b_1\beta_1^4 + b_2\beta_2^4 + b_3\beta_3^4 \quad , \quad a_5 = b_1\beta_1^5 + b_2\beta_2^5 + b_3\beta_3^5$$

откуда:

$$p_0a_0 + p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 = 0$$

$$p_0a_1 + p_1a_2 + p_2a_3 + p_3a_4 = 0$$

$$p_0a_2 + p_1a_3 + p_2a_4 + p_3a_5 = 0$$

если къ этимъ уравненіямъ присоединимъ уравненіе:

$$p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = 0$$

то будемъ имѣть слѣдующее уравненіе для опредѣленія β_1, β_2, β_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = 0$$

Опредѣливъ β_1, β_2, β_0 изъ этого уравненія, опредѣлимъ b_1, b_2, b_3 изъ уравненій:

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_0$$
$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 = a_1$$
$$b_1\beta_1^2 + b_2\beta_2^2 + b_3\beta_3^2 = a_2$$

Такимъ образомъ задача будетъ вполнѣ рѣшена.

Это предложеніе есть частный случай общаго предложенія, принадлежащаго Сильвестру, именно:

Предложеніе. Однородная форма перемѣнныхъ x, y, $2n-1$ степени можетъ быть представлена въ формѣ:

$$b_1(x+\beta_1 y)^{2n-1} + b_2(x+\beta_2 y)^{2n-1} + \ldots + b_n(x+\beta_n y)^{2n-1}$$

рѣшая уравненіе n-й степени. Доказательство подобное выше изложенному для формы 5-й степени.

321. *Биквадратныя формы преобразовывающіяся одна въ другую линейными преобразованіями.* Опредѣлимъ при какихъ условіяхъ двѣ биквадратныя формы могутъ быть преобразованы одна въ другую линейнымъ преобразованіемъ.

Пусть данныя формы будутъ:

$$\begin{aligned} U &= (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between x, y)^4 = a_0(x-x_1 y)(x-x_2 y)(x-x_3 y)(x-x_4 y) \\ V &= (b_0, b_1, b_2, a_3, b_4 \between x, y)^4 = b_0(x'-x'_1 y')(x'-x_2' y')(x'-x_4' y')(x'-x_4' y') \end{aligned} \qquad (34)$$

Легко видѣть, что если эти двѣ формы дѣлаются тождественными послѣ подстановленія:

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y \quad , \quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y$$

то должны имѣть:

$$\frac{(x'_2-x'_3)(x'_1-x'_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x'_3-x'_1)(x'_2-x'_4)}{(x_3-x_1)(x_2-x_4)} = \frac{(x'_1-x'_2)(x'_3-x'_4)}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}$$

Эти уравненія показываютъ, что шесть ангармоническихъ отношеній точекъ опредѣляемыхъ уравненіями (34) равны.

Изъ этихъ уравненій имѣемъ слѣдующія зависимости между неизмѣнными обѣихъ формъ:

$$J_1' = \rho^4 J_1 \quad , \quad J_2' = \rho^6 J_2 \tag{35}$$

откуда:

$$\frac{J_1'^3}{J_2'^2} = \frac{J_1^3}{J_2^2} \tag{36}$$

или какъ говорятъ *абсолютныя неизмѣнныя* обѣихъ формъ равны.

Условія выраженныя уравненіями (35) и (36) *необходимы*, но *недостаточны*. Это можно видѣть на частныхъ примѣрахъ. Положимъ во первыхъ, что:

$$U = u^2vw \quad , \quad V = u'^2v'^2$$

гдѣ u, v, w, u', v' суть линейныя формы $lx + my$.

Хотя въ этомъ случаѣ условіе (36) удовлетворяется, общая величина этихъ дробей есть 27, но преобразовать U въ V невозможно, потому что невозможно линейнымъ преобразованіемъ произведеніе vw сдѣлать полнымъ квадратомъ.— Во вторыхъ если:

$$U = u^2v \quad , \quad V = u'^4$$

то опять условіе (35) удовлетворено, такъ какъ $J_1' = 0$, $J_1 = 0$, $J_2' = 0$, $J_2 = 0$, но преобразовать U и V невозможно.

Въ обоихъ случаяхъ невозможно отождествить шесть ангармоническихъ отношеній, зависящихъ отъ корней биквадратныхъ уравненій. И вообще невозможно преобразовать одну форму линейнымъ преобразованіемъ въ другую, если существуетъ такая зависимость между неизмѣнными одной формы, какая не существуетъ между неизмѣнными другой.

§ 322. *Примѣры. Примѣръ 1.* Показать что если между коэфиціентами трехъ квадратныхъ формъ:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2 = 0 \quad , \quad c_0x^2 + 2c_1xy + c_2y^2 = 0$$

существуетъ зависимость:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

то онѣ могутъ быть преобразованы линейнымъ преобразованіемъ въ формы:

$$A_1 X^2 + B_1 Y^2 \quad , \quad A_2 X^2 + B_2 Y^2 \quad , \quad A_3 X^2 + B_2 Y^2$$

Примѣръ 2. Показать что самое общее раціональное преобразованіе, биквадратной формы $f(x)$ можетъ быть приведено къ преобразованію:

$$y = \frac{P}{p - x} + \frac{Q}{q - x}$$

Показать, что если $P = Rf(p) f'(q)$, $Q = - Rf(q) f'(p)$, то въ преобразованномъ биквадратномъ уравненіи нѣтъ втораго члена.

Примѣръ 3. Показать что преобразованіе:

$$y = \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x + \gamma_1}$$

можетъ быть совершено тремя послѣдовательными преобразованіями: 1) преобразованіемъ проэктивнымъ, 2) преобразованіемъ корней въ ихъ квадраты и 3) еще проэктивнымъ преобразованіемъ.

Примѣръ 4. Если p будетъ цѣлое число, показать что:

$$\frac{(x_1^p - x_2^p)(x_3^p - x_4^p)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)} = \Sigma_0 + (x_1 x_2 + x_3 x_4) \Sigma_1$$

гдѣ Σ_0 и Σ_1 суть симметрическія функціи корней x_1, x_2, x_3, x_4.

Примѣръ 5. Преобразовать методомъ Сильвестра (§ 320) кубическую форму:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between x, y)^3$$

въ сумму двухъ кубовъ.

Примѣръ 6. Показать, какъ преобразовать двѣ квадратичныя формы въ формы:

$$au^2 + bv^2 \quad , \quad a_2 u^2 + b_1 v^2$$

гдѣ u и v суть линейныя функціи перемѣнныхъ x, y.

Примѣръ 7. Показать, что вообще двѣ кубическія формы могутъ быть преобразованы линейно одна въ другую, если ихъ призначныя не равны нулю. Опредѣлить такое преобразованіе.

Примѣръ 8. Показать что три корня кубическаго уравненія могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ (§ 249):

$$x \quad , \quad \varphi(x) \quad , \quad \varphi^2(x)$$

гдѣ:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\alpha_2 x + \beta_2} \quad , \quad (\alpha_1 \beta_2) = 1 \quad , \quad \alpha_1 + \beta_2 = 1 \quad , \quad \varphi^3(x) = x$$

Примѣръ 9. Форма:

$$(a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \between x, 1)^4$$

преобразована подстановленіемъ:

$$y = \frac{a_0 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2}{b_0 x + 2\alpha_1 x + b_2}$$

въ форму:

$$(A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 \between y, 1)^4$$

найти выраженія неизмѣнной этой послѣдней формы.

Примѣръ 10. Показать, что форма:

$$U_4 = (a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \between x, y)^4$$

можетъ быть преобразована въ

$$U_4 = (s_2 - s_3)(\xi^4 + \eta^4) + 6 s_1 \xi^2 \eta^2$$

гдѣ модуль преобразованія равенъ единицѣ. Мы видѣли выше (§ 272), что:

$$-U_4 = s_1 X^2 + s_2 Y^2 + s_3 Z^2$$

дѣлая подстановленія:

$$X = 2i\xi\eta \quad , \quad Y = i(\xi^2 - \eta^2) \quad , \quad Z = \xi^2 + \eta^2 \qquad (m)$$

эти подстановленія допускаются, такъ какъ ξ и η пропорціональны U_1 и U_2, подставляя вмѣсто ξ и η величины:

$$\xi = m_2 x - m_1 y \quad , \quad \eta = - l_2 x + l_1 y$$

найдемъ, что X, Y, Z имѣютъ одну и ту же призначную $(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2$, а такъ какъ эта призначная равна единицѣ, что видно изъ выраженій (m), то изъ этого слѣдуетъ, что модуль преобразованія:

$$x = l_1 \xi + m_1 y \quad , \quad y = - l_2 \xi + m_2 \eta$$

именно: $l_1 m_2 - l_2 m_1 = 1$.

§ 323. *Примѣры относящіеся къ главамъ XVI и XVII.*

Примѣръ 1. Показать, что если H есть величина положительная, или если $H=0$, а G не равно нулю, то кубическое уравненіе будетъ имѣть пару мнимыхъ корней.

Примѣръ 2. Показать, что если H будетъ величина отрицательная, то кубическое уравненіе будетъ имѣть: 1) всѣ корни дѣйствительные и неравные, 2) два равные или 3) два мнимые, смотря по тому, будетъ-ли G^2 меньше, равно или больше отъ $-4H^3$.

Примѣръ 3. Если кубическое уравненіе:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$$

имѣетъ два равные корня x_1, то:

$$-x_1=\frac{H_2}{H_1}=\frac{H_1}{H}$$

гдѣ:

$$a_0a_2-a_1^2=H \quad , \quad a_0a_3-a_1a_2=H_1 \quad , \quad a_1a_3-a_2^2=H_2$$

Примѣръ 4. Если форма:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3+\lambda(x-r)^3$$

есть полный кубъ, показать что:

$$(a_0a_2-a_1^2)r^2+(a_0a_3-a_1a_2)r+(a_1a_3-a_2^2)=0$$

Примѣръ 5. Найти условіе, при которомъ кубическая форма:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3 \qquad (a)$$

можетъ быть написана въ формѣ:

$$l(x-x'_1)^3+m(x-x'_2)^3+n(x-x'_3)^3 \qquad (b)$$

гдѣ x_1', x_2', x_3' суть корни уравненія:

$$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$$

Сравнивая формы (a) и (b), имѣемъ:

$$a_0=l+m+n \quad , \quad a_2=lx'^2_1+mx'^2_2+nx'^2_3$$

$$-a_1=lx'_1+mx'_2+nx'_3 \quad , \quad -a_3=lx'^3_1+mx'^3_2+nx'^3_3$$

а также:

$$b_0x'^3_1+3b_1x'^2_1+3b_2x'_1+b_3\text{, и т. д.}$$

умножая эти уравненія на b_3, $3b_2$, $3b_1$, b_0 и складывая, найдемъ:

$$(a_0b_3-a_3b_0)-3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

Примѣръ 6. Пусть x_1, x_2, x_3 будутъ корни кубическаго уравненія:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$$

выразить уравненіе:

$$\sqrt[4]{x-x_1}+\sqrt[4]{x-x_2}+\sqrt[4]{x-x_3}=0$$

въ коэфиціентахъ кубическаго уравненія.

Отвѣтъ:

$$125U_1^4+360HU_1^2+128GU_1-48H^2=0$$

Примѣръ 7. Показать, что если H будетъ величина положительная, то биквадратное уравненіе имѣетъ мнимые корни.

Примѣръ 8. Показать, что если J_1 будетъ величина отрицательная, то биквадратное уравненіе имѣетъ два дѣйствительные и два мнимые корня.

Примѣръ 9. Показать, что если биквадратное уравненіе имѣетъ пару равныхъ корней, то разрѣшающее кубическое уравненіе будетъ имѣть пару равныхъ корней и обратно.

Примѣръ 10. Показать, что если биквадратное уравненіе имѣетъ двойной корень, то и кубическое уравненіе, опредѣляющее s, имѣетъ тотъ же корень двойнымъ.

Примѣръ 11. Если H и J_1 суть количества положительныя, то всѣ корни биквадратнаго уравненія мнимые.

Такъ какъ H есть величина положительная, то биквадратное уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ пару мнимыхъ корней $x_1\pm y_1 i$. Уменьшимъ всѣ корни уравненія количествомъ x_1 и раздѣлимъ на y_1, это преобразованіе не измѣнитъ ни характера другихъ корней x_3 и x_4, ни знаковъ у H и J_1, уравненіе можетъ быть написано въ формѣ:

$$(x^2+4px+q)(x^2+1)=0$$

или перемножая:

$$x^4+4px^3+6cx^2+4px+q=0$$

гдѣ $6c=1+q$, слѣдовательно:

$$H=c-p^2 \quad , \quad J_1=q-4p^2+3c^2$$

$$J_2=qc+2p^2c-p^2(q+1)-c^3=c(q-4p^2-c^2)$$

откуда:

$$q - 4p^2 = c^2 + \frac{J_2}{c} = (H+p^2)^2 + \frac{J_2}{H+p^2}$$

или:

$$-\left(\frac{x_3 - x_4}{2y_2}\right) = (H+p^2)^2 + \frac{J_2}{H+p_2}$$

что показываетъ, что x_3 и x_4 суть мнимые, если H и J_2 суть количества положительныя.

Примѣръ 12. Если биквадратное уравненіе имѣетъ двѣ пары равныхъ корней, то:

$$a_0^2 J_1 = 12H^2 \quad , \quad a_0^3 J_2 = 8H^3 \qquad (a)$$

Въ этомъ случаѣ биквадратное уравненіе раздѣленное на a_0 принимаетъ форму:

$$(x-x_1)^2(x-x_2)^2 = \left\{\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{z^2-k^2}{a_0^2}\right)^2$$

гдѣ:

$$z = a_0 x + a_1 \quad , \quad \text{а} \quad \frac{k}{a_0} = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

сравнивая формы:

$$z^4 - 2k^2z^2 + k^2$$

и

$$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2 J_1 - 3H^2$$

найдемъ:

$$2H = -k^2 \quad , \quad G = 0 \quad , \quad a_0^2 J_1 - 3H^2 = k^4$$

изъ этихъ уравненій непосредственно слѣдуютъ зависимости (a).

Примѣръ 13. Найти условіе, при которомъ биквадратное уравненіе можетъ быть написано въ формѣ:

$$l(x^2+2px+q)^2 + m(x^2+2px+q) + n$$

Въ этомъ случаѣ второй и четвертый члены уничтожаются однимъ преобразованіемъ и общее рѣшеніе содержитъ только радикалы 2-й степени.

Отвѣтъ. Условіе есть $G = 0$.

Примѣръ 14. Составить уравненіе коего корнями были-бы шесть ангармоническихъ функцій четырехъ точекъ на прямой, опредѣляемыхъ

биквадратнымъ уравненіемъ:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$

шесть ангармоническихъ отношеній:

$$\lambda_1 \ , \ \frac{1}{\lambda_1} \ , \ \lambda_2 \ , \ \frac{1}{\lambda_2} \ , \ \lambda_3 \ , \ \frac{1}{\lambda_3}$$

гдѣ:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_1)(x_2-x_4)}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3}=\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}\\
\lambda_2 &= -\frac{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}=\frac{\theta_2-\theta_3}{\theta_2-\theta_1}=\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1} \qquad (m)\\
\lambda_3 &= -\frac{(x_3-x_1)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}=\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_3-\theta_2}=\frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}
\end{aligned}$$

слѣдовательно уравненіе, коего корни суть:

$$(x_2-x_3)(x_1-x_4) \ , \ (x_3-x_1)(x_2-x_4) \ , \ (x_1-x_2)(x_3-x_4)$$

есть одно изъ кубическихъ уравненій:

$$a_0^3u^3-12a_0J_1u^2\pm16\sqrt{J_1^3-27J_2^3}=0$$

Уравненіе, коего корни суть отношенія корней одного изъ этихъ уравненій есть (§ 250, пр. 10):

$$4\Delta_4(\lambda^2-\lambda+1)^3-27J_1^3\lambda^2(\lambda-1)^2=0 \qquad (m')$$

гдѣ:

$$\Delta_4=J_1^3-27J_2^2$$

корни этого уравненія суть шесть ангармоническихъ отношеній (m).

Уравненіе (m') можетъ быть написано въ болѣе явной формѣ, какъ ясно будетъ изъ слѣдующаго.

1. Шесть ангармоническихъ отношеній, какъ извѣстно, могутъ быть выражены однимъ изъ нихъ:

$$\lambda \ , \ \frac{1}{\lambda} \ , \ 1-\lambda \ , \ \frac{1}{1-\lambda} \ , \ \frac{\lambda-1}{\lambda} \ , \ \frac{\lambda}{\lambda-1} \qquad (k)$$

что вытекаетъ изъ тождества:

$$(x_2-x_3)(x_1-x_4)+(x_3-x_1)(x_2-x_4)+(x_1-x_2)(x_3-x_4)\equiv0$$

изъ котораго имѣемъ:

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_3} = 1 \quad , \quad \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1} = 1 \quad , \quad \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_2} = 1 \qquad (k')$$

эти уравненія и опредѣляютъ всѣ ангармоническія отношенія въ функціи одного изъ нихъ.

2. Если два изъ ангармоническихъ отношеній равны, то шесть значеній λ будутъ $-\alpha$, $-\alpha^2$ трижды повторенныя и въ этомъ случаѣ $J_1=0$.

Если положимъ, напримѣръ, $\lambda_1=\lambda_2$, то изъ втораго изъ уравненій (k') имѣемъ:

$$\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1 = 0$$

слѣдовательно:

$$\lambda_1 = -\alpha \quad \text{или} \quad -\alpha^2$$

подставляя какое-нибудь изъ этихъ значеній λ въ (k), найдемъ всѣ ангармоническія отношенія.

Такъ какъ:

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3} + \frac{\theta_2-\theta_3}{\theta_1-\theta_2} = 0 \quad \text{или} \quad \sum(\theta_2-\theta_3)^2 = 0$$

то имѣемъ:

$$J_1 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = 0$$

3. Если четыре точки будутъ гармоническія, то шесть значеній λ будутъ -1, 2, $\frac{1}{2}$ дважды повторяется и въ этомъ случаѣ $J_2=0$. Въ самомъ дѣлѣ, если $\lambda_1=1$, то $\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3}=-1$ или $2\theta_1-\theta_2-\theta_3=0$, а это одинъ изъ множителей J_2 (§ 152 и § 145, пр. 6).

4. Этотъ результатъ, а также и обратное предложеніе, можетъ быть показано, написавъ уравненія (m') въ формѣ:

$$J_1^3\{(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-\tfrac{1}{2})^2\}^2 = 27J_2^2\{(\lambda+\alpha)(\lambda+\alpha^2)\}^3$$

Примѣръ 15. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{x^4+14x^2+1}{s^4+14s^2+3} = \frac{x(x-1)^4}{s^2(s^2-1)^4}$$

Отвѣтъ:

$$s^2 \quad , \quad \frac{1}{s^2} \quad , \quad \left(\frac{1+\alpha\sqrt{s}}{1-\alpha\sqrt{s}}\right)^4 \quad , \quad \text{гдѣ} \quad \alpha^4 = 1$$

Примѣръ 16. Выразить:

$$(x_2^2-x_3^2)^2(x_1^2-x_4^2)^2+(x_3^2-x_1^2)^2(x_2^2-x_4^2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2(x_3^2-x_4^2)^2$$

раціонально въ функціи количествъ t_1, t_2, t_3.

Эта симметрическая функція тождественна съ функціей:

$$(\theta_2^2-\theta_3^2)^2+(\theta_3^2-\theta_1^2)^2+(\theta_1^2-\theta_2^2)^2=256\,\Sigma\,(t_2-t_3)^2\left(t_1-\frac{a_2}{a_0}\right)^2$$

Примѣръ 17. Выразить:

$$\Sigma\,(x_1-x_2)^4(x_3-x_4)^2$$

раціонально въ функціи количествъ t_1, t_2, t_3 и, наконецъ, въ коэфиціентахъ биквадратнаго уравненія.

Отвѣтъ:

$$-178\,\Sigma\,(t_2-t_3)^2\left(t_1+\frac{2H}{a_0^2}\right)=-\frac{96}{a_0^4}(4HJ_1+3a_0J_2)$$

Примѣръ 18. Составить уравненіе, коего корнями были-бы произведенія по-парно корней биквадратнаго уравненія.

Искомое уравненіе есть произведеніе трехъ множителей типа:

$$(u-x_2x_3)(u-x_1x_4)=u^2-\theta_1 u+\frac{a_3}{a_0}=u^2-2\frac{a_2}{a_0}u+\frac{a_3}{a_0}-4t_1u$$

откуда будемъ имѣть:

$$(a_0u^2-2a_2u+a_3)^3-4J_1u^2(a_0u^2-2a_2u+a_3)+16J_2u^3=0$$

Примѣръ 19. Составить уравненіе, коего корни были-бы выраженія формы $\frac{x_1+x_2}{2}$ корней биквадратнаго уравненія.

Искомое уравненіе есть произведеніе трехъ множителей типа:

$$\left(u-\frac{x_2+x_3}{2}\right)\left(u-\frac{x_1+x_4}{2}\right)=u^2-\frac{2a_1}{a_0}u+\frac{\theta_2+\theta_3}{4}=u^2+\frac{2a_1}{a_0}u+\frac{a_3}{a_0}-t_1$$

откуда искомое уравненіе будетъ:

$$4(a_0u^2-2a_1u+a_2)^3-J_1(a_0u^2+2a_1u+a_2)+J_2=0$$

Примѣръ 20. Пусть x_1, x_2 и x'_1, x'_2 суть корни квадратныхъ уравненій:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1x + b_2 = 0 \qquad (n)$$

найти уравненіе, коего корнями были-бы четыре значенія $x_1x'_1$. Если положимъ:

$$H_1 = a_0a_2 - a_1^2 \quad , \quad H_2 = b_0b_2 - b_1^2$$

то искомое уравненіе будетъ:

$$(a_0b_0u^2 - 2a_1b_1u + a_2b_2)^2 - 4H_1H_2u^2 = 0$$

Примѣръ 21. Составить уравненіе, коего корни были-бы выраженія $\frac{x_1 + x'_1}{2}$ корней уравненій (n).

Если положимъ $2K_{12} = a_0a_2 - b_0b_2 + 2a_1b_1$, то искомое уравненіе будетъ:

$$\{ 2a_0b_0u^2 + 2(a_0b_1 + a_1b_0)u + k_{12} \}^2 - H_1H_2 = 0$$

въ этомъ биквадратномъ уравненіи $G = 0$.

Примѣръ 22. Въ томъ-же случаѣ, если $u = \frac{1}{2}(x_1 - x'_1)$ искомое уравненіе, положивъ:

$$M = a_0b_1 - a_1b_0 \quad , \quad 2H_{12} = a_0b_2 + b_0a_2 - 2a_1b_1$$

будетъ:

$$\{ (a_0b_2u + H_{12})^2 - 2M^2u + H_1H_2 \}^2 = 4H_1H_2(a_0b_0u + H_{12})^2$$

Примѣръ 23. Показать что:

$$\sum \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{9J_1}{2} \left(\frac{3a_0J_2 - 2HJ_1}{J_1^3 - 27J_2^2} \right)$$

изъ выраженій корней x_1, x_2, x_3, x_4 въ функціи t_1, t_2, t_3 имѣемъ:

$$\sum \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} = -\frac{1}{2a_0^2} \left\{ \frac{a_0^2t + 2H}{(t_2 - t_3)^2} + \frac{a_0^2t_2 + 2H}{(t_3 - t_1)^2} + \frac{a_0^2t_3 + 2H}{(t_1 - t_2)^2} \right\}$$

выраженіе, которое можно выразить въ функціи a_0, H, J_1, J_2.

Примѣръ 24. Показать что:

$$\sum \frac{t_1^m}{(t_2 - t_3)^2} = 0$$

если $J_1 = 0$, и m имѣетъ форму $3p$ или $3p + 1$.

Примѣръ 25. Показать что:

$$U = ax^2 + cy^2 + ez^2 + 2dyz + 2cxz + 2bxy$$

можно разложить на сумму или разность двухъ квадратовъ, если:

$$J_2 = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0$$

Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$aU = (ax+by+cz)^2 - (ac-b^2)y^2 + 2(ad-bc)yz + (ae-c^2)z^2$$

но:

$$(ac-b^2)\,y^2 + 2\,(ad-bc)\,xy + (ac-c^2)\,z^2$$

будетъ полный квадратъ, если:

$$(ac-b^2)(ae-c^2) = (ad-bc)^2$$

т. е. если $J_2 = 0$.

Примѣръ 26. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 будутъ корни уравненія:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

требуется рѣшить уравненіе:

$$\sqrt{x-x_1} + \sqrt{x-x_2} + \sqrt{x-x_3} + \sqrt{x-x_4} = 0$$

Если уравненіе:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0$$

освободимъ отъ радикаловъ и подставимъ вмѣсто симметрическихъ функцій x_1, x_2, x_3, x_4 коэфиціенты, то найдемъ:

$$(3a_0a_2 - 2a_1^2)^2 = 4a_0^3a_4$$

Подставивъ U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 вмѣсто a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 и дѣлая приведеніе, найдемъ:

$$a_0x + a_1 = \frac{1}{G}\left(3H^2 - \frac{a_0^2J_1}{4}\right)$$

Примѣръ 27. Выразить корни биквадратнаго уравненія въ функціи одного изъ корней разрѣшающаго кубическаго уравненія? Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \qquad (\alpha)$$

положимъ $x = x' + s$, то будемъ имѣть:

$$a_0 x'^4 + 4U_1 x'^3 + 6U_2 x'^2 + 4U_3 x' + U_4 = 0 \qquad (\beta)$$

Если это уравненіе разобьемъ на два слѣдующія:

$$a_0 x'^4 + 6U_2 x'^2 + U_4 = 0 \quad , \quad U_1 x'^2 + U_3 = 0 \qquad (\gamma)$$

и исключимъ изъ нихъ x', то найдемъ:

$$4U_2^3 - J_1 U_2 + J_2 = 0$$

слѣдовательно $U_2 = a_0 t$, гдѣ t есть корень разрѣшающаго кубическаго уравненія, а слѣдовательно:

$$U_1 = a_0 s + a_1 = \sqrt{a_0^2 t - H}$$

но изъ (γ) имѣемъ:

$$x'^2 = -\frac{U_3}{U_1} = -\frac{1}{a_0^2}\left(U_1^2 + 4H + \frac{G}{U_1}\right)$$

откуда замѣчая что $x = x' + s$ или $a_0 x + a_1 = U_1 + a_0 x'$, имѣемъ:

$$a_0 x + a_1 = \sqrt{a_0^2 t - H} + \sqrt{-a_0^2 t - 2H - \frac{G}{\sqrt{a_0^2 t - 2H}}}$$

выраженіе имѣющее только четыре значенія. Это выраженіе можетъ быть получено изъ формулъ § 258, а настоящій пріемъ есть отдѣльный способъ рѣшенія биквадратнаго уравненія.

Примѣръ 28. Показать, что рѣшеніе биквадратнаго уравненія не заключаетъ кубическихъ корней если между его корнями существуетъ какая нибудь зависимость, которая выражается раціонально въ функціи корней разрѣшающаго кубическаго уравненія.

Всякая раціональная функція отъ корня t разрѣшающаго кубическаго уравненія можетъ быть понижена до 2-й степени относительно t, такъ какъ t^3 опредѣляется чрезъ t съ помощью этого уравненія. Слѣдовательно. опредѣленіе t не будетъ зависѣть отъ кубическаго корня, и изъ формулы предъидущаго примѣра видно, что выраженіе корня биквадратнаго уравненія не заключаетъ кубическаго корня.

Примѣръ 29. Найти зависимость, связывающую корни биквадратнаго уравненія, когда уравненіе:

$$4s^3 - J_1 s + J_2 = 0$$

удовлетворяется каждымъ изъ выраженій для s:

$$1)\ \frac{H}{a_0}\ ;\quad 2)\ a_2\ ;\quad 3)\ 0\ ;\quad 4)\ \sqrt{a_0a_4}-a_2$$

$$5)\ \sqrt[3]{\frac{-J_2}{4}}\ ;\quad 6)\ \sqrt{\frac{J_1}{12}}\ ;\quad 7)\ \sqrt{\frac{3J_2}{2J_1}}\ ;\quad 8)\ \frac{a_0a_3-a_1a_2}{2a_1}$$

Отвѣтъ.

$$1)\ x_2+x_3-x_1-x_4=0\ ;\quad 2),\ 4),\ 8)\ x_2x_3-x_1x_4=0$$

$$3)\ (x_3-x_1)(x_2-x_4)-(x_1-x_2)(x_3-x_4)=0$$

$$5)\ (x_3-x_1)(x_2-x_4)-\alpha(x_1-x_2)(x_3-x_4)=0\ ;\quad 6),\ 7)\ x_2-x_3=0$$

Примѣръ 30. Доказать слѣдующее тождество и провѣрить съ его помощью результатъ примѣра 11:

$$a_0^6\Delta_4=a_0^6(J_1^3-27J_2^2)\equiv(a_0^2J_1-3H^2)(a_0^2J_1-12H^2)^2+27G^2(G^2+2a_0^2J_2)\quad (2)$$

Уравненіе:

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$

подстановленіемъ $z=a_0x+a_1$ преобразуется въ:

$$a_0y^4+6A_2y^2+4A_3y+A_4=0$$

гдѣ (§ 54, 29):

$$a_0A_2=H\quad ,\quad a_0^2A_3=G\quad ,\quad a_0^3A_4=a_0^2J_1-3H^2$$

Чтобы получить тождество (2), надобно въ развернутомъ выраженіи Δ_4 сдѣлать:

$$a_1=0\quad ,\quad a_2=A_2\quad ,\quad a_3=A_3\quad ,\quad a_4=A_4$$

ГЛАВА XXI.

Рѣшеніе численныхъ уравненій.

§ 324. Если корни буквенныхъ уравненій не могутъ быть выражены конечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій, то въ замѣнъ этого корни численныхъ уравненій, т. е. такихъ, въ которыхъ коэфиціенты суть данныя числа, всегда могутъ быть найдены точно или вычислены съ какимъ угодно приближеніемъ. Мы теперь и займемся этой задачей.

Пусть данное уравненіе, освобожденное отъ равныхъ корней (§ 46), будетъ:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n = 0 \qquad (1)$$

гдѣ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть числа дѣйствительныя, цѣлыя или дробныя, положительныя или отрицательныя.

Если въ уравненіи (1), коэфиціенты суть дробныя числа, то по приведеніи всѣхъ членовъ уравненія къ одному знаменателю, этого общаго знаменателя можно опустить, а коэфиціенты въ уравненіи сдѣлаются цѣлыми числами положительными и отрицательными. Послѣ такого преобразованія, съ помощью преобразованія § 49, зад. 2, можно коэфиціентъ у x^n сдѣлать равнымъ единицѣ и наше уравненіе (1) получитъ окончательную форму:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2)$$

гдѣ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ суть уже цѣлыя числа.

§ 325. *Предложеніе.* Если въ уравненіи n-й степени коэфиціентъ у x^n есть единица, а всѣ остальные коэфиціенты суть цѣлыя числа, то такое уравненіе дробныхъ корней имѣть не можетъ.

Доказательство. Пусть такое уравненіе будетъ (2) и положимъ, что ему удовлетворяетъ дробный корень $\frac{\beta}{\alpha}$, гдѣ β и α суть цѣлыя несократимыя числа. Подставивъ этотъ корень въ уравненіе (2), будемъ имѣть:

$$\frac{\beta^n}{\alpha^n} + a_1\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}} + a_2\frac{\beta^{n-2}}{\alpha^{n-2}} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{\beta}{\alpha} + a_n = 0$$

помноживъ всѣ члены уравненія на α^{n-1}, найдемъ:

$$\frac{\beta^n}{\alpha}+a_1\beta^{n-1}+a_2\beta^{n-2}\alpha+a_3\beta^{n-3}\alpha^2+\ .\ .\ .\ .\ +a_{n-1}\beta\alpha^{n-2}+a_n\alpha^{n-1}=0$$

откуда:

$$-\frac{\beta^n}{\alpha}=a_1\beta^{n-1}+a_2\beta^{n-2}\alpha+a_3\beta^{n-3}\alpha^2+\ .\ .\ .\ .\ +a_{n-1}\beta\alpha^{n-2}+a_n\alpha^{n-1}$$

Замѣчая, что $\frac{\beta_n}{\alpha}$ есть также несократимая дробь, а всѣ члены второй части суть цѣлыя числа, видимъ, что такое равенство невозможно, слѣдовательно, дробь $\frac{\beta}{\alpha}$ корнемъ уравненія (2) быть не можетъ.

Слѣдствіе. Если уравненіе, въ которомъ коэфиціентъ перваго члена есть единица, а всѣ остальные коэфиціенты цѣлыя числа, дробныхъ корней имѣть не можетъ, то оно имѣетъ корнями или числа *цѣлыя*, или *несоизмѣримыя* или *составныя* формы $\alpha+\beta i$ (§ 36).

§ 326. Когда имѣемъ дѣло съ числовыми уравненіями, то часто приходится подставлять цѣлыя числа вмѣсто x въ полиномъ.

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ +a_{n-1}x+a_n \tag{3}$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, . . . , a_n суть цѣлыя числа.

Для этого раздѣлимъ $f(x)$ на $x—x_1$, гдѣ x_1 есть то цѣлое число, которое надобно подставить въ $f(x)$ и получить число $f(x_1)$. Дѣленіе даетъ слѣдующее тождество:

$$f(x)=(x-x_1)\,\Phi(x)+R \tag{4}$$

такъ какъ x есть произвольное количество, то можно положить $x=x_1$, что даетъ:

$$f(x_1)=R \tag{5}$$

откуда видимъ, что искомый результатъ подстановленія числа x_1 въ $f(x)$ есть остатокъ R. Вотъ какимъ способомъ отыскивается числовое значеніе остатка R.

Очевидно, частное $\Phi(x)$ есть полиномъ $n—1$ степени:

$$\Phi(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ .\ .\ .\ .\ .\ +b_{n-2}x+b_{n-1} \tag{6}$$

гдѣ $b_0=a_0$. Подставляя этотъ полиномъ въ тождество (4), а вмѣсто R подставляя полиномъ $f(x_1)$ и сравнивая коэфиціенты у равныхъ степеней x,

найдемъ слѣдующія уравненія между a и b:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= b_0 x_1 + a_1 \\ b_2 &= b_1 x_1 + a_2 \\ b_3 &= b_2 x_1 + a_3 \\ &\ldots\ldots \\ b_{n-1} &= b_{n-2} x_1 + a_{n-1} \\ R &= b_{n-1} x_1 + a_n \end{aligned} \qquad (7)$$

Этотъ рядъ можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_0 & , & a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & \ldots & , & a_{n-1} & , & a_n \\ & & b_0x_1 & , & b_1x_1 & , & b_2x_1 & , & \ldots & , & b_{n-2}x_1 & , & b_{n-1}x_1 \\ \hline & & b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & \ldots & , & b_{n-1} & , & R \end{array} \qquad (8)$$

Въ первой горизонтали написаны коэфиціенты даннаго полинома $f(x)$. Первый членъ 2-й горизонтали есть произведеніе a_0x_1, подъ нимъ въ 3-й горизонтали сумма $b_0x_1 + a_1 = b_1$. Второй членъ 2-й горизонтали есть произведеніе b_1x_1, а подъ нимъ въ 3-й горизонтали сумма $b_1x_1 + a_2 = b_2$. Третій членъ во 2-й горизонтали есть произведеніе b_2x_1, а подъ нимъ въ 3-й горизонтали сумма $b_2x_1 + a_3 = b_3$. Продолжая этотъ процессъ, найдемъ всѣ коэфиціенты искомаго частнаго $\Phi(x)$ и остатокъ R, который и будетъ результатъ подстановленія числа x_1 въ полиномѣ $f(x)$.

Примѣръ 1. Найти результатъ подстановленія числа 3 вмѣсто x въ полиномѣ:

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 11x - 61$$

Таблица (8) въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\begin{array}{ccccc} 3, & -5, & 10, & 11, & -61 \\ & 9, & 12, & 66, & 231 \\ \hline & 4 & 22 & 77 & 170 \end{array}$$

Изъ этой таблицы видимъ, что:

$$R = f(3) = 170 \quad , \text{ а } \quad \Phi(x) = 3x^4 + 4x^2 + 22x + 77$$

Примѣръ 2. Найти результатъ подстановленія числа 1 въ полиномѣ:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$$

Таблица (8) будетъ:

1,	5,	3,	2
	1,	6,	9
	6,	9,	11

слѣдовательно результатъ подстановленія и частное отъ дѣленія $f(x)$ на $x-1$ будутъ:

$$R=11 \quad , \quad \Phi(x)=x^2+6x+9$$

Примѣръ 3. Найти результатъ подстановленія числа -2 въ полиномъ:

$$f(x)=2x^4-3x^3+7x^2-x+9$$

Таблица (8) будетъ:

2,	—3,	7,	—1,	9
	—4,	14,	—42,	86
	—7,	21,	—43,	95

слѣдовательно $f(-2)=R=95$, а частное отъ дѣленія $f(x)$ на $x+2$ будетъ:

$$\Phi(x)=2x^3-7x^2+21x-43$$

§ 327. Часто приходится, въ числовыхъ уравненіяхъ, какъ увидимъ ниже, преобразовывать уравненіе:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ +a_{n-1}a+a_n=0 \qquad (9)$$

въ другое, коего корни были-бы меньше числомъ h корней уравненія (9). Для этого надобно положить $x-h=y$ и вмѣсто x подставить въ (9) $x=y+h$. Такое подстановленіе даетъ, послѣ всѣхъ приведеній, уравненіе:

$$A_0y^n+A_1y^{n-1}+A_2y^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ +A_{n-1}x+A_n=0 \qquad (10)$$

или возвращаясь къ x:

$$A_0(x-h)^n+A_1(x-h)^{n-1}+\ .\ .\ .\ .\ +A_{n-2}(x-h)^2+A_{n-1}(x-h)+A_n=0$$

Изъ формы этого полинома, который есть ничто иное какъ полиномъ (9) въ другой формѣ, видимъ, что остатокъ отъ дѣленія $f(x)$ на $x-h$, есть A_n, а частное:

$$A_0(x-h)^{n-1}+A_1(x-h)^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ +A_{n-2}(x-h)+A_{n-1}$$

Раздѣляя еще разъ $f(x)$ на $x-h$ видимъ, что остатокъ будетъ A_{n-1}, а частное будетъ:

$$A_0(x-h)^{n-2}+A_1(x-h)^{n-3}+\ \ldots\ +A_{n-3}(x-h)+A_{n-2}$$

Продолжая подобнымъ образомъ, найдемъ послѣдовательно всѣ коэфиціенты A_0, $A_1, \ldots, A_n$ искомаго уравненія (10), очевидно $A_0=a_0$.

Изъ этого видимъ, что для опредѣленія коэфиціентовъ A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ надобно дѣлить послѣдовательно $f(x)$ на $x-h$, получаемые остатки и будутъ A_n, $A_{n-1}, \ldots, A_1$, $A_0=a_0$.

Примѣръ 1. Найти уравненіе коего корни были-бы меньше на 4 корней уравненія:

$$f(x)=x^4-5x^3+7x^2-17x+11=0$$

Первое дѣленіе, какъ показано въ предъидущемъ, $f(x)$ на $x-4$, даетъ:

1,	—5,	7,	—17,	11
	4	—4	12	—20
	—1	3	—5	—9

слѣдовательно остатокъ $A_4=-9$, а частное:

$$x^3-x^2+3x-5$$

Второе дѣленіе на $x-4$ дастъ:

1,	—1,	3,	—5
	4	12	60
	3	15	55

Изъ этой таблицы видимъ, что остатокъ $A_3=55$, а частное будетъ:

$$x_2+3x+15$$

Третье дѣленіе дастъ:

1,	3,	15
	4	28
	7	43

изъ этой таблицы видно, что остатокъ $A_2=43$, а частное $x+7$.

Дѣля послѣдній разъ $x+7$ на $x-4$ будемъ имѣть:

1,	7
	4
	11

слѣдовательно послѣдній остатокъ будетъ $A_1=11$.

Изъ этого видимъ, что искомое уравненіе:

$$A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0$$

будетъ:

$$y^4+11y^3+43y^2+55y-9=0$$

Этотъ процессъ можно представить слѣдующей таблицей, которая сокращаетъ дѣйствія:

1,	—5,	7,	—17,	11
	4	—4	12	—20
	—1	3	—5	**9**
	4	12	60	
	3	15	**55**	
	4	28		
	7	**43**		
	4			
	11			

Черныя цифры суть коэфиціенты искомаго уравненія.

Примѣръ 2. Уменьшить корни уравненія:

$$x^5+4x^3-x^2+11=0$$

на 3:

1,	0,	4,	—1,	0,	11
	3	9	39	114	342
	3	13	38	114	**353**
	3	18	93	393	
	6	31	131	**507**	
	3	27	174		
	9	58	**305**		
	3	36			
	12	**94**			
	3				
	15				

Слѣдовательно искомое уравненіе будетъ:

$$y^5 + 15y^4 + 94y^3 + 305y^2 + 507y + 353 = 0$$

Примѣръ 3. Найти уравненіе, коего корни были-бы больше на 2 корней уравненія:

$$4x^5 - 2x^2 + 7x - 3 = 0$$

Въ этомъ случаѣ, $h = -2$. Таблица будетъ слѣдующая:

4,	0,	—2,	0,	7,	—3
	—8	+16	—28	56	—126
	—8	14	—28	63	**—129**
	—8	32	—92	+240	
	—16	46	—120	**303**	
	—8	48	—188		
	—24	94	**—308**		
	—8	64			
	—32	**158**			
	—8				
	—40				

Изъ этой таблицы находимъ искомое уравненіе:

$$4y^5 - 40y^4 + 158y^3 - 308y^2 + 303y - 129 = 0$$

Примѣръ 4. Уменьшить на 23 корни уравненія:

$$5x^3 - 13x^2 - 12x + 7 = 0$$

Удобнѣе уменьшить сначала на 20, а затѣмъ еще на 3. Вотъ таблица:

5,	—13,	—12,	7
	100	1740	34560
	87	1728	**34567**
	100	3740	19122
	187	**5468**	**53689**
	100	906	
	287	6374	
	15	951	
	302	**7325**	
	15		
	317		
	15		
	332		

Слѣдовательно искомое уравненіе будетъ:

$$5y^3+332y^2+7325y+53689=0$$

Предѣлы дѣйствительныхъ корней.

§ 328. Предѣлами дѣйствительныхъ корней уравненія называются такія два числа, между которыми помѣщаются всѣ дѣйствительные корни уравненія. Есть нѣсколько способовъ отыскивать такія два числа.

Способъ 1. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ .\ .\ .\ .\ .+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (11)$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, . . . , a_n суть-какія нибудь дѣйствительныя числа.

Пусть a будетъ наибольшій отрицательный коэфиціентъ изъ коэфиціентовъ a_1, a_2, . . . , a_n. Если для перемѣннаго x найдемъ такую числовую величину, что $f(x)$ будетъ число положительное, не только для этого числа, но и для всѣхъ большихъ его чиселъ, то найденное число будетъ *высшимъ* предѣломъ *положительныхъ* корней.

Возьмемъ выраженіе:

$$a_0x^n-a(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ .\ .\ .\ .+x+1) \qquad (12)$$

и найдемъ такое число для x, чтобы выраженіе (12) было число положительное, то легко видѣть, что тѣмъ болѣе найденное число будетъ давать результатъ для $f(x)$ положительный, такъ какъ:

$$a(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots.+x+1)>a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

Но чтобы выраженіе (12) имѣло величину положительную, необходимо найти для x такое положительное число, чтобы:

$$a_0x^n>a\frac{x^n-1}{x-1} \quad \text{или} \quad x^n>\frac{a}{a_0}\cdot\frac{x^n-1}{x-1}$$

или тѣмъ болѣе:

$$x^n-1>\frac{a}{a_0}\cdot\frac{x^n-1}{x-1}$$

откуда по сокращеніи на x^n-1:

$$1>\frac{a}{a_0}\cdot\frac{1}{x-1} \quad \text{или} \quad x-1>\frac{a}{a_0}$$

откуда:

$$x > \frac{a}{a_0} + 1 = \frac{a + a_0}{a_0} \tag{13}$$

это число есть предѣлъ положительныхъ корней уравненія. Если $a_0 = 1$, то:

$$x > 1 + a \tag{14}$$

т. е. предѣломъ положительныхъ корней въ уравненіи будетъ наибольшій отрицательный коэфиціентъ, увеличенный на единицу.

Примѣръ. Пусть уравненіе будетъ:

$$x^5 + 6x^4 - 9x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

Въ этомъ уравненіи наибольшій отрицательный коэфиціентъ есть 9, слѣдовательно, предѣлъ положительныхъ корней будетъ 10.

Способъ 2. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a^n = 0 \tag{15}$$

Пусть a будетъ наибольшій отрицательный коэфиціентъ въ уравненіи (15), а первый отрицательный коэфиціентъ пусть будетъ у x^{n-r}.

Такъ какъ всѣ члены въ уравненіи (15), предшествующіе члену $a_r x^{n-r}$ суть по условію положительные, то $f(x)$ будетъ, очевидно, величина положительная для величины x, которая дѣлаетъ величиною положительною выраженіе:

$$x^n - a(x^{n-r} + x^{n-r-1} + \ldots + x + 1)$$

т. е. если:

$$x^n > a\,\frac{x^{n-r+1} - 1}{x - 1}$$

а тѣмъ болѣе очевидно, если:

$$x^n > a\,\frac{x^{n-r+1}}{x - 1}$$

или если:

$$x^n(x-1) > ax^{n-r+1}$$

Сокращая на x^n, находимъ:

$$x^{r-1}(x-1) > a$$

а тѣмъ болѣе, если:

$$(x-1)^r > a$$

откуда, наконецъ:

$$x > 1 + \sqrt[r]{a} \tag{16}$$

такой предѣлъ положительныхъ корней уравненія даетъ этотъ способъ.

Примѣръ. Приложимъ этотъ способъ къ уравненію 1-го примѣра, то найдемъ:

$$x > 1 + \sqrt{9} = 4$$

Слѣдовательно, этотъ способъ даетъ предѣлъ ближе къ корнямъ.

Способъ 3. Этотъ способъ извѣстенъ подъ именемъ *способа Ньютона.*

Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = 0$$

то (§ 24):

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x) \tag{17}$$

Если найдемъ для x такое число x_1, что:

$$f(x_1) \;,\; f'(x_1) \;,\; f''(x_1) \;,\; \ldots \;,\; f^{(n-1)}(x_1) \;,\; f^{(n)}(x_1) \tag{18}$$

будутъ всѣ числа положительныя, то x_1 и будетъ высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, если функціи (18) будутъ числа положительныя, то очевидно, $f(x_1+h)$ будетъ величина положительная для всѣхъ положительныхъ значеній h, слѣдовательно, для величинъ большихъ отъ x_1 уравненіе не можетъ обратиться въ нуль.

Примѣръ. Возьмемъ тотъ же примѣръ. Мы будемъ имѣть:

$$f(x) = x^5 + 6x^4 - 9x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 5x^4 + 24x^3 - 27x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 20x^3 + 72x^2 - 54x - 4$$
$$f'''(x) = 60x^2 + 144x - 54$$
$$f^{IV}(x) = 120x + 144$$
$$f^{V}(x) = 120$$

Легко видѣть, что при $x = 2$ всѣ эти функціи будутъ положительныя числа, слѣдовательно 2 есть высшій предѣлъ. Этотъ способъ далъ, какъ видимъ, предѣлъ ближе къ корнямъ, но онъ сложнѣе предъидущихъ.

Слѣдствіе. Если въ данномъ уравненіи всѣ коэфиціенты будутъ числа положительныя, то высшій предѣлъ положительныхъ корней будетъ нуль, т. е. такое уравненіе не имѣетъ положительныхъ корней.

Способъ 4. Каждый положительный членъ въ уравненіи:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

преобразуемъ съ помощью формулы:

$$x^m = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) + 1$$

такимъ образомъ уравненіе $f(x) = 0$ сдѣлается:

$$\begin{aligned} a_0(x-1)x^{n-1} + a_0(x-1)x^{n-2} + a_0(x-1)x^{n-3} + \dots + a_0(x-1) + a_0 \\ + a_1(x-1)x^{n-2} + a_1(x-1)x^{n-3} + \dots + a_1(x-1) + a_1 \\ + a_2(x-1)x^{n-2} + \dots + a_2(x-1) + a_2 \\ - a_3x^{n-3} \\ + \dots - a_rx^{n-r} \end{aligned}$$

разсматривая послѣдовательно вертикальныя колонны, въ которыхъ нѣтъ отрицательныхъ членовъ, онѣ будутъ всѣ положительныя если $x > 1$.

Чтобы были положительными и тѣ колонны, въ которыхъ находятся и отрицательные члены, необходимо имѣть:

$$(a_0 + a_1 + a_2)(x-1) > p_3$$

$$(a_3 + a_1 + a_2 + \dots + a_{r-1})(x-1) > p_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

откуда видимъ, что x должно быть наибольшее изъ чиселъ:

$$\frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2} + 1, \dots, \frac{a_r}{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{r-1}} + 1, \dots \quad (19)$$

чтобы, для всякого числа большаго отъ этого послѣдняго, полиномъ $f(x)$ былъ количествомъ положительнымъ. Слѣдовательно, выбранное наибольшее число изъ ряда (19) будетъ предѣлъ положительныхъ корней уравненія $f(x) = 0$.

Примѣръ. Приложимъ этотъ способъ къ предъидущему примѣру. Изъ чиселъ:

$$\frac{9}{7} + 1, \quad \frac{2}{7} + 1, \quad \frac{2}{8} + 1$$

наибольшее есть $\frac{9}{7}+1$, слѣдовательно предѣлъ положительныхъ корней будетъ 3.

Возьмемъ еще нѣсколько примѣровъ:

Примѣръ 1. Найти высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія:

$$x^4-5x^3+40x^2-8x+23=0$$

По 1-му и 2-му способамъ $1+8=9$.
По 3-му способу 3.
По 4-му способу 6.

Примѣръ 2. Найти высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія:

$$x^5+3x^4+x^3-8x^2-51x+18=0$$

По 1-му способу $51+1=52$.
По 2-му „ $1+\sqrt[3]{51}<5$.
По 3-му „ 3.
По 4-му „ 12.

Примѣръ 3. Найти высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія:

$$x^7+4x^6-3x^5+5x^4-9x^3-11x^2+6x-8=0$$

По 1-му способу 12.
По 2-му „ 3.
По 3-му „ 2.
По 4-му „ 3.

Такъ какъ наибольшее изъ чиселъ:

$$\frac{3}{1+4},\quad \frac{9}{1+4+5},\quad \frac{11}{1+4+5},\quad \frac{8}{1+4+5+6}$$

есть третье.

Способъ 5. Часто слѣдующій способъ даетъ предѣлъ гораздо ближе нежели выше изложенные четыре способа. Этотъ способъ состоитъ въ томъ, что собираютъ члены уравненія по группамъ, въ которыхъ первый членъ положительный и ищутъ наименьшее число для x, которое бы всѣ группы обращало въ положительную величину. Это число и будетъ искомый предѣлъ. Эта группировка, смотря по уравненію, бываетъ различна въ каждомъ частномъ случаѣ. Слѣдующіе примѣры пояснятъ сказанное.

Примѣръ 4. Возьмемъ пр. 1. Уравненіе можно написать въ формѣ группъ:

$$x^4(x-6)+4x(x-2)+23=0$$

Очевидно, при $x>6$ полиномъ будетъ положительнымъ. Слѣдовательно, 6 есть искомый предѣлъ.

Примѣръ 5. Возьмемъ пр. 2. Уравненіе можно написать въ формѣ:

$$x^2(x^3-8)+x(3x^3-51)+x^3+18=0$$

при $x \geqq 3$ этотъ полиномъ будетъ положительнымъ, слѣдовательно, 3 есть предѣлъ.

Примѣръ 6. Возьмемъ уравненіе:

$$x^8-20x^7+4x^6-11x^5-120x^4+13x-25=0$$

его можно написать въ формѣ:

$$x^5(x^3-11)+20x^4(x^3-6)+4x^6+13x-15=0$$

двучлены x^3-11, x^3-6 и $13x-15$ для $x \geqq 3$ положительные, слѣдовательно, 3 есть предѣлъ положительныхъ корней. Другіе способы даютъ предѣлъ больше 3.

Примѣръ 7. Найти высшій предѣлъ корней уравненія:

$$x^4-x^3-2x^2-4x-24=0$$

Если въ уравненіи нѣсколько отрицательныхъ членовъ, а коэфиціентъ у x наивысшей степени есть единица, то необходимо умножить все уравненіе на такое число, чтобы можно было распредѣлить первый членъ между отрицательными. Умноживъ данное уравненіе на 4, его можно написать въ формѣ:

$$x^3(x-4)+x^2(x^2-8)+x(x^3-16)+x^4-96=0$$

откуда видимъ, что 4 есть искомый предѣлъ.

§ 329. *Предѣлъ отрицательныхъ корней.* Разысканіе предѣла отрицательныхъ корней сводится на разысканіе предѣла положительныхъ слѣдующимъ образомъ:

Если въ данномъ уравненіи $f(x)=0$ измѣнимъ x на $-x$, то въ уравненіи $f(-x)$ корни положительные сдѣлаются отрицательными, а отрицательные сдѣлаются положительными. Слѣдовательно, для отысканія высшаго предѣла отрицательныхъ корней надобно преобразовать данное уравненіе $f(x)=0$ въ $f(-x)=0$ и отыскать высшій предѣлъ положительныхъ

его корней; этотъ найденный предѣлъ, взятый отрицательно, и будетъ, очевидно, высшимъ предѣломъ отрицательныхъ корней.

Примѣръ 4. Возьмемъ тотъ же примѣръ:

$$f(x) = x^5 + 6x^4 - 9x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

послѣ перемѣны знаковъ:

$$f(-x) = x^5 - 6x^4 - 9x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$$

По первымъ двумъ способамъ предѣлъ отрицательныхъ корней будетъ -10, а по способу Ньютона этотъ предѣлъ будетъ -7.

Слѣдовательно, всѣ дѣйствительные корни нашего уравненія заключаются между числами $+2$ и -7.

§ 330. *Низшій предѣлъ положительныхъ корней.* Положительное число, которое меньше всѣхъ положительныхъ корней уравненія, называется *низшимъ предѣломъ.* Разысканіе этого предѣла сводится также на разысканіе высшаго предѣла положительныхъ корней слѣдующимъ образомъ.

Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (20)$$

пусть его дѣйствительные положительные корни будутъ:

$$x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \;,\; \ldots\ldots\ldots \;,\; x_m$$

и притомъ расположенные такъ, что:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots\ldots < x_m$$

т. е. x_1 наименьшій, а x_m наибольшій. Преобразуемъ уравненіе (20) въ другое, коего корни были-бы обратны корнямъ даннагó; это преобразованіе дѣлается, подставивъ въ уравненіе (20) вмѣсто x величину $\frac{1}{x}$ (§ 55).

Пусть преобразованное уравненіе будетъ:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \qquad (21)$$

его положительные корни, очевидно, будутъ:

$$\frac{1}{x_1} \;,\; \frac{1}{x_2} \;,\; \frac{1}{x_3} \;,\; \ldots\ldots \;,\; \frac{1}{x_m}$$

и притомъ $\frac{1}{x_1}$ будетъ наибольшій, а $\frac{1}{x_m}$ наименьшій.

Отыщемъ высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (21), пусть онъ будетъ α, то:

$$\alpha > \frac{1}{x_1} \quad , \quad \frac{1}{x_1} \quad , \quad \frac{1}{x_3} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \frac{1}{x_m}$$

откуда:

$$\frac{1}{\alpha} < x_1 \quad , \quad x_2 \quad , \quad x_3 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad x_m$$

слѣдовательно, $\frac{1}{\alpha}$ будетъ низшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (20).

Примѣръ 5. Возьмемъ опять уравненіе:

$$f(x) = x^5 + 6x^4 - 9x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

откуда:

$$x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 6x - 1 = 0$$

По первому и второму способу высшій предѣлъ положительныхъ корней будетъ 4, слѣдовательно низшій ихъ предѣлъ будетъ $^1/_4$ или 0,25. Слѣдовательно, всѣ положительные корни даннаго уравненія заключаются между 0,25 и 2.

§ 331. *Низшій предѣлъ отрицательныхъ корней.* Для этого преобразовываются уравненіе $f(x) = 0$ въ $f(-x) = 0$ и отыскивается низшій предѣлъ положительныхъ корней; найденное число, взятое отрицательно и будетъ искомый предѣлъ.

Примѣръ 6. Преобразовывая уравненіе:

$$x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 6x - 1 = 0$$

въ форму:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 2x^5 + x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

найдемъ низшій предѣлъ отрицательныхъ корней $-^2/_{11}$.

§ 332. *Выдѣленіе цѣлыхъ корней.* Пусть x_1 будетъ однимъ изъ цѣлыхъ корней уравненія:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ . \ . \ . + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (22)$$

съ цѣлыми коэфиціентами.

Означимъ частное (остатокъ будетъ нуль) отъ дѣленія $f(x)$ на $x-x_1$ чрезъ:

$$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ \ldots\ +b_{n-2}x+b_{n-1} \tag{23}$$

помножая это частное на $x-x_1$ и сравнивая его коэфиціенты съ коэфиціентами $f(x)$, найдемъ слѣдующую зависимость:

$$\begin{aligned} &a_0=b_0\ ,\ a_1=b_1-x_1b_0\ ,\ a_2=b_2-x_1b_1\ ,\ a_3=b_3-x_1b_2\ ,\ \ldots \\ &a_{n-2}=b_{n-2}-x_1b_{n-3}\ ,\ a_{n-1}=b_{n-1}-x_1b_{n-2}\ ,\ a_n=-x_1b_{n-1} \end{aligned} \tag{24}$$

Изъ послѣдняго уравненія видимъ, что a_n дѣлится на корень x_1; изъ предпослѣдняго, которое есть:

$$a_{n-1}+\frac{a_n}{x_1}=-x_1b_{n-2}$$

видимъ, что сумма a_{n-1} и полученнаго частнаго $\frac{a_n}{x_1}$ дѣлится на x_1; далѣе, что сумма a_{n-2} и полученнаго частнаго b_{n-2} дѣлится на x_1 и т. д. до послѣдняго частнаго $-b_0$, которое должно быть равно $-a_0$.

Если этотъ процессъ сдѣлаемъ съ каждымъ изъ дѣлителей числа a_n, которые лежатъ между, предварительно, найденными предѣлами корней уравненія $f(x)=0$, то тѣ изъ дѣлителей, которые удовлетворяютъ предъидущимъ условіямъ, т. е. даютъ каждый разъ цѣлое частное, а послѣднее частное равно $-a_0$, будуть корнями предложеннаго уравненія.

Если $a_0=1$, то уравненіе (13), имѣетъ корни цѣлые и несоизмѣримые, слѣдовательно предъидущій процессъ даетъ всѣ соизмѣримые корни уравненія.

Этотъ процессъ можно расположить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{cccccccc} a_n\ , & a_{n-1}\ , & -a_{n-2}\ , & \ldots\ , & a_2\ , & a_1\ , & a_0 \\ & -b_{n-1}\ , & -b_{n-2}\ , & \ldots\ , & -b_2\ , & -b_1\ , & -b_0 \\ \hline & -x_1b_{n-2}\ , & -x_1b_{n-3}\ , & \ldots\ , & -x_1b_1\ , & -x_1b_0\ , & 0 \end{array}$$

первое число ($-b_{n-1}$), во второй горизонтали получено, раздѣляя a_n на x_1, которое складывается съ a_{n-1} и сумма $-x_1b_{n-2}$ написана въ третьей горизонтали. Эта сумма, раздѣленная на x_1, даетъ второй членъ во второй горизонтали, сумма a_{n-2} съ этимъ членомъ даетъ 2-й членъ $-x_1b_{n-2}$ въ 3-й горизонтали и т. д. Если x_1 есть корень уравненія, то послѣдній членъ во 2-й горизонтали будетъ $-a_0$, а въ третьей нуль.

Если такимъ образомъ убѣдимся, что x_1 есть цѣлый корень, то слѣдующій процессъ, съ другимъ дѣлителемъ числа a_n, можно производить не надъ коэфиціентами a_0, a_1, a_2, . . . , a_n, но надъ коэфиціентами 2-й горизонтали, перемѣнивъ въ нихъ знаки, потому, что они суть коэфиціенты частнаго отъ дѣленія $f(x)=0$ на $x-x_1$. Если дѣлитель числа a_n, при дѣленіи на него получаемыхъ суммъ, даетъ дробь, то такой дѣлитель не можетъ быть корнемъ уравненія и процессъ здѣсь же прекращается.

Числа $+1$ и -1, которыя суть всегда дѣлители числа a_n, просто подстановляютъ въ данное уравненіе, чтобы убѣдиться, удовлетворяютъ-ли они уравненію.

Примѣръ 1. Возьмемъ уравненіе:

$$x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$$

легко найти, что предѣлы корней этого уравненія суть -5 и $+5$. Слѣдовательно, только дѣлители:

$$-4,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad +1,\quad +2,\quad +3,\quad +4$$

числа 24 могутъ быть корнями даннаго уравненія.

Попробуемъ дѣлителя 4?

—24,	38,	—13,	—2,	1
	—6	8		
	32,	—5		

—5 не дѣлится на 4, слѣдовательно 4 не можетъ быть корнемъ уравненія.

Возьмемъ дѣлителя 3:

—24,	38,	—13,	—2,	1
	—8,	10,	—1,	—1
	30,	—3,	—3,	0

Слѣдовательно, 3 есть корень уравненія.

Возьмемъ дѣлителя 2. Вмѣсто того чтобы производить процессъ надъ коэфиціентами даннаго уравненія, произведемъ его надъ членами второй горизонтали въ предъидущей таблицѣ, перемѣнивъ въ нихъ знаки:

8,	—10,	1,	1	
	4,	—3,	—1	(25)
	—6,	—2,	0	

слѣдовательно 2 есть корень уравненія.

Примѣръ 2. Возьмемъ еще уравненіе:

$$f(x) = x^4 - 29x^3 - 31x^2 - 31x + 60 = 0$$

Всѣ корни находятся между —3 и 32, слѣдовательно необходимо испытать дѣлителей числа 60:

$$-2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30$$

$f(1) = 0$, слѣдовательно 1 есть корень.

Условіе $f(-1) = 124$ исключаетъ дѣлителей:

$$2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20$$

слѣдовательно надобно испытать только —2, 3, 30 и легко убѣдиться, что числа —2 и 30 суть корни.

§ 334. *Предложеніе.* Если въ уравненіи:

$$f(x) = 0 \qquad (26)$$

подставивъ два числа α и β, гдѣ $\alpha > \beta$, получимъ результаты съ противными знаками, то уравненіе (26) будетъ имѣть между числами α и β, по крайней мѣрѣ, одинъ дѣйствительный корень, а если ихъ больше одного, то число ихъ будетъ нечетное.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ будутъ корнями, лежащими между числами α и β, уравненіе (26) можно написать въ формѣ:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (x - x_m)\,\varphi(x) = 0 \qquad (27)$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть произведеніе остальныхъ дѣйствительныхъ корней, т. е. корней, лежащихъ внѣ чиселъ α и β и мнимыхъ корней. Эти послѣдніе, будучи попарно сопряженны, дадутъ квадратныхъ множителей формы:

$$(x - x')^2 + y'^2 \qquad (28)$$

$x' \pm y'i$ суть сопряженные мнимые корни. Подставимъ въ уравненіе (27) послѣдовательно α и β, то найдемъ:

$$f(\alpha) = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ \ldots\ldots\ (\alpha - x_n)\,.\,\varphi(\alpha)$$

$$f(\beta) = (\beta - x_1)(\beta - x_2)\ \ldots\ldots\ (\beta - x_n)\,.\,\varphi(\beta)$$

множители $\beta - x_1,\ \beta - x_2, \ldots, \beta - x_n$ всѣ положительные, а множители $\alpha - x_1,\ \alpha - x_2, \ldots, \alpha - x_n$ всѣ отрицательные. Что же касается до

$\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$, то очевидно онѣ имѣютъ одинаковые знаки. Слѣдовательно $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ будутъ имѣть или одинаковые знаки или разные, смотря по тому будетъ-ли между числами α и β *четное* или *нечетное* число корней даннаго уравненія.

Легко видѣть, что это свойство распространяется и на уравненія съ равными корнями лишь бы корень p-й кратности считался за p корней.

Слѣдствіе 1. Если результаты $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ будутъ имѣть одинаковые знаки, то уравненіе $f(x)=0$ или не имѣетъ корней между числами α и β или ихъ есть, между этими числами, четное число.

Слѣдствіе 2. Если уравненіе будетъ нечетной степени:

$$x^{2\mu+1}+a_1x^{2\mu}+a_2x^{2\mu-1}+\ldots+a_{2\mu}x+a_{2\mu+1}=0$$

то подстановленіе $+\infty$ и $-\infty$ даетъ результаты съ противными знаками, слѣдовательно уравненіе нечетной степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень.

Слѣдствіе 3. Если въ уравненіи нечетной степени послѣдній членъ $a_{2\mu+1}$ будетъ число положительное, то подстановленіе $-\infty$ и 0 даетъ результаты съ противными знаками, слѣдовательно такое уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ отрицательный корень.

Слѣдствіе 4. Если въ уравненіи четной степени послѣдній членъ $a_{2\mu}$ будетъ число отрицательное, то подстановленія $-\infty$ и 0, и $+\infty$ и 0 даютъ результаты съ противными знаками, слѣдовательно такое уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный и одинъ отрицательный корень.

§ 335. *Предложеніе.* Если x_1 есть корень уравненія:

$$f(x)=0$$

и мы проведемъ перемѣнное x отъ x_1-h до x_1+h, гдѣ h есть количество произвольно малое, то до уничтоженія, т. е. для $x=x_1-h$ функція $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ имѣютъ противные знаки, т. е. если $f(x_1-h)=$ $=\pm a^2$, то $f'(x_1-h)=\mp b^2$, гдѣ a^2 и b^2 суть положительныя числа; а послѣ уничтоженія, т. е. $f(x_1+h)$ и $f'(x_1+h)$ имѣютъ одинаковые знаки, т. е. или обѣ положительныя или обѣ отрицательныя.

Доказательство. Положимъ для большей общности, что x_1 есть m кратный корень, поэтому онъ будетъ корнемъ и производныхъ функцій:

$$f(x_1)=0 \quad , \quad f''(x_1)=0 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f^{(m-1)}(x_1)=0$$

до m—1 включительно (§ 46). Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$f(x_1+h)=\frac{h^m}{1.2.3....m}f^{(m)}(x_1)+\frac{h^{m+1}}{1.2.3....m+1}f^{(m+1)}(x_1)+\ .\ .\ .\ .\ .$$

а

$$f'(x_1+h)=\frac{h^{m-1}}{1.2.3....m-1}f^{(m)}(x_1)+\frac{h^m}{1.2.3....m}f^{(m+1)}(x_1)+\ .\ .\ .\ .\ .$$

раздѣляя первое изъ этихъ уравненій на второе, найдемъ:

$$\frac{f(x_1+h)}{f'(x_1+h)}=\frac{h}{m}+kh^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Такъ какъ h можно взять какъ угодно малымъ, то знакъ второй части предъидущаго равенства будетъ зависить отъ знака h (§ 32, сл. 3), т. е. вторая часть будетъ величина положительная или отрицательная, смотря по тому будетъ-ли h съ $+$ или съ $-$. Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{f(x_1+h)}{f'(x_1+h)}=+\quad ;\quad \frac{f(x_1-h)}{f'(x_1-h)}=-$$

что и требовалось доказать.

§ 336. *Предложеніе Ролля.* Между *двумя* дѣйствительными корнями x_1 и x_2 уравненія $f(x)=0$ находится всегда одинъ дѣйствительный корень x' функціи производной $f'(x)=0$.

Доказательство. Пусть $x_1<x_2$. Предъидущее предложеніе даетъ:

$$\frac{f(x_1+h)}{f'(x_1+h)}=+\quad ;\quad \frac{f(x_2-h)}{f'(x_1-h)}=- \tag{18}$$

Но между предѣлами x_1+h и x_2-h функція $f(x)$ не имѣетъ корней по условію, слѣдовательно, $f(x_1+h)$ и $f(x_2-h)$ имѣютъ одинаковые знаки, а такъ какъ дроби (18) имѣютъ разные знаки, то очевидно:

$$f'(x_1+h)\quad \text{и}\quad f'(x_2-h)$$

должны имѣть разные знаки, а слѣдовательно, $f'(x)$ между x_2+h и x_2-h имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень. Но легко видѣть, что она можетъ имѣть *только одинъ* корень.

Слѣдствіе. Два послѣдовательные корня x'_1, x'_2 функціи $f'(x)=0$ не могутъ заключать между собою болѣе одного корня функціи $f(x)=0$. Въ самомъ дѣлѣ, если $f(x)$ имѣла два корня между x_1 и x_2, то между этими корнями находился-бы еще хоть одинъ корень уравненія $f'(x)=0$, но

этотъ корень лежалъ-бы и между корнями x'_1 и x'_2, что противорѣчитъ положенію. Настоящее предложеніе принадлежитъ французскому геометру *Роллю* (Rolle, 1652—1719 гг.) и извѣстно въ Анализѣ подъ именемъ *теоремы Ролля.*

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ всѣ корни дѣйствительные, то и уравненія:

$$f'(x)=0 \quad , \quad f''(x)=0 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad f^{n-1}(x)=0$$

имѣютъ всѣ корни дѣйствительные и притомъ корни уравненія $f'(x)$ будутъ всѣ въ промежуткахъ:

$$-\infty \ , \ x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ . \ . \ . \ . \ . \ , \ x_n \ , \ +\infty$$

гдѣ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ суть всѣ корни уравненія $f(x)=0$.

Во всемъ слѣдующемъ мы будемъ предполагать, что уравненіе приведено къ формѣ:

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ \ . \ . \ . \ . + a_{n-1}x+a_n=0$$

гдѣ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ цѣлыя числа, что изъ него выдѣлены равные корни и корни цѣлые, слѣдовательно, оно содержитъ только несоизмѣримые и мнимые корни.

ГЛАВА XXII.

Предложеніе Штурма.

§ 337. Предложенія, изложенныя въ предъидущей главѣ, даютъ предѣлы, между которыми находятся всѣ дѣйствительные корни даннаго уравненія и даютъ возможность утверждать, въ извѣстномъ случаѣ, что между данными числами лежитъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень дѣйствительный; но эти предложенія не даютъ никакого понятія о числѣ дѣйствительныхъ корней уравненія, какъ между найденными предѣлами, такъ и между произвольно взятыми числами.

Все это пополняется одной изъ самыхъ замѣчательныхъ теоремъ, которую предложилъ французскій математикъ *Штурмъ* въ 1829 г. (Sturm,

1803—1855 гг.), которая и теперь носитъ его имя. Это предложеніе точно опредѣляетъ число дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія между двумя произвольно взятыми числами, а слѣдовательно, и все число дѣйствительныхъ корней, если взятыя числа будутъ предѣлы корней, опредѣленные способами, указанными въ §§ 328—332. Изложимъ это предложеніе.

Пусть данное уравненіе n-й степени, освобожденное отъ равныхъ корней, будетъ:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Возьмемъ производную этой функціи $f'(x)$ и разыщемъ, извѣстнымъ способомъ, общаго наибольшаго дѣлителя между функціями $f(x)$ и $f'(x)$, съ тою только разницею, что въ каждомъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ перемѣняется знакъ. Пусть, такимъ образомъ, полученные остатки будутъ:

$$R_1(x) \quad , \quad R_2(x) \quad , \quad R_3(x) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad R_\mu(x) \tag{2}$$

эти остатки и функціи $f(x)$ и $f'(x)$ связаны поэтому между собою слѣдующими уравненіями:

$$\begin{aligned} f(x) &= Q_1 f'(x) \; - R_1(x) \\ f'(x) &= Q_2 R_1(x) - R_2(x) \\ R_1 &= Q_3 R_2(x) - R_3(x) \\ R_2 &= Q_4 R_3(x) - R_4(x) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_{\mu-2} &= Q_\mu R_{\mu-1}(x) - R_\mu(x) \end{aligned} \tag{3}$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu$ суть частныя при дѣленіи $f(x)$ на $f'(x)$, $f'(x)$ на R_1 и т. д. Такимъ образомъ получится рядъ функцій:

$$f(x) \quad , \quad f'(x) \quad , \quad R_1(x) \quad , \quad R_2(x) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad R_\mu(x) \tag{4}$$

изъ коихъ послѣдняя есть число, такъ какъ по условію уравненіе (1) не имѣетъ равныхъ корней, а поэтому общаго наибольшаго дѣлителя съ производною $f'(x)$ не имѣетъ. Рядъ этотъ называется *рядомъ Штурма*, а $R_1(x)$, $R_2(x), \ldots, R_\mu(x)$ называются *функціями Штурма*.

§ 338. Разсмотримъ теперь свойства ряда (4).

Свойство 1. Если возьмемъ какія-нибудь два числа α и β, $\alpha > \beta$ и проведемъ перемѣнное x чрезъ всѣ значенія отъ α до β, то функціи ряда (4) будутъ измѣняться и для нѣкоторыхъ значеній x-са между α и β будутъ обращаться въ нули, то одна, то другая, но для одного и того-же значенія x-са двѣ функціи подрядъ въ ряду (4) уничтожиться не могутъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, напримѣръ, что въ ряду (4), для какого-нибудь значенія x между α и β, уничтожились подрядъ двѣ функціи $R_3(x)=0$ и $R_4(x)=0$, то изъ уравненій (3) видимъ, что и функціи $R_2(x)=0$, $R_1(x)=0$, $f'(x)=0$, $f(x)=0$, а изъ этого мы-бы заключили, что такъ какъ для одного и того-же значенія перемѣннаго x функціи $f(x)$ и $f'(x)$ уничтожаются, то эти функціи имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя, т. е. имѣютъ равные корни (§ 46), что противорѣчитъ условію.

Свойство 2. Если для какого-нибудь значенія x-са между α и β одна изъ среднихъ функцій ряда (4) уничтожается, то сосѣднія съ нею имѣютъ всегда противные знаки. Пусть, напримѣръ, уничтожилась функція $R_3(x)$, то изъ уравненій (3) имѣемъ:

$$R_2(x) = -R_4(x)$$

Опредѣленіе. Если въ рядъ (4) подставимъ какое-нибудь число и, не обращая вниманіе на числовое значеніе его членовъ, отмѣтимъ только знаки, принадлежащіе каждому члену, то получимъ рядъ знаковъ, напримѣръ, такой:

$$\begin{matrix} f, & f', & R_1, & R_2, & R_3, & R_4, & \ldots \\ + & - & + & + & - & - & \end{matrix} \qquad (5)$$

Въ этомъ ряду, если два знака слѣдуютъ одинъ за другимъ, какъ $+-$ или $-+$, то это называютъ *перемѣнною* знаковъ, а если они слѣдуютъ въ порядкѣ $++$ или $--$, то это называютъ *повтореніемъ*. Въ ряду (5) есть три перемѣны и два повторенія.

Свойство 3. Положимъ, что для какого-нибудь значенія x-са, напримѣръ, для $x=x_1$, между α и β, одна изъ среднихъ функцій ряда (4), напримѣръ, $R_2(x)$ уничтожится, то (см. св. 2) сосѣднія съ нею $R_1(x)$ и $R_3(x)$ для x_1 имѣютъ противные знаки. Возьмемъ три значенія x-са: x_1-h, x_1 и x_1+h и возьмемъ h такъ малымъ, чтобы въ промежуткѣ отъ x_1-h до x_1+h ни одна изъ двухъ сосѣднихъ функцій $R_1(x)$ и $R_3(x)$ съ функціей $R_2(x)$ не уничтожились и эти три значенія подставимъ послѣдовательно въ рядъ:

$$R_1(x) \quad , \quad R_2(x) \quad , \quad R_3(x)$$

найдемъ, обращая вниманіе только на знакъ, слѣдующее:

	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$R_3(x)$
для $x=x_1-h$	$\pm$	$\mp$	$\mp$
для $x=x_1$	$\pm$	0	$\mp$
для $x=x_1+h$	$\pm$	$=$	$\mp$

или:

	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$R_3(x)$
для $x=x_1-h$	$\pm$	$=$	$\mp$
для $x=x_1$	$\pm$	0	$\mp$
для $x=x_1+h$	$\pm$	$\mp$	$\mp$

Изъ этихъ таблицъ видимъ, что отъ уничтоженія одной изъ среднихъ функцій $R_2(x_1)=0$ въ ряду (4) ни одна перемѣна знаковъ не теряется при переходѣ x-са отъ $x=x_1-h$ до $x=x_1+h$; одна перемѣна для x_1-h и x_1+h. Изъ этого заключаемъ, что при переходѣ x-са отъ α до β отъ уничтоженія среднихъ функцій ряда (4) перемѣна знаковъ не увеличивается и не уменьшается, какое число перемѣнъ было для $x=\alpha$, такое останется и для $x=\beta$.

Свойство 4. Теперь положимъ, что для $x=x_1$ между α и β сама функція $f(x)$ уничтожается, т. е. что x_1 есть корень уравненія $f(x)=0$. Возьмемъ опять два значенія для x-са: x_1-h и x_1+h, гдѣ h такъ мало, что въ промежуткѣ отъ x_1-h до x_1+h производная $f'(x)$ не имѣетъ ни одного корня, будемъ имѣть:

	$f(x)$	$f'(x)$
для $x=x_1-h$	$\pm$	$\mp$
для $x=x_1$	0	$\mp$
для $x=x_1+h$	$\mp$	$\mp$

составляемъ эту табличку на томъ основаніи, что до уничтоженія функція $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ имѣютъ противные знаки, а послѣ уничтоженія одинаковые (§ 335).

Разсматривая эту таблицу видимъ, что при переходѣ чрезъ корень функціи $f(x)$ потерялась одна перемѣна.

§ 339. Соображаясь теперь съ свойствами (3) и (4), будемъ имѣть предложеніе Штурма, которое состоитъ въ слѣдующемъ.

Предложеніе Штурма. Если въ рядъ функцій (4) подставимъ последовательно два произвольно взятыя числа α и β, $\alpha < \beta$ и сосчитаемъ число перемѣнъ знаковъ въ ряду для α и число перемѣнъ въ томъ же ряду для β, то число потерянныхъ перемѣнъ знаковъ, при переходѣ отъ α до β, будетъ равно числу дѣйствительныхъ корней лежащихъ между этими числами, такъ какъ отъ уничтоженія среднихъ функцій ряда перемѣны знаковъ не теряются (св. 3), а при переходѣ функціи $f(x)$ чрезъ корень, каждый разъ, теряется одна перемѣна знаковъ.

Если желаемъ знать, сколько данное уравненіе имѣетъ дѣйствительныхъ корней, то должно въ рядъ (4) поставить вмѣсто чиселъ α и β: $-\infty$ и $+\infty$. Если поставимъ вмѣсто α и β, $-\infty$ и 0; 0 и $+\infty$, то найдемъ число отрицательныхъ и число положительныхъ корней даннаго уравненія.

Примѣръ 1. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 13 = 0$$

откуда:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$$

разыскивая Штурмовы функціи какъ сказано выше, найдемъ:

$$R_1(x) = 2x - 5 \quad , \quad R_2(x) = +1$$

Слѣдовательно будемъ имѣть:

	$f(x)$,	$f'(x)$,	$R_1(x)$,	$R_2(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

Откуда видимъ, что для $x = -\infty$ рядъ имѣетъ три перемѣны, а для $x = +\infty$ ни одной, слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ всѣ три корня дѣйствительные. Но такъ какъ для $x = 0$ рядъ имѣетъ двѣ перемѣны, то изъ этого видимъ, что уравненіе имѣетъ одинъ отрицательный корень и два положительные. Если въ предъидущій рядъ поставимъ послѣдовательно числа -3, -2, $+2$, $+2{,}5$, 3, то найдемъ, что въ промежуткахъ -3 и -2, $+3$ и $2{,}5$, $2{,}5$ и 3 находится по одному корню. Такимъ образомъ корни выдѣлены.

Примѣръ 2. Пусть будетъ дано еще уравненіе:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 14x - 4 = 0$$

то:

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 10x + 14$$
$$R_1(x) = 17x^2 - 57x - 5$$
$$R_2(x) = 152x - 457$$
$$R_3(x) = +$$

Подставляя въ рядъ:

	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$R_3(x)$
$x = -\infty$	+	−	+	−	+
$x = -2$	+	−	+	−	+
$x = -1$	−	−	+	−	+
$x = 0$	−	+	−	−	+
$x = 1$	+	+	−	−	+
$x = 2$	+	+	−	−	+
$x = 3$	+	−	−	−	+
$x = 4$	+	+	+	+	+

Изъ этой таблицы видно, что всѣ четыре корня уравненія дѣйствительны и находятся между предѣлами -2 и $+4$. Одинъ между -2 и -1, одинъ между 0 и $+1$, и два между 3 и 4, и легко показать, что одинъ изъ нихъ лежитъ между 3 и $3{,}5$, а другой между $3{,}5$ и 4.

Примѣръ 3. Возьмемъ еще слѣдующее уравненіе:

$$f(x) = x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x - 18 = 0$$

откуда:

$$\tfrac{1}{6}f'(x) = x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 2$$
$$R_1(x) = -x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x + 18$$
$$R_2(x) = -x^3 + 10x^2 - 119$$
$$R_3(x) = 84x^2 - 9x - 170$$
$$R_4(x) = 2267x - 2402$$
$$R_5(x) = +$$

Слѣдовательно:

	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$R_3(x)$	$R_4(x)$	$R_5(x)$
$-\infty$	+	−	−	+	+	−	+
0	−	+	+	−	−	−	+
$+\infty$	+	+	−	−	+	+	+

Изъ этой таблицы видимъ, что данное уравненіе имѣетъ только два дѣйствительные корня, изъ коихъ одинъ отрицательный и одинъ положительный, слѣдовательно, оно имѣетъ четыре мнимые корня.

Примѣръ 4. Возьмемъ кубическое уравненіе (§ 53, 20):

$$z^3 + 3Hz + G = 0$$

для него будемъ имѣть:

$$f'(z) = 3(z^2 + H) \quad , \quad R_1 = -2Hz - G \quad , \quad R_2 = -(G^2 + 4H^3)$$

Если $H < 0$ и $G^2 + 4H^3 < 0$ (въ этомъ послѣднемъ условіи заключается первое $H < 0$), то уравненіе будетъ имѣть три дѣйствительныхъ корня. И въ самомъ дѣлѣ, при этихъ условіяхъ имѣемъ:

	$f(z)$	$f'(z)$	R_1	R_2
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

Примѣръ 5. Штурмовы функціи для уравненія четвертой степени:

$$f(z) = z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2 J_1 - 3H^2 = 0$$

будутъ:

$$f'(z) = 4z^3 + 12Hz + 4G$$

$$R_1 = -3Hz^2 - 3Gz - (a_0^2 J_1 - 3H^2)$$

$$R_2 = -(2HJ_1 - 3a_0 J_2)\,z - GJ_1$$

$$R_3 = J_1{}^3 - 27J_2{}^2$$

эти функціи получаются, принявъ въ соображеніе тождество (§ 54, 33):

$$G^2 + 4H^3 = a_0^2(HJ_1 - 0J_2)$$

При дѣленіи $f'(x)$ на R_1 надобно умножить $f'(x)$ на $3H^2$, въ полученномъ остаткѣ отбросить множителя a_0^2. При дѣленіи R_1 на R_2 надобно помножить R_1 на $(2HJ_1 - 3a_0 J_2)^2$ и въ полученномъ остаткѣ отбросить множителя $a_0^2 H^2$.

Теперь только можно дополнить то, что сказано о корняхъ биквадратнаго уравненія въ § 269.

Первые коэфиціенты въ штурмовыхъ функціяхъ въ пр. 5 суть:

$$-H_1 - (2HJ_1 - 3a_0 J_3) \quad , \quad J_1{}^3 - 27J_2{}^2$$

Если всѣ корни биквадратнаго уравненія дѣйствительны, то къ условію $\Delta_4 = J_1^3 - 27J_2^2 > 0$ надобно присовокупить еще условія $H < 0$ и $2HJ_1 - 3a_0J_2 < 0$.

Если одно или оба изъ этихъ послѣднихъ выраженій будутъ > 0, и $\Delta_4 > 0$, то всѣ корни уравненія будутъ мнимые.

Примѣръ 6. Показать, что если $H = 0$, $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, то всѣ корни будутъ равные и

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}$$

§ 340. Если читатель имѣлъ терпѣніе передѣлать всѣ предъидущіе примѣры, то онъ вполнѣ могъ убѣдиться какія трудности на практикѣ представляетъ предложеніе Штурма, даже при невысокихъ степеняхъ уравненій. Оно представляетъ тѣ же трудности, какія представляетъ операція разысканія общаго наибольшаго дѣлителя между двумя полиномами, поэтому уже самъ Штурмъ предложилъ нѣкоторыя упрощенія.

1. При послѣдовательныхъ дѣленіяхъ, съ помощью которыхъ разыскиваются функціи $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ можно умножать и дѣлить дѣлимыя или дѣлителей на какія угодно положительныя числа, функціи ряда (4) будутъ умножены на положительныхъ множителей, поэтому знаки ряда (4) не измѣняются. Но нельзя вводить или сокращать на множителей отрицательныхъ.

2. Условіе, по которому послѣдняя изъ функцій (4) именно R_μ есть постоянное число, не входитъ въ доказательство теоремы, это доказательство предполагаетъ только, что R_μ не измѣняетъ знака при переходѣ x-а отъ α до β. Откуда слѣдуетъ, что если между функціями $R_1(x)$, $R_2(x)$,.... встрѣтится такая, которая не имѣетъ корня между α и β, то рядъ (4) можно на ней и остановить, не обращая вниманія на всѣ слѣдующія за нею.

3. Можетъ случиться, что одинъ изъ предѣловъ α или β обращаетъ въ нуль одну или нѣсколько функцій въ ряду (4), отъ этого не произойдетъ никакого затрудненія для счета перемѣнъ знаковъ. Надобно, въ этомъ случаѣ, вмѣсто α подставить $\alpha - h$, а вмѣсто β величину $\beta + h$, гдѣ h есть количество какъ угодно малое. Положимъ, что для α или для β функція $f(x)$ уничтожится, то извѣстно, что функціи $f(x)$ и $f'(x)$ для $\alpha - h$ дадутъ перемѣну знаковъ, а для $\beta + h$ повтореніе. Что же касается до функцій слѣдующихъ, то если одна изъ нихъ уничтожается для $x = \alpha$ или $x = \beta$, то какъ мы видѣли выше (§ 338) для величинъ весьма близкихъ къ α или β, рядъ изъ предшествовавшей и изъ слѣдующей за нею даетъ всегда одну перемѣну.

§ 341. Чтобы данное уравненіе $f(x)$ имѣло всѣ корни дѣйствительные необходимо, чтобы рядъ (4) для $x = -\infty$ представлялъ всѣ перемѣны, а для $x = +\infty$ всѣ повторенія. Если данное уравненіе n-й степени, то въ ряду (4) будетъ $n+1$ функцій, степени которыхъ будутъ:

$$n \; , \; n-1 \; , \; n-2 \; , \; n-3 \; , \; . \; . \; . \; , \; 2 \; , \; 1 \; , \; 0$$

Чтобы рядъ (4) для $x = -\infty$ представлялъ только перемѣны знаковъ, которыхъ будетъ n, необходимо чтобы коэфиціенты у первыхъ членовъ функцій (4) были положительные. Изъ этого слѣдуетъ, что для того чтобы уравненія n-й степени имѣло всѣ корни дѣйствительные, необходимо чтобы функціи ряда (4) были числомъ $n+1$ и чтобы ихъ первые члены имѣли положительные коэфиціенты. Слѣдовательно всѣхъ условій $n+1$, но такъ какъ первые коэфиціенты въ $f(x)$ и $f'(x)$ суть всегда положительные, то число условій будетъ $n-1$ двумя меньше, но ихъ можетъ быть и еще меньше, если одни изъ нихъ включены въ другихъ.

§ 342. Предложеніе Штурма можетъ быть приложено и къ уравненіямъ съ равными корнями, лишь бы корень входящій нѣсколько разъ считался за одинъ.

Пусть $f(x) = 0$ будетъ уравненіе съ равными корнями, возьмемъ производную $f'(x)$ и разыщемъ общаго наибольшаго дѣлителя, съ условіемъ перемѣнить знакъ въ каждомъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ, какъ мы сказали выше (§ 337).

Пусть полученный рядъ функцій будетъ:

$$f(x) \;\; , \;\; f'(x) \;\; , \;\; R_1(x) \;\; , \;\; R_2(x) \;\; , \;\; R_3(x) \; , \; . \; . \; . \; , \; R_\rho(x) \qquad (18)$$

гдѣ $R_\rho(x)$ будетъ функція отъ x, а не постоянное число. Три послѣдовательныя функціи этого ряда будутъ, очевидно, связаны уравненіями формы:

$$R_{i-1} = Q_i R_i - R_{i+1}$$

Пусть D будетъ произведеніе линейныхъ множителей общихъ функціямъ $f(x)$ и $f'(x)$. Очевидно, что функціи ряда (18) всѣ дѣлятся на D. Означимъ частныя этого дѣленія чрезъ:

$$F(x) \;\; , \;\; F_1(x) \;\; , \;\; R'_1(x) \;\; , \;\; R'_2(x) \;\; , \; . \; . \; . \; . \; , \; R'_\rho(x) \qquad (19)$$

эти частныя также связаны уравненіемъ:

$$R'_{i-1} = Q_i R'_i - R'_{i+1}$$

Отношеніе $\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)}$, уничтожаясь, всегда перейдетъ отъ отрицательнаго къ положительному. Слѣдовательно, къ функціямъ ряда (19) можно приложить всѣ разсужденія, какія были сдѣланы относительно ряда (4), откуда слѣдуетъ, что уравненіе $F(x) = 0$, или $f(x) = 0$ будетъ имѣть столько корней между α и β, сколько въ ряду (19) потеряется перемѣнъ знаковъ; но такъ какъ этотъ рядъ отличается отъ ряда (18) только дѣлителемъ D, то рядъ (19) можно замѣнить рядомъ (18).

Таково предложеніе Штурма, блестящее въ теоріи и трудно выполнимое на практикѣ, поэтому предпочитаютъ другое—Бюдана или Фурье, которое въ теоріи сложнѣе, но на практикѣ удобнѣе.

Примѣръ 1. Найти число дѣйствительныхъ корней уравненія:

$$f'(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$$

Легко найти:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 18x - 7$$

$$R_1 = x^2 - 2x + 1$$

R_1 есть общій наибольшій дѣлитель функцій $f(x)$ и $f'(x)$.

	$f(x)$,	$f'(x)$,	R_1
$-\infty$	$+$	$+$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$

Слѣдовательно, уравненіе имѣетъ только два неравные корня, но одинъ изъ нихъ тройной, какъ видно изъ $R_1 = (x-1)^2$.

Примѣръ 2. Найти число дѣйствительныхъ корней уравненія:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$$

откуда:

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$$

$$R_1 = x^2 - 3x + 2$$

R_1 есть общій наибольшій дѣлитель $f(x)$ и $f'(x)$.

	$f(x)$,	$f'(x)$,	R_1
$-\infty$	$+$	$-$	$+$
$-\infty$	$+$	$+$	$+$

откуда видимъ, что $f(x) = 0$ имѣетъ два дѣйствительные корня 1 и 2, и оба двойные.

Примѣръ 3. Найти число дѣйствительныхъ корней уравненія:

$$f(x) = x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^2 + 48x - 16 = 0$$

откуда:

$$f'(x) = 6x^5 - 35x^4 + 60x^3 - 80x + 48$$

$$R_1 = 13x^4 - 84x^3 + 192x^2 - 176x + 48$$

$$R_2 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$$

R_2 есть общій наибольшій дѣлитель $f(x)$ и $f'(x)$. Слѣдовательно, $f(x) = 0$ имѣетъ три различныхъ корня, изъ коихъ одинъ четверной.

Предложеніе Бюдана.

§ 343. Теорема эта была въ первый разъ предложена въ 1811 году французскимъ математикомъ Бюданомъ (Budan).

Предложеніе. Пусть дано будетъ уравненіе n-й степени:

$$f(x) = 0 \tag{20}$$

возьмемъ всѣ производныя этой функціи и напишемъ рядъ, который носитъ названіе *ряда Фурье*:

$$f(x) \quad , \quad f'(x) \quad , \quad f''(x) \quad , \quad f'''(x) \quad , \quad . \; . \; . \; . \quad , \quad f^{(n)}(x) \tag{21}$$

состоящій изъ $n+1$ членовъ. Вставимъ въ этотъ рядъ послѣдовательно вмѣсто x два произвольно взятыя числа α и β, гдѣ $\alpha < \beta$, и сосчитаемъ число перемѣнъ знаковъ, то число дѣйствительныхъ корней, лежащихъ между числами α и β, не можетъ превзойти числа утерянныхъ перемѣнъ, при переходѣ отъ α къ β, а если это число меньше, то разность между числомъ утерянныхъ перемѣнъ и числомъ дѣйствительныхъ корней будетъ всегда число четное.

Доказательство. Пусть x_1 будетъ корень m-й краткости уравненія (20), между α и β, слѣдовательно, онъ будетъ и корнемъ производныхъ до $m-1$-й включительно (§ 46), такъ что будемъ имѣть:

$$f(x_1) = 0 \quad , \quad f'(x_1) = 0 \quad , \quad f''(x_1) = 0 \quad , \; . \; . \; . \; . \; , \quad f^{(m-1)}(x_1) = 0 \tag{22}$$

и притомъ краткость его постоянно уменьшается на единицу, такъ что онъ будетъ простымъ корнемъ уравненія $f^{(m-1)}(x) = 0$. Слѣдовательно, фор-

ма членовъ предъидущаго ряда будетъ:

$$
\begin{gathered}
f(x)=(x-x_1)^m\varphi(x) \quad , \quad f'(x)=(x-x_1)^{m-1}\varphi_1 x \\
f''(x)=(x-x_1)^{m-2}\varphi_2(x) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad f^{(m-1)}(x)=(x-x_1)\varphi_{m-1}(x)
\end{gathered} \tag{23}
$$

Замѣтимъ теперь, что если m есть число четное, то при переходѣ перемѣннаго x отъ x_1-h къ x_1+h, $f(x)$ не измѣнитъ своего знака, $f'(x)$ измѣнитъ, $f''(x)$ не измѣнитъ и т. д., послѣдняя $f^{m-1}(x)$ измѣнитъ знакъ. Напротивъ, если m есть число нечетное, то будемъ имѣть тоже, но въ обратномъ порядкѣ, т. е. $f(x)$ измѣнитъ знакъ, $f'(x)$ не измѣнитъ и т. д., послѣдняя $f^{(m-1)}(x)$ измѣнитъ.

Если теперь напишемъ рядъ:

$$
f(x) \quad , \quad f'(x) \quad , \quad f''(x) \quad , \quad f'''(x) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad f^{m-1}(x) \quad , \quad f^m(x)
$$

и подставимъ въ него x_1-h, а затѣмъ x_1+h, гдѣ h есть число какъ угодно малое, и обратимъ вниманіе только на знаки, то найдемъ:

Случай 1. Число m четное.

	f	f'	f''	f'''		f^{m-1}	f^m
$x=x_1-h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	, ...	$\mp$	$\pm$
$x=x_1$	0	0	0	0	, ...	0	$\pm$
$x=x_1+h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	, ...	$\pm$	$\pm$

Знаки были поставлены соображаясь съ § 335. Изъ этой таблицы видно, что при переходѣ отъ x_1-h къ x_1+h рядъ функцій (21) потерялъ m перемѣнъ, т. е. столько, сколько уравненіе (20) имѣетъ дѣйствительныхъ корней.

Случай 2. Число m нечетное. Если составимъ такую же табличку, то выведемъ изъ нея то же заключеніе.

Изъ этого заключаемъ, что при переходѣ x-са отъ α до β рядъ функцій (20) не можетъ потерять перемѣнъ знаковъ меньше числа дѣйствительныхъ корней, лежащихъ между α и β.

Мы положили, что въ ряду (20) для значенія $x=x_1$, начиная съ $f(x)$ уничтожилось сряду m функцій; положимъ теперь, что, для значенія x_1, обращаются въ нуль нѣсколько функцій сряду въ срединѣ ряда (21). Такихъ функцій можетъ уничтожиться четное или нечетное число.

Случай 1. Пусть число уничтожившихся функцій для $x=x_1$ будетъ четное 2μ, начиная съ m-й, т. е.:

$$
f^m(x_1)=0 \quad , \quad f^{m+1}(x_1)=0 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad f^{m+2\mu-1}(x_1)=0
$$

Возьмемъ рядъ:

$$f^{m-1}(x)\ ,\ f^{m}(x)\ ,\ f^{m+1}(x)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{m+2\mu-1}(x)\ ,\ f^{m+2\mu}(x)$$

т. е. присовокупимъ къ функціямъ уничтожающимся при $x=x_1$ предъидущую $f^{m-1}(x)$ имъ и послѣдующую $f^{m+2\mu}(x)$. Подставимъ въ этотъ рядъ x_1-h и x_1+h, h взято такъ мало, чтобы въ промежуткѣ отъ x_1-h до x_1+h не было корней, прибавленныхъ къ ряду, двухъ функцій $f^{m-1}(x)$ и $f^{m+2\mu}(x)$:

	f^{m-1} ,	f^{m} ,	f^{m+1} ,	f^{m+2} ,	. . . ,	$f^{m+2\mu-1}$,	$f^{m+2\mu}$
x_1-h	$\pm$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	. .	$\pm$	$\mp$
x_1	$\pm$	0	0	0	. .	0	$\mp$
x_1-h	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	. .	$\mp$	$\mp$

или:

	f^{m-1} ,	f^{m} ,	f^{m+1} ,	f^{m+2} ,	. . . ,	$f^{m+2\mu-1}$,	$f^{m+2\mu}$
x_1-h	$\mp$	$\pm$	$\mp$	:	. .	$\mp$	$\pm$
x_1	$\mp$	0	0	.	. .	0	$\pm$
x_1+h	$\mp$	$\pm$	$\pm$	.	. .	$\pm$	$\pm$

Если сосчитаемъ число утерянныхъ перемѣнъ, то найдемъ, что ихъ, въ обоихъ случаяхъ, будетъ 2μ, т. е. число *четное*.

Случай 2. Число уничтожающихся функцій сряду есть нечетное $2\mu+1$.

Возьмемъ снова рядъ:

	f^{m-1} ,	f^{m} ,	f^{m+1} ,	. . . ,	$f^{m+2\mu}$,	$f^{m+2\mu+1}$
x_1-h	$\pm$	$\pm$	$\mp$	. . .	$\pm$	$\mp$
x_1	$\pm$	0	0	. . .	0	$\mp$
x_1+h	$\pm$	$\mp$	$\mp$	. . .	$\mp$	$\mp$

или:

	f^{m-1} ,	f^{m} ,	f^{m+1} ,	. . . ,	$f^{m+2\mu}$,	$f^{m+2\mu+1}$
x_1-h	$\mp$	$\pm$	$\mp$	. . .	$\pm$	$\mp$
x_1	$\mp$	0	0	. . .	0	$\mp$
x_1+h	$\mp$	$\mp$	$\mp$	. . .	$\mp$	$\mp$

Если сосчитаемъ число потерянныхъ перемѣнъ въ обоихъ случаяхъ, то найдемъ, что въ первомъ случаѣ ихъ есть 2μ, а во второмъ $2\mu+2$, слѣдовательно всегда число четное.

Изъ этого заключаемъ, что при переходѣ x-са отъ x_1-h до x_1+h при уничтоженіи среднихъ функцій $x=x_1$, всегда теряется четное число перемѣнъ знаковъ.

Изъ этого заключаемъ, что если x переходитъ отъ α къ β, то всякій разъ при уничтоженіи функцій ряда (21), этотъ рядъ теряетъ $\nu+2\mu$ перемѣнъ знаковъ, гдѣ ν есть число дѣйствительныхъ корней уравненія (20), лежащихъ между α и β. Это и есть предложеніе Бюдана или Фурье.

Слѣдствіе. Если уравненіе n-й степени имѣетъ ν дѣйствительныхъ корней между α и β и рядъ (21) теряетъ въ этомъ промежуткѣ $\nu+2\mu$ перемѣнъ, то уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ 2μ мнимыхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ чрезъ ν_1 и ν_2 число дѣйствительныхъ корней между $-\infty$ и α и между β и $+\infty$, пусть число потерянныхъ перемѣнъ рядомъ (21), въ этихъ промежуткахъ, будетъ $\nu_1+2\mu_1$, $\nu_2+2\mu_2$, замѣчая, что рядъ (21) для $x=-\infty$ представляетъ n перемѣнъ, а для $x=+\infty$ n повтореній, число утерянныхъ перемѣнъ въ промежуткѣ будетъ n, слѣдовательно имѣемъ:

$$n=\nu_1+2\mu_1+\nu+2\mu+\nu_2+2\mu_2$$

число мнимыхъ корней:

$$2J=n-(\nu_1+\nu+\nu_2)=2\mu_1+2\mu+2\mu_2$$

слѣдовательно:

$$J=\mu+\mu_1+\mu_2$$

откуда:

$$J \geqq \mu$$

§ 344. Можетъ случиться, что одинъ изъ предѣловъ α или β обращаетъ въ нуль нѣкоторыя изъ функцій ряда (21). Въ этомъ случаѣ вмѣсто α надобно подставить $\alpha+h$, а мѣсто β величину $\beta-h$, гдѣ h какъ угодно малое число. Новыхъ вычисленій при подстановленіи $\alpha+h$ или $\beta-h$ не требуется, такъ какъ если при $x=\alpha$ рядъ функцій уничтожается, то для $x+h$ эти функціи будутъ представлять повтореніе знаковъ. Если же рядъ функцій уничтожается для $x=\beta$, то при $x=\beta-h$ онѣ представляютъ только перемѣны.

§ 345. *Правило Гюа* (Gua) *для опредѣленія числа мнимыхъ корней.* Если въ уравненіи отсутствуетъ сряду $2m$ членовъ, то уравненіе имѣетъ $2m$ мнимыхъ корня; а если отсутствуетъ сряду $2m+1$ членовъ, то уравненіе имѣетъ или $2m+2$ или $2m$ мнимыхъ корня, смотря потому будутъ ли смежные члены съ отсутствующими, имѣть одинаковые знаки или раз-

личные. Это правило вытекаетъ изъ предложенія Бюдана, разсматривая число потерянныхъ перемѣнъ знаковъ при переходѣ x отъ $-h$ до $+h$, гдѣ h есть безконечно малое положительное число.

§ 346. *Правило Декарта.* Число положительныхъ корней уравненія не можетъ превзойти числа перемѣнъ знаковъ въ уравненіи, а число отрицательныхъ корней не можетъ превзойти числа повтореній знаковъ; и если всѣ корни дѣйствительны, то число положительныхъ корней равно числу перемѣнъ знаковъ, а число отрицательныхъ корней равно числу повтореній знаковъ.

Доказательство. Если сосѣдніе члены уравненія имѣютъ разные знаки, то это называется перемѣною знаковъ, а если они имѣютъ одинаковые знаки, то такое расположеніе называется повтореніемъ знаковъ. Число всѣхъ перемѣнъ и повтореній знаковъ уравненія, очевидно, равно степени уравненія. Напримѣръ:

$$+x^6-5x^5-3x^4+x^3-8x^2+2x+1=0$$

здѣсь четыре перемѣны и два повторенія.

Если въ теоремѣ Бюдана возьмемъ за предѣлы 0 и $+\infty$, то число утерянныхъ перемѣнъ будетъ $\nu_1+2\mu$, гдѣ ν_1 есть число положительныхъ корней уравненія. Но при $x=0$ рядъ (21) имѣетъ знаки членовъ даннаго уравненія, а при $x=+\infty$ всѣ члены ряда (21) будутъ положительные, откуда имѣемъ первую часть предложенія Декарта.

Вторая часть слѣдуетъ изъ того, что если преобразуемъ уравненіе подстановленіемъ вмѣсто x величины $-x$, то перемѣны знаковъ уравненія переходятъ въ повторенія, а повторенія въ перемѣны. Откуда слѣдуетъ вторая часть теоремы Декарта. Очевидно теперь, что и третья часть имѣетъ мѣсто, такъ какъ число повтореній и перемѣнъ равно числу положительныхъ и отрицательныхъ корней.

ГЛАВА XXIII.

Выдѣленіе корней съ помощью предложенія Фурье.

§ 347. Пусть данное уравненіе n-й степени будетъ:

$$f(x) = 0$$

Возьмемъ такую функцію:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (1)$$

то ея производная будетъ (§ 27):

$$\varphi'(x) = \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} \qquad (2)$$

изъ этого заключаемъ, что $\varphi(x)$ будетъ возрастать съ возрастаніемъ перемѣннаго и убывать съ его убываніемъ если $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинаковые знаки, и будетъ возрастать съ убываніемъ перемѣннаго и убывать съ возрастаніемъ его, если $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ противные знаки (§ 41).

§ 348. *Предложеніе.* Если уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между α и β, $\alpha < \beta$, но не больше двухъ, а $f''(x)$ не имѣетъ между тѣми же предѣлами ни одного корня, то всегда имѣемъ:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < \beta - \alpha \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 будутъ эти два корня между α и β, $x_1 < x_2$, то по теоремѣ Роля между x_1 и x_2 будетъ одинъ корень функціи $f(x) = 0$, который назовемъ чрезъ x'. Изъ § 335 знаемъ, что отношенія:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{и} \quad \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

будутъ отрицательныя, когда x возрастаетъ отъ α до x', а положительныя отъ x_2 до β. Слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинаковые знаки, поэтому функція:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

возрастаетъ. Откуда:

$$\varphi(\alpha) < \varphi(x_1) = x_1 \quad , \quad \varphi(x_2) = x_2 < \varphi(\beta)$$

слѣдовательно, тѣмъ болѣе:

$$\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$$

или:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < \beta - \alpha$$

что и требовалось доказать.

§ 349. *Предложеніе*. Если уравненіе $f'(x) = 0$ имѣетъ только одинъ корень x_1 между α и β, а $f(x)$ и $f''(x)$ не имѣетъ ни одного корня между тѣми же предѣлами и кромѣ этого, если $f(x)$ и $f''(x)$ для всѣхъ значеній x-са между α и β имѣютъ одинаковые знаки, то неравенство:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < \beta - \alpha \tag{4}$$

можетъ имѣть мѣсто, но оно перестанетъ существовать, если увеличимъ α или уменьшимъ β на нѣкоторое число.

Доказательство. Изъ положенія слѣдуетъ, что $\varphi(x)$ возрастаетъ, когда x возрастаетъ отъ α до x_1 или отъ x_1 до β. Откуда слѣдуетъ, что если x будетъ убывать отъ β до x_1, то функція $\varphi(\alpha)-\varphi(x)$ будетъ возрастать отъ $\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)$ до $+\infty$. Точно также, если x будетъ возрастать отъ α до x_1, то функція $\varphi(x)-\varphi(\beta)$ будетъ возрастать отъ $\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)$ до $+\infty$. Слѣдовательно, если α' и β' суть числа между α и x_1, x_1 и β, взятыя достаточно близко къ x_1, то будемъ имѣть:

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\beta') > 0 \quad , \quad \varphi(\alpha') - \varphi(\beta) > 0$$

т. е.:

$$\frac{f(\beta')}{f'(\beta')} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} > \beta' - \alpha \quad , \quad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')} > \beta - \alpha'$$

§ 350. Пусть будетъ дано уравненіе $f(x) = 0$ n-й степени. Возьмемъ рядъ Фурье:

$$f(x) \quad , \quad f'(x) \quad , \quad f''(x) \quad , \quad . \; . \; . \; . \quad , \quad f^{n-1}(x) \quad , \quad f^{n}(x) \tag{5}$$

Чтобы выдѣлить корни подставимъ вмѣсто x рядъ возрастающихъ чиселъ, между предѣлами, напередъ опредѣленными, корней. Пусть этотъ рядъ будетъ:

$$\alpha \; , \; \beta \; , \; \gamma \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; \omega$$

Если въ промежуткѣ отъ α до β рядъ (5) не теряетъ ни одной перемѣны знаковъ, то данное уравненіе между числами α и β не имѣетъ ни одного дѣйствительнаго корня. Если рядъ (5) потерялъ между α и β одну перемѣну, то данное уравненіе имѣетъ между α и β одинъ только дѣйствительный корень.

Если въ промежуткѣ отъ α до β рядъ (5) потеряетъ двѣ перемѣны, то можетъ случиться, что $f(x)=0$ имѣетъ между α и β два корня или ни одного; въ этомъ послѣднемъ случаѣ, уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ необходимо два мнимыхъ корня. Посмотримъ, какъ отличить одинъ изъ этихъ случаевъ отъ другаго. Если потеря двухъ перемѣнъ окажется въ ряду (5) въ первыхъ трехъ членахъ его:

$$f(x) \quad , \quad f'(x) \quad , \quad f''(x) \tag{6}$$

то расположеніе знаковъ возможно для этого только слѣдующее:

	f	f'	f''		f	f'	f''
α	+	−	+	или	−	+	−
β	+	+	+		−	−	−
	2	1	0		2	1	0

Изъ нашего предположенія слѣдуетъ, что уравненіе $f''(x)=0$ не имѣетъ ни одного корня между α и β. Слѣдовательно, если найдемъ (§ 349), что:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \geqq \beta-\alpha$$

то уравненіе $f(x)=0$ не имѣетъ ни одного дѣйствительнаго корня между α и β. Если предъидущее неравенство не имѣетъ мѣста, то надобно подставить въ рядъ (6) число α', лежащее между α и β. Если $f(\alpha')$ имѣетъ противные знаки съ $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, то между α и β есть два дѣйствительныхъ корня, одинъ между α и α', другой между α' и β. Но если $f(\alpha')$ имѣетъ одинаковые знаки, то подставивъ въ рядъ (6) вмѣсто x величину α', увидимъ въ которомъ изъ промежутковъ α и α' или α' и β теряется двѣ перемѣны. Къ этому новому промежутку приложимъ то же, что и къ промежутку α и β и послѣ нѣсколькихъ такихъ пробъ узнаемъ рядъ корней, т. е. или ихъ выдѣлимъ, или они будутъ мнимые. Замѣтимъ, что если бы такая проба продолжалась неопредѣленно, не давая признака (3), и корни не раздѣлились-бы, то можно предположить, что $f(x)$ и $f'(x)$ имѣютъ общій корень, т. е. $f(x)$ имѣетъ двукратный корень между α и β. Въ этомъ случаѣ необходимо убѣдиться есть-ли кратные корни въ уравненіи $f(x)=0$,

§ 357. Возьмемъ опять рядъ Фурье и подставимъ два числа α и β:

	f	f'	f''	$\ldots$	$f^{(n-6)}$	$f^{(n-5)}$	$f^{(n-4)}$	$f^{(n-3)}$	$f^{(n-2)}$	$f^{(n-1)}$	$f^{(n)}$	
α	$+$	$-$	$-$	$\ldots$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	(a)
β	$+$	$+$	.	$\ldots$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
	Δ_0	Δ_1			3	3	2	2	1	1	0	

Числа подъ чертою показываютъ сколько утеряно перемѣнъ рядомъ до той функціи, подъ которой число стоитъ, начиная съ послѣдней $f^{(n)}$, которая есть всегда число положительное. Числа эти Фурье назвалъ *индексами.*

Каждый изъ этихъ индексовъ показываетъ сколько та функція, подъ которой онъ стоитъ, можетъ имѣть дѣйствительныхъ корней между α и β. Функція $f^{(n-1)}(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень, $f^{(n-2)}(x)$ также одинъ дѣйствительный корень, $f^{(n-3)}(x)$ можетъ имѣть два дѣйствительныхъ или два мнимыхъ, также точно и функція $f^{(n-4)}(x)$, функція $f^{(n-5)}(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень, но можетъ имѣть и три и т. д., наконецъ сама функція $f(x)$, если индексъ Δ_0 есть число нечетное, имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень, а можетъ ихъ имѣть и Δ_0; если же Δ_0 число четное, то $f(x)$ можетъ имѣть и не имѣть дѣйствительныхъ корней.

Какимъ образомъ выдѣлить эти корни и показать, сколько есть дѣйствительныхъ корней между α и β?

Возьмемъ въ таблицѣ (a) послѣднія четыре функціи:

	$f^{(n-3)}$	$f^{(n-2)}$	$f^{(n-1)}$	$f^{(n)}$
α	$+$	$-$	$-$	$+$
β	$+$	$+$	$+$	$+$
	2	1	1	0

Такъ какъ $f^{(n-1)}(x)$ первой степени, то можно сейчасъ найти ея корень. Найдя этотъ корень, подвинемъ одинъ изъ предѣловъ α или β такъ, чтобы найденный корень вышелъ изъ промежутка α и β, тогда индексъ единица подъ $f^{(n-1)}(x)$ сдѣлается нулемъ. При этомъ можетъ случиться:

1. Что и индексъ подъ $f^{(n-2)}(x)$ сдѣлается нулемъ, а индексъ подъ $f^{(n-3)}(x)$ сдѣлается единицей. Откуда мы заключимъ, что эта функція имѣетъ два дѣйствительныхъ корня и одинъ изъ нихъ выдѣленъ новыми предѣлами.

2. Можетъ случиться, что индексъ $f^{(n-1)}(x)$ сдѣлается нулемъ, а индексъ у $f^{(n-2)}(x)$ и $f^{(n-3)}(x)$ остаются тѣ-же, т. е. 1 и 2. Слѣдовательно, эти три функціи должны представлять таблицу:

	f^{n-3}	f^{n-2}	f^{n-3}		f^{n-3}	f^{n-2}	f^{n-1}
α	+	—	+	или	—	+	—
β	+	+	+		—	—	—
	2	1	0		2	1	0

Чтобы судить какіе два корня имѣетъ функція $f^{(n-3)}$ надобно къ ней приложить признакъ (§§ 348, 349).

Если:

$$\frac{f^{(n-3)}(\beta)}{f^{(n-2)}(\beta)} - \frac{f^{(n-3)}(\alpha)}{f^{(n-2)}(\alpha)} \overline{>} \beta - \alpha \qquad (b)$$

то оба корня $f^{(n-3)}$ будутъ мнимые, если найдемъ противное неравенство, то надобно еще сблизить предѣлы. И эту операцію продолжать до тѣхъ поръ, пока окажется что корни функціи $f^{(n-3)}(x)$ мнимые или индексъ 2 сдѣлается единицей, т. е. корни выдѣлятся. Если корни не выдѣляются, а неравенство (b) не получается, то надобно удостовѣриться не имѣетъ-ли функція $f^{(n-3)}(x)$ и $f^{(n-2)}(x)$ равныхъ корней.

Если получимъ неравенство (b), то функція $f^{(n-3)}$ имѣетъ два мнимыхъ корня, а слѣдовательно и всѣ предшествующія функціи въ ряду (a) имѣютъ по два мнимыхъ корня, такъ какъ каждый индексъ показываетъ ничто иное какъ высшій предѣлъ числа дѣйствительныхъ корней, которое можетъ имѣть уравненіе въ разсматриваемомъ промежуткѣ. Вычитая индексъ 2 изъ всѣхъ предшествовавшихъ ему индексовъ, индексы 0 и 1 подвинемъ влѣво. Съ полученными индексами мы сдѣлаемъ ту же операцію, пока не дойдемъ до того, что послѣдняя функція слѣва, т. е. $f(x)$ будетъ имѣть индексъ 1, а слѣдовательно между сдвинутыми предѣлами функція $f(x)$ будетъ имѣть одинъ дѣйствительный корень или что индексы функцій f, f', f'' будутъ:

$$2 \;,\; 1 \;,\; 0$$

Слѣдовательно функція $f(x)$ будетъ имѣть или два мнимыхъ корня, или два дѣйствительныхъ. Если получимъ, для сдвинутыхъ предѣловъ, неравенство:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \overline{>} \beta - \alpha$$

то корни будутъ мнимые, а если неравенство будетъ противное, то надо еще сблизить предѣлы пока корни не окажутся мнимыми или выдѣлятся,

Пояснимъ это примѣрами.

Примѣръ 1. Пусть будетъ дано уравненіе:

$$f(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

то будемъ имѣть:

$$f'(x) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$\frac{1}{1.2} f''(x) = 15x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 3x + 1$$

$$\frac{1}{1.2.3} f'''(x) = 20x^3 + 10x^2 - 4x - 1$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} f^{IV}(x) = 15x^2 + 5x - 1$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} f^{V}(x) = 6x + 1$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} f^{VI}(x) = 1$$

Предѣлы дѣйствительныхъ корней уравненія $f(x) = 0$ суть -1 и $+1$. Подставимъ въ рядъ предъидущихъ функцій значенія:

$$-1 \;,\; -\frac{1}{2} \;,\; 0 \;,\; +\frac{1}{2} \;,\; +1$$

то найдемъ:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
-1	+	−	+	−	+	−	+
$-\frac{1}{2}$	+	−	+	+	+	−	+
0	+	−	+	−	−	+	+
$+\frac{1}{2}$	+	−	+	+	+	+	+
$+1$	+	+	+	+	+	+	+

Изъ этой таблицы видимъ, что между -1 и $-\frac{1}{2}$ утеряно двѣ перемѣны, между $-\frac{1}{2}$ и 0 не утеряно ни одной, между 0 и $+\frac{1}{2}$ утеряно двѣ, и наконецъ между $+\frac{1}{2}$ и $+1$ утеряно также двѣ перемѣны.

Разсматривая индексы между $+\frac{1}{2}$ и $+1$ найдемъ:

f	f'	f''	…
2	1	0	0 …

Слѣдовательно $f(x)$ можетъ имѣть или два дѣйствительныхъ корня или два

мнимыхъ; приложимъ признакъ (3) (§ 349):

$$f(1)=1 \quad , \quad f'(1)=5 \quad ; \quad f(\tfrac{1}{2})=\frac{39}{64} \quad , \quad f'(\tfrac{1}{2})=-\frac{48}{64}$$

эти числа даютъ:

$$\frac{f(1)}{f'(1)}-\frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

слѣдовательно оба корня мнимые; и такъ между предѣлами $+1$ и $+\frac{1}{2}$ дѣйствительныхъ корней нѣтъ.

Въ промежуткѣ 0 и $\frac{1}{2}$ индексы суть:

$$\begin{array}{ccccccc} f & f' & f'' & f''' & f^{IV} & f^{V} & f^{VI} \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

справа 3-й и 4-й индексы суть единицы, слѣдовательно необходимо сблизить предѣлы. Подставимъ $\frac{1}{4}$, знаки ряда будутъ:

$$\begin{array}{ccccccc} f & f' & f'' & f''' & f^{IV} & f^{V} & f^{VI} \\ + & - & + & - & + & + & + \end{array}$$

слѣдовательно, между 0 и $\frac{1}{4}$ не утерялась ни одна перемѣна, а между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ рядъ индексовъ сдѣлался:

$$\begin{array}{ccccccc} f & f' & f'' & f''' & f^{IV} & f^{V} & f^{VI} \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Слѣдовательно, функція $f'''(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$, а $f''(x)$ можетъ имѣть или два дѣйствительныхъ или два мнимыхъ корня, такъ какъ въ этомъ случаѣ индексы функціи $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ суть 2, 1, 0, то къ нимъ можно приложить признакъ (4) (§ 349):

$$f''(\tfrac{1}{4})=\frac{13}{128} \quad , \quad f'''(\tfrac{1}{4})=-\frac{51}{8} \quad ; \quad f''(\tfrac{1}{2})=\frac{3}{8} \quad , \quad f'''(\tfrac{1}{2})=12$$

откуда:

$$\frac{f''(\frac{1}{4})}{f'''(\frac{1}{4})}-\frac{f''(\frac{1}{2})}{f'''(\frac{1}{2})}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Изъ этого заключаемъ, что оба корня функціи $f''(x)$ мнимые, слѣдовательно и $f(x)$ въ этомъ промежуткѣ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней.

Наконецъ, въ промежуткѣ -1 и $-\frac{1}{2}$ рядъ индексовъ есть:

f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
2	2	2	1	0	0	0

Слѣдовательно, надобно приложить къ функціямъ $f''(x)$ и $f'''(x)$ признакъ (3). Мы имѣемъ:

$$f''(-1)=6 \quad , \quad f'''(-1)=-42 \quad ; \quad f''(-\tfrac{1}{2})=\frac{31}{8} \quad , \quad f'''(-\tfrac{1}{2})=6$$

откуда:

$$\frac{f''(-\frac{1}{2})}{f'''(-\frac{1}{2})}-\frac{f''(-1)}{f'''(-1)}>-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

Изъ этого видимъ, что $f''(x)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней въ промежуткѣ $-\frac{1}{2}$ и -1, а слѣдовательно и $f(x)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней въ этомъ промежуткѣ. Изъ всего сказаннаго видно, что всѣ шесть корней предложеннаго уравненія суть мнимые.

Примѣръ 2. Возьмемъ еще уравненіе:

$$f(x)=x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012=0$$

откуда:

$$\frac{1}{1}f'(x)=6x^5-60x^4+240x^3+246x+4567$$

$$\frac{1}{1.2}f''(x)=15x^4-120x^3+360x^2+123$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=20x^3-120x^2+240x$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}f^{IV}(x)=15x^2-60x+60$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5}f^{V}(x)=6x-12$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6}f^{VI}(x)=1$$

Подставимъ въ рядъ функцій Фурье слѣдующія числа:

$$\ldots \quad -10 \quad , \quad -1 \quad , \quad -h \quad , \quad +h \quad , \quad +1 \quad , \quad +10$$

гдѣ h какъ угодно малое, мы найдемъ:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
-10	+	—	+	—	+	—	+
-1	—	—	+	—	+	—	+
$-h$	—	+	+	—	+	—	+
$+h$	—	+	+	+	+	—	+
$+1$	—	+	+	+	+	—	+
$+10$	+	+	+	+	+	+	+

Такъ какъ въ промежуткѣ -10 и $+10$ утеряно шесть перемѣнъ, то всѣ дѣйствительные корни уравненія находятся въ этомъ промежуткѣ.

Въ промежуткѣ -10 и -1 утеряна одна перемѣна, слѣдовательно въ этомъ промежуткѣ данное уравненіе имѣетъ одинъ дѣйствительный корень.

Въ промежуткѣ $-h$ и $+h$ утеряно двѣ перемѣны, а такъ какъ h есть количество, какъ угодно малое, произвольное, то уравненіе имѣетъ два мнимыхъ корня.

Наконецъ въ промежуткѣ $+1$ и $+10$ рядъ индексовъ есть:

f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
3	2	2	2	2	1	0

Примѣнимъ признакъ (3) къ f^{IV}, f^{V}, f^{VI}, то найдемъ:

$$\frac{f^{IV}(10)}{f^{V}(10)} - \frac{f^{IV}(1)}{f^{V}(1)} < 10 - 1 = 9$$

слѣдовательно надобно сблизить предѣлы 1 и 10. Но прежде чѣмъ сблизить эти предѣлы, надобно убѣдиться не имѣетъ-ли функція $f^{IV}(x)$ двухъ равныхъ корней между 1 и 10. И въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что $x-2$ дѣлитъ и $f^{IV}(x)$ и $f^{V}(x)$, но онъ не дѣлитъ $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$. Слѣдовательно, можно вычесть 2 изъ ряда предъидущихъ индексовъ, послѣ чего рядъ индексовъ сдѣлается:

$$1 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 1 \;,\; 0$$

а это показываетъ, что $f(x)$ имѣетъ въ промежуткѣ 1 и 10 одинъ дѣйствительный корень.

И такъ предложенное уравненіе имѣетъ только два дѣйствительныхъ корня: одинъ между -1 и -10, а другой между $+1$ и $+10$.

Пріемъ этотъ предложенъ былъ французскимъ математикомъ *Фурье* (Fourier, 1760—1830 гг.).

ГЛАВА XXIV.

Вычисленіе корней по приближенію.

§ 359. *Способъ Ньютона.* Когда съ помощью выше изложенныхъ способовъ дѣйствительные корни выдѣлены, т. е. найдены для каждаго изъ корней два числа, между которыми онъ находится, то остается только найти его приближенную величину. Вотъ для этого способъ предложенный Ньютономъ.

Пусть:

$$f(x) = 0$$

будетъ уравненіе n-й степени. Положимъ что мы выдѣлили одинъ изъ его корней и нашли что онъ лежитъ между числами α и β, гдѣ $\alpha < \beta$. Каждое изъ этихъ чиселъ можемъ принять за первую приближенную величину, если промежутокъ $\beta - \alpha$ достаточно сближенъ, т. е. если промежутокъ есть правильная дробь.

Если означимъ чрезъ x_1 точную величину корня, то можемъ положить $x_1 = \alpha + h$, гдѣ $h < \beta - \alpha$. Подставимъ въ $f(x)$ корень x_1, то найдемъ:

$$f(x_1) = 0 = f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha) + \ . \ . \ .$$

откуда:

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{h^2}{1.2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \ . \ . \ .$$

Если въ первомъ приближеніи отбросимъ степени h, то будемъ имѣть:

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

слѣдовательно второе приближеніе корня будетъ:

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha_1$$

Поступая съ этимъ новымъ приближеніемъ такъ же, какъ поступали съ первымъ α, найдемъ третье приближеніе:

$$\alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = \alpha_2$$

и т. д.

Мы могли бы принять за первое приближеніе корня бо́льшій предѣлъ β. Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть $x_1 = \beta - h$, подставляя найдемъ:

$$f(x) = 0 = f(\beta - h) = f(\beta) - hf'(\beta) + \frac{h^2}{1.2} f''(\beta) - \dots.$$

откуда, отбрасывая въ первомъ приближеніи степени h, найдемъ:

$$h = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

слѣдовательно второе приближеніе корня будетъ:

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \beta_1$$

Казалось бы что такимъ образомъ вычисляя корень къ нему приближаемся съ обоихъ предѣловъ, но это не такъ: предѣлъ β_1 можетъ сдѣлаться меньше корня, а α_1 больше его и въ каждомъ приближеніи приходится дѣлать провѣрку, чтобы быть увѣреннымъ, что мы приближаемся къ корню.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе:

$$f(x) = x^5 - 6x - 10 = 0$$

$$f'(x) = 5x^4 - 6$$

Выдѣляя корни найдемъ, что одинъ изъ нихъ лежитъ между 1,8 и 1,9. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ $\alpha = 1{,}8$, $\beta = 1{,}9$, $\alpha - \beta = 0{,}1$. Въ первомъ приближеніи:

$$h = -\frac{f(1{,}8)}{f'(1{,}8)} = -\frac{-1{,}904}{46{,}488} = 0{,}04$$

слѣдовательно $\alpha_1 = 1{,}8 + 0{,}04 = 1{,}84$. Чтобы видѣть, гдѣ лежитъ корень между 1,83 и 1,84 или между 1,84 и 1,85, надобно подставить эти числа въ $f(x)$; это подстановленіе даетъ:

$$f(1{,}84) = +0{,}0506 \quad , \quad f(1{,}83) = -0{,}4563$$

такъ какъ результаты съ противными знаками, то корень находится между 1,83 и 1,84.

Изъ этого видимъ, что въ первомъ приближеніи мы перешли черезъ корень, хотя казалось, что къ нему, начиная отъ 1,8 приблизились съ той же стороны. Слѣдовательно новые предѣлы суть $\alpha_1 = 1{,}83$, $\beta_1 = 1{,}84$. Поступая съ ними какъ выше найдемъ, исходя изъ β_1:

$$h = -\frac{f(1{,}84)}{f'(1{,}84)} = -\frac{0{,}0506}{51{,}3114} = -0{,}00099$$

слѣдовательно:

$$\alpha_2 = 1{,}84 - 0{,}00099 = 1{,}83901$$

провѣряя найдемъ:

$$f(1{,}83901) = -0{,}00013 \quad , \quad f(1{,}83902) = 0{,}00043$$

слѣдовательно корень лежитъ между 1,83901 и 1,83902. Начиная новое приближеніе съ 1,83901, найдемъ еще:

$$h = -\frac{f(1{,}83901)}{f'(1{,}83901)} = -\frac{-0{,}00013}{51{,}18820} = 0{,}0000025$$

откуда:

$$\alpha_3 = 1{,}8390125$$

вѣрно до седьмой десятичной цифры.

§ 353. *Способъ Ньютона, исправленный Фурье.* Таковъ пріемъ Ньютона, недостатокъ котораго состоитъ въ томъ, что каждый разъ необходимо дѣлать провѣрку. Слѣдующій методъ даетъ возможность устранить каждый разъ необходимую провѣрку. Въ немъ мы приближаемся къ корню съ обѣихъ сторонъ и такимъ образомъ имѣемъ всегда предѣлъ погрѣшности, принимая извѣстное приближеніе за корень. Пріемъ этотъ былъ предложенъ Фурье.

Пусть α и β суть числа, между которыми находится одинъ только корень x_1 уравненія:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Мы полагаемъ, что это уравненіе не имѣетъ равныхъ корней и кромѣ того, что $f'(x)$ и $f''(x)$ между предѣлами α и β не имѣютъ корней, въ противномъ случаѣ надобно сблизить предѣлы α и β такъ, чтобы изъ нихъ выключить корни функцій $f'(x)$ и $f''(x)$. Это условіе будетъ выполнено, если при выдѣленіи корня по методу Фурье предѣлы были такъ сближены, что

дали рядъ индексовъ:

$$\begin{matrix} f & , & f' & , & f'' \\ 1 & & 0 & & 0 \end{matrix}$$

Въ этомъ предположеніи функція $f(x)$ перемѣняетъ знакъ только одинъ разъ при переходѣ x-са отъ α до β, а $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняютъ одинъ и тотъ же знакъ.

Возьмемъ функцію:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2}$$

которая какъ мы видѣли въ § 347 будетъ возрастать или убывать, смотря по тому будутъ-ли $f(x)$ и $f''(x)$ имѣть одинаковые знаки или различные.

Если $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинъ знакъ при $x = \alpha$, то функція $\varphi(x)$ будетъ возрастать отъ $x = \alpha$ до $x = x_1$ и будетъ убывать отъ $x = x_1$ до $x = \beta$, слѣдовательно наибольшее значеніе функціи $\varphi(x)$ будетъ $\varphi(x_1) = x_1$. Слѣдовательно:

$$x_1 > \varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad x_1 > \varphi(\beta)$$

или:

$$x_1 > \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad \text{и} \quad x_1 > \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \tag{3}$$

Если напротивъ $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ противные знаки для $x = \alpha$, то $\varphi(x)$ будетъ убывать отъ $x = \alpha$ до $x = x_1$ и возрастать отъ $x = x_1$ до $x = \beta$, такъ что $\varphi(x_1) = x_1$ будетъ наименьшее значеніе, слѣдовательно:

$$x_1 < \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad , \quad x_1 < \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \tag{4}$$

Изъ этого видимъ, что вычисляя корни по методу Ньютона, принимая одинъ или другой предѣлъ за первое приближеніе, мы въ обоихъ случаяхъ найдемъ вторыя приближенія, которыя оба будутъ или меньше или больше корня, а слѣдовательно дадутъ только одинъ предѣлъ.

Чтобы имѣть и другой предѣлъ большій или меньшій, возьмемъ функцію:

$$\psi(x) = \varphi(x) - M(x - x_1)^2 \tag{5}$$

гдѣ M есть число съ знакомъ отношенія $\frac{f''(x)}{f'(x)}$ и коего абсолютная величина равна по крайней мѣрѣ половинѣ наибольшаго числоваго значенія, которое получаетъ отношеніе $\frac{f''(x)}{f'(x)}$ между предѣлами α и β. Въ этомъ

предположеніи можемъ написать:

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 2M\theta \tag{6}$$

гдѣ $\theta < 1$. Для значеній x-са между α и β можно положить:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = A(x-x_1) \tag{7}$$

Взявъ производную функціи (5), найдемъ:

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - 2M(x-x_1) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} - 2M(x-x_1)$$

или соображаясь съ (6) и (7):

$$\psi'(x) = -2M(1-A\theta)(x-x_1)$$

Функція $\psi(x)$ будетъ возрастать или убывать между предѣлами α и β, смотря по тому будетъ-ли $\psi'(x)$ величина положительная или отрицательная.

Если $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинаковые знаки при $x=\alpha$, то $\varphi(x) < x_1$, какъ выше видѣли (3), для всѣхъ значеній x между α и x_1, это неравенство влечетъ за собою неравенство $A < 1$; по въ настоящемъ случаѣ M есть величина отрицательная, такъ какъ $f'(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ различные знаки при $x=\alpha$. Слѣдовательно $\psi'(x)$ есть величина отрицательная, откуда:

$$\psi(x_1) < \psi(\alpha)$$

или

$$x_1 < \psi(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - M(\alpha - x_1)^2$$

$M < 0$, если поэтому x_1 замѣнимъ чрезъ β, то тѣмъ болѣе будемъ имѣть:

$$x_1 < \alpha - \frac{f(\alpha)}{f''(\alpha)} - M(\beta-\alpha)^2$$

Итакъ въ этомъ случаѣ корень x_1 будетъ заключатся между предѣлами:

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < x_1 < \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - M(\beta-\alpha)^2$$

и погрѣшность принимая за корень выраженіе:

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

будетъ меньше $M(\beta-\alpha)^2$.

Если $f(x)$ и $f''(x)$ при $x=\alpha$ имѣютъ противные знаки, то они будутъ при $x=\beta$ имѣть одинаковые знаки и будемъ, въ этомъ случаѣ, имѣть для x между x_1 и β:

$$\varphi(x) > x_1$$

что влечетъ неравенство $A < 1$. Но въ настоящемъ случаѣ M есть величина положительная, слѣдовательно $\psi'(x)$ есть величина отрицательная и $\varphi(x)$ есть убывающая функція. Слѣдовательно имѣемъ:

$$\psi(x_1) = x_1 > \psi(\beta)$$

или:

$$x_1 > \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - M(\beta-\alpha)^2$$

гдѣ x_1 замѣстили чрезъ β. И такъ въ этомъ случаѣ корень x_1 находится между:

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - M(\beta-\alpha)^2 < x_1 < \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Откуда вытекаетъ слѣдующее правило:

Пусть α и β, $\alpha<\beta$ два числа, между которыми лежитъ одинъ только корень уравненія $f(x)=0$ и ни одного корня уравненій $f'(x)=0$, $f''(x)=0$; $2M$ есть число, имѣющее знакъ отношенія $\frac{f''(x)}{f'(x)}$, а числовая величина равна наибольшей абсолютной величинѣ этого отношенія между α и β. Если чрезъ α_1 мы означимъ тотъ изъ предѣловъ α или β, для котораго $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинаковые знаки, а чрезъ β тотъ, для котораго $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ разные знаки, то будемъ имѣть новые предѣлы корня:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \quad , \quad \beta_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} - M(\beta_1-\alpha_1)^2$$

изъ коихъ первый предѣлъ есть именно Ньютона.

За число M можно взять частное отъ дѣленія большаго изъ чиселъ $\frac{1}{2}f(\alpha_1)$, $\frac{1}{2}f''(\beta_1)$ на меньшее изъ чиселъ $f'(\alpha_1)$, $f'(\beta_1)$. Число M, такимъ образомъ опредѣленное, должно быть меньше единицы, въ противномъ случаѣ надобно сблизить предѣлы корня. Положимъ, что M заключается между $\frac{1}{10^{k-1}}$ и $\frac{1}{10^k}$, число k положительное, нуль или отрицательное. Пусть $\frac{1}{10^m}$ есть разность предѣловъ первоначальныхъ α и β, т. е. $\beta-\alpha=\frac{1}{10^m}$.

Съ помощью новыхъ предѣловъ α_1 и β_1 мы вычислимъ вторые α_2 и β_2 и т. д. Если положимъ:

$$\alpha_\mu - \beta_\mu = \pm \varepsilon_\mu$$

такъ что если ε_μ есть абсолютная величина разности предѣловъ α_μ и β_μ, то будемъ имѣть:

$$\varepsilon = \frac{1}{10^m} \quad , \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{10^{2m+k}} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{10^{4m+3k}} \quad , \quad . \quad . \quad .$$

откуда ясно видимъ законъ послѣдовательныхъ приближеній.

Примѣръ. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

это уравненіе имѣетъ одинъ положительный корень, который заключается между 2 и 2,1. Взявъ производныя, получимъ:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad , \quad \tfrac{1}{2}f''(x) = 3x$$

функціи $f(x)$ и $f''(x)$ при $x = 2,1$ обѣ положительныя. Слѣдовательно, по правилу выше изложенному, мы должны взять:

$$\alpha = 2,1 \quad , \quad \beta = 2$$

число M, найденное какъ сказано выше, есть 0,6.

Слѣдовательно, новые предѣлы будутъ:

$$\alpha_1 = 2,1 - \frac{0,061}{11,23} \quad , \quad \beta_1 = \alpha_1 - 0,006$$

Можно положить:

$$\alpha_1 = 2,095$$

откуда:

$$\alpha_2 = 2,095 - \frac{0,005007375}{11,167075} \quad , \quad \beta_2 = \alpha_2 - 0,000022$$

останавливаясь на пятой десятичной цифрѣ, можно взять:

$$\alpha_2 = 2,09456$$

откуда:

$$\alpha_3 = 2,09456 - \frac{0,0001150686690816}{11,1615447808}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - 0,0000000003$$

при предъидущемъ дѣленіи можно разсчитывать на девять десятичныхъ цифръ, слѣдовательно, искомый корень будетъ:

$$x_1 = 2{,}094551481$$

вѣрно до одной единицы девятаго порядка съ недостаткомъ.

Примѣръ. Найти отрицательный корень уравненія:

$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$$

до 7-й десятичной цифры.

Отвѣтъ:

$$-3{,}9073785$$

§ 355. *Способъ Горнера.* Этотъ способъ прилагается одинаково къ вычисленію корней соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ. Цыфры корня получаются одна за другою, сначала цѣлая часть, а потомъ десятичная, пока они не окончатся если корень соизмѣримый, или вычисляется до извѣстнаго приближенія если корень несоизмѣримый. Этотъ способъ похожъ на процессъ извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней и въ этихъ частныхъ случаяхъ совпадаетъ съ ними.

§ 356. Вотъ въ чемъ состоитъ способъ Горнера.

Пусть будетъ данное уравненіе съ числовыми цѣлыми коэфиціентами:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ . \ . \ . + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

положимъ, что неизвѣстный его корень есть число $x = 375, 284$. Разыскивая предѣлы (§ 328—332) корней, найдемъ, что корень заключается между 300 и 400. Изъ этого видимъ, что коренъ состоитъ изъ сотенъ, десятковъ, единицъ, десятыхъ, сотыхъ и т. д. и что цыфра сотенъ есть 3.

Преобразуемъ уравненіе (1) въ другое, котораго корни были-бы на 300 меньше корней уравненія (1). Такое преобразованіе (§ 327) даетъ уравненіе:

$$f_1(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ . \ . \ . + b_{n-1}x + b_n = 0 \qquad (2)$$

коего одинъ изъ корней будетъ 75,284. Предѣлы этого корня будутъ, очевидно, 0 и 100, сближая которые такъ, чтобы корень находился между двумя послѣдовательными десятками, найдемъ 70 и 80. Слѣдовательно десятки корня или его вторая цифра есть 7.

Преобразуемъ уравненіе (2) въ другое, котораго корни были-бы на 70 меньше корней уравненія (2). Пусть это уравненіе будетъ:

$$f_2(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n = 0 \qquad (3)$$

корень этого уравненія будетъ 5,284 и заключается между предѣлами 0 и 10, сближая которые такъ чтобы корень находился между двумя послѣдовательными единицами, найдемъ 5 и 6. Слѣдовательно третья цифра корня или его единицы будетъ 5.

Преобразуемъ снова уравненіе (3) въ другое, котораго корни былибы на 5 меньше корня уравненія (3). Пусть это уравненіе будетъ:

$$f_3(x) = d_0x^{n-1} + d_1x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}x + d_{n-1} = 0 \qquad (4)$$

корень этого уравненія будетъ 0,284 и заключается между предѣлами 0 и 1, сближая которые такъ чтобы корень находился между двумя послѣдовательными сотыми, найдемъ 0,2 и 0,3. Слѣдовательно, четвертая цифра корня или его десятыя будетъ 2.

Преобразуемъ снова уравненіе (4) въ другое котораго корни былибы меньше на 0,2 корня уравненія (4). Пусть это уравненіе будетъ:

$$f_4(x) = k_0x^n + k_1x^{n-1} + \ldots + k_{n-1}x + k_n = 0 \qquad (5)$$

корень этого уравненія будетъ 0,084 и заключается между предѣлами 0 и 0,1, сближая которые такъ чтобы корень находился между двумя послѣдовательными сотыми, найдемъ 0,08 и 0,09. Слѣдовательно пятая цыфра корня или его сотыя будетъ 8.

Преобразуемъ снова уравненіе (2) въ другое, котораго корни былибы меньше на 0,08 корня уравненія (5). Пусть это уравненіе будетъ:

$$f_5(x) = l_0x^n + l_1x^{n-1} + \ldots + l_{n-1}x + l_n = 0 \qquad (6)$$

корень этого уравненія будетъ 0,004 и заключается между предѣлами 0 и 0,01, сближая которые такъ, чтобы корень находился между двумя послѣдовательными тысячными, найдемъ 0,004 и 0,005. Слѣдовательно шестая цифра корня или его тысячныя будетъ 4.

Преобразуемъ снова уравненіе (6) въ другое, котораго корни былибы на 0,004 меньше корней уравненія (6). Такъ какъ корень даннаго уравненія (1), какъ мы предположили есть 375,284, а послѣдовательнымъ преобразованіемъ мы его уменьшили на 300, 70, 5, 0, 2, 0,08, такъ что корни уравненій (2), (3), (4), (5), (6) были 75, 284, 5,284, 0,284, 0,084, 0,004,

то корнемъ уравненія, полученнаго преобразованіемъ уравненія (6), уменьшая его корень на 0,004, будетъ нуль. Слѣдовательно послѣдній членъ въ уравненіи:

$$f_0(x) = m_0x^n + m_1x^{n-1} + \ . \ . \ . + m_{n-1}x + m_n = 0 \qquad (7)$$

$m_n = 0$. Откуда и найдемъ, что корень даннаго уравненія (1) есть соизмѣримый и равенъ:

$$x = 375{,}284$$

Если же корень уравненія (1) несоизмѣримый, то предъидущій процессъ дастъ одну за другою, цыфры корня до какого угодно приближенія.

Пояснимъ сказанное примѣрами.

Примѣръ 1. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = 2x^3 - 473x^2 - 234x - 711 = 0 \qquad (8)$$

Вычисленія. Легко найдемъ, что одинъ изъ корней этого уравненія заключается между 200 и 300. Слѣдовательно первая цифра корня или его сотни есть 2. Уменьшимъ корень уравненія (8) на 200. Вотъ процессъ и преобразованное уравненіе (§ 327):

2,	—473,	—234	—711
	400	—14600	—2966800
	—73	—14834	**—2967511**
	400	65400	
	327	**50566**	
	400		
	727		

$$f_1(x) = 2x^3 + 727x^2 + 50566x - 2967511 = 0 \qquad (9)$$

корень этого уравненія заключается между 0 и 100, а сближая какъ сказано выше, найдемъ что онъ заключается между 30 и 40. Слѣдовательно вторая цифра корня или его десятки будетъ 3.

Уменьшимъ корень уравненія (9) на 30. Вотъ процессъ и уравненіе:

2,	727,	50566	—2967511
	60	23610	2225280
	787	74176	**—742231**
	60	25410	
	847	**99586**	
	60		
	907		

а преобразованное уравненіе:

$$f_2(x) = 2x^3 + 907x^2 + 96586x - 742231 = 0 \qquad (10)$$

корень этого уравненія заключается между 0 и 10, а сближая предѣлы какъ сказано выше, найдемъ, что онъ находится между 7 и 8. Слѣдовательно третья цифра корня или его единицы будетъ 7.

Уменьшимъ корень уравненія (10) на 7. Вотъ процессъ:

2	907	99586	—742231
	14	6447	742231
	921	106033	**0**
	14	6545	
	935	**112578**	
	14		
	949		

и преобразованное уравненіе:

$$2x^3 + 949x^2 + 112578x + 0 = 0 \qquad (11)$$

послѣдній членъ равенъ нулю, слѣдовательно корень предъидущаго уравненія (10) есть 7, а даннаго $x = 237$.

Вотъ въ какой формѣ можно написать весь процессъ:

2	—413,	—234	—711
	400	—14600	—2966800
	—73	—14834	**—2967511**
	400	65400	2225280
	327	**50566**	**742231**
	400	23610	742231
	727	74176	**0**
	60	25410	
	787	**99586**	
	60	6447	
	847	106033	
	60	6545	
	907	**112578**	
	14		
	921		
	14		
	935		
	14		
	949		

Примѣръ 2. Найти положительный корень уравненія.

$$f(x) = 2x^3 - 85x^2 - 85x - 87 = 0 \qquad (12)$$

Вычисленіе. Съ помощью вышеизложенныхъ способовъ найдемъ, что корень этого уравненія находится между предѣлами 40 и 50, слѣдовательно, первая цифра корня или его десятокъ будетъ 4.

Преобразуемъ уравненіе (12) въ другое, коего корни были-бы меньше на 40 корней даннаго уравненія (12). Вотъ процессъ:

2.	—85,	—85,	—87
	80	—200	—11400
	—5	—285	**—11487**
	80	3000	
	75	**2715**	
	80		
	155		

и преобразованное уравненіе:

$$2x^3 + 155x^2 + 2715x - 11487 = 0 \qquad (13)$$

корень этого уравненія заключается между 0 и 10, сближая эти предѣлы такъ, чтобы корень находился между двумя послѣдовательными единицами, найдемъ, что онъ находится между 3 и 4. Слѣдовательно, цифра единицъ корня будетъ 3.

Преобразуемъ уравненіе (13) въ другое, котораго корни были-бы меньше корней даннаго 3. Вотъ процессъ:

2.	155,	2715,	—11487
	6	483	9594
	161	3198	**—1893**
	6	501	
	167	**3699**	
	6		
	173		

и преобразованное уравненіе:

$$2x^3 + 173x^2 + 3699x - 1893 = 0 \qquad (14)$$

корень этого уравненія находится между 0 и 1, сближая предѣлы такъ, чтобы корень находился между двумя послѣдовательными десятками, найдемъ, что онъ находится между 0,5 и 0,6.

Преобразуемъ уравненіе (14) въ другое, коего корни были-бы меньше корней уравненія (14) на 0,5. Вотъ процессъ:

2.	173,	3699,	—1893
	1	87	1893
	174	3786	**0**
	1	87,5	
	175	**3873,5**	
	1		
	176		

откуда видимъ, что корень даннаго уравненія есть $x = 43,5$, а преобразованное уравненіе:

$$2x^3 + 176x^2 + 3873,5x + 0 = 0 \qquad (15)$$

Весь процессъ можно написать въ формѣ:

2	—85,	—85,	—87
	80	—200	—11400
	—5	—285	**—11487**
	80	3000	9594
	75	**2715**	**—1893**
	80	483	1893
	155	3197	**0**
	6	501	
	161	**3696**	
	6	87	
	167	3786	
	6	87,5	
	173	**3873,5**	
	1		
	174		
	1		
	175		
	1		
	176		

Примѣръ 3. Найти положительный корень уравненія:

$$4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0 \qquad (16)$$

Вычисленіе. Корень этого уравненія находится между предѣлами 6 и 7, слѣдовательно, цифра его единицъ есть 6.

Преобразуемъ уравненіе (16), уменьшивъ его корни на 6. Это даетъ таблицу:

4,	—13,	—31,	—275
	24	66	210
	11	35	**—65**
	24	210	
	35	**245**	
	24		
	59		

и преобразованное уравненіе:

$$4x^3 + 59x^2 + 245x - 65 = 0 \tag{17}$$

корень этого уравненія находится между 0 и 1, сближая, какъ сказано выше, найдемъ, что онъ находится между 0,2 и 0,3. Слѣдовательно, вторая цифра корня или его десятокъ будетъ 2.

Преобразуемъ уравненіе (17), уменьшая его корни на 0,2. Это даетъ таблицу:

4,	59,	245,	—65
	0,8	11,96	51,392
	59,8	256,96	**—13,608**
	0,8	12,12	
	60,6	**269,08**	
	0,8		
	61,4		

и преобразованное уравненіе:

$$4x^3 + 61{,}4x^2 + 264{,}08x - 13{,}608 = 0 \tag{18}$$

корень этого уравненія заключается между 0,05 и 0,06, слѣдовательно третья цифра корня или его сотыя будетъ 5.

Преобразуемъ уравненіе (18), уменьшивъ его корни на 0,05. Это даетъ таблицу:

4,	61,4,	269,08	—13,608
	0,2	3,08	13,608
	61,6	272,16	**0**
	0,2	3,09	
	61,8	**275,25**	
	0,2		
	62		

и преобразованное уравненіе:

$$4x^3 + 62x^2 + 27525x + 0 = 0$$

Слѣдовательно корень даннаго уравненія есть $x = 6,25$.

Весь процессъ заключается въ таблицѣ:

4,	—13,	—31,	—275
	24	66	210
	11	35	**—65**
	24	210	51,392
	35	**245**	**13,608**
	24	11,96	13,608
	59	256,96	**0**
	0,8	12,12	
	59,8	**269,08**	
	0,8	3,08	
	60,6	272,16	
	0,8	3,09	
	61,4	**275,25**	
	0,2		
	61.6		
	0,2		
	61,8		
	0,2		
	620		

Изъ предъидущихъ примѣровъ видимъ, какъ простъ способъ Горнера въ принципѣ и правиленъ въ практическомъ приложеніи. Неудобство его составляютъ разысканіе, при каждомъ преобразованіи, предѣловъ извѣстнаго свойства и дѣйствія надъ десятичными числами. Ниже увидимъ что оба эти недостатка легко устраняются свойствами самаго способа Горнера слѣдующимъ образомъ.

§ 357. Въ практикѣ легче имѣть дѣло съ цѣлыми числами нежели съ десятичными, которыхъ, въ настоящемъ случаѣ, можно избѣгнуть слѣдующимъ образомъ. Когда десятичная часть корня должна явиться, напримѣръ $0,abc....$, то въ соотвѣтствующемъ преобразованномъ уравненіи надобно помножить корень на 10, какъ показано въ § 49 т. е. умножить въ уравненіи 2-ой коэфиціентъ на 10, 3-ій на 100, 4-ый на 1000 и т. д., такимъ образомъ, корнемъ его не будетъ $0,abc...$, а будетъ $a,bc...$ Послѣ этого надо уменьшить корни уравненія на a. Преобразованное уравненіе будетъ имѣть корнемъ $0,bc...$ Опять умножить корни уравненія на 10 и уменьшить на b, корень преобразованнаго уравненія будетъ $0,c...$ и т. д.

Предъидущая таблица, поступая какъ сказано, сдѣлается:

4,	—13,	—31,	—275
	24	66	210
	11	35	**—65000**
	24	210	51392
	35	**24500**	**—13608000**
	24	1196	13608000
	590	25696	**0**
	8	1212	
	598	**2690800**	
	8	30800	
	606	2721600	
	8	30900	
	6140	**2752500**	
	20		
	6160		
	20		
	6180		
	20		
	6200		

такимъ образомъ, какъ видно избѣгаютъ десятичныхъ чиселъ.

Примѣръ. Найти положительный корень уравненія:

$$20x^3 - 121x^2 - 121x - 141 = 0$$

Одинъ изъ его корней заключается между 7 и 8, слѣдовательно онъ будетъ формы 7,*abc*.... Послѣ уменьшенія корня на 7 и помноженія на 10, преобразованное уравненіе будетъ:

$$20x^3 + 2990x^2 + 112500x - 57000 = 0$$

положительный его корень будетъ *a*,*bc*..., но такъ какъ корень его находится между 0 и 1, то очевидно $a = 0$. Слѣдовательно первая цифра десятичной части корня или его десятыя есть 0. Умножая еще на 10 корень уравненія прежде втораго преобразованія, легко увидимъ что его корень есть 5. Откуда корень даннаго уравненія $x = 7{,}05$.

§ 358. Въ разсматриваемыхъ до сихъ поръ случаяхъ корни данныхъ уравненій были соизмѣримы, и вычисленіе корней по способу Горнера, какъ до сихъ поръ совершалось, т. е. послѣ каждаго преобразованія надобно было отыскивать предѣлы корня такъ, чтобы онъ находился между двумя послѣдовательными сотнями, десятками, единицами, десятыми, сотыми и т. д., что весьма затруднительно и долго. Способъ этотъ не пред-

ставлялъ бы ни какого преимущества предъ другими и въ особенности въ случаѣ несоизмѣримыхъ корней. Но сейчасъ покажемъ, что такого вычисленія предѣловъ въ каждомъ преобразованіи, не требуется, а самъ способъ Горнера даетъ послѣ каждаго преобразованія слѣдующую цифру (а иногда и нѣсколько) корня, начиная со втораго или съ третьяго, а иногда и съ перваго преобразованія. Вотъ какимъ образомъ даются последовательныя цыфры корня. Въ § 353 видѣли, что если a есть число, которое разнится отъ корня уравненія $f(x)$ на весьма малое количество h, то приближенная величина h дается выраженіемъ:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

но когда мы совершаемъ преобразованія по способу Горнера, то въ каждомъ преобразованіи послѣдній членъ есть $f(a)$, а предпослѣдній $f'(a)$, слѣдовательно, послѣ двухъ или трехъ преобразованій, когда отношеніе искомой части корня къ уже полученной, будетъ незначительно, слѣдующая цифра корня, а иногда двѣ и три, получатся, раздѣляя послѣдній членъ преобразованнаго уравненія на предпослѣдній. Возьмемъ пр. 1 § 356. Первая цифра корня есть 2, вторая 3, а третья 7 получается, раздѣляя во второмъ преобразованіи $f_2(230) = -742231$ на $f'(230) = 99586$.

Возьмемъ пр. 2. Третья цифра корня 5 получается, раздѣляя во второмъ преобразованіи, —1893 на 3699.

Въ пр. 3. Первая цифра корня есть 6, вторая 2 получится, раздѣляя въ первомъ преобразованіи —65000 на 24500, третья цифра 5 получится, раздѣляя во второмъ преобразованіи —13608000 на 2690800.

Если-бы, такимъ дѣленіемъ найденная слѣдующая цифра, оказалась больше настоящей, то послѣдній членъ въ слѣдующемъ преобразованіи измѣнитъ знакъ. Это произойдетъ отъ того, что приближенія были меньше корня, а въ этомъ случаѣ оно дѣлается больше. Поэтому надобно уменьшить полученную цифру и опять сдѣлать преобразованіе, если послѣдній членъ въ этомъ преобразованіи не измѣнитъ знака, то цифра будетъ вѣрна, въ противномъ случаѣ ее еще надобно уменьшить. Возьмемъ пр. 1. Корень заключается между 200 и 300. Послѣ перваго преобразованія, дѣленіе —2967511 на 50966 даетъ 50 или 5 для второй цифры корня. Если сдѣлаемъ преобразованіе, уменьшая корень на 50, то послѣдній членъ будетъ $f(250) = 1628289$ положительный, т. е. то число 250 больше корня, слѣдовательно надобно цифру корня уменьшить. Возьмемъ 4 и сдѣлаемъ преобразованіе, уменьшая корень на 40. Это дастъ $f(240) = 346329$, число положительное, слѣдовательно надобно еще уменьшить

Примѣръ 2. Возьмемъ уравненіе Остроградскаго:

$$x^3 + 2x - 11 = 0$$

Вычисленіе. Корень этого уравненія находится между 1 и 2. Слѣдующая таблица даетъ корень уравненія $x = 1{,}9262706$, вѣрно до 7-й десятичной цифры. Вторая цифра 9, составивъ первое преобразованное уравненіе уменьшеніемъ корней на:

$$x^3 + 30x^2 + 500x - 8060 = 0$$

коего корень, какъ легко видѣть, находится между 9 и 10:

1,	0,	2,	—11,
	1	1	3
	1	3	**—8000**
	1	2	7659
	2	**500**	**—341000**
	1	351	258888
	30	851	**—82112000**
	9	432	78562776
	39	**128300**	**—3549224000**
	9	1144	2625916728
	48	129444	**—923207272**
	9	1148	
	570	**13059200**	
	2	34596	
	572	13093796	
	2	34632	
	574	**1312842800**	
	2	115564	
	5760	1312958364	
	6	115568	
	5766	**1313073932**	
	6		
	5772		
	6		
	57780		
	2		
	57782		
	2		
	57784		
	2		
	57786		

Какъ видимъ способъ Гарнера въ практикѣ простъ и однообразенъ, легко получаются одна за другою цифры корня. Если требуется большое приближеніе, то послѣ нѣсколькихъ преобразованій, которыя даетъ нѣсколько десятичныхъ цифръ корня, вычисляютъ слѣдующія десятичныя цифры сокращеннымъ способомъ, на которомъ мы не остановимся.

Примѣръ 1. Найти положительный корень уравненія:

$$x^3 - 6x - 13 = 0$$

Отвѣтъ:

$$x = 3{,}176814393$$

Примѣръ 2. Найти положительный корень уравненія:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

вѣрно до 9 или 10 десятичной цифры?

Отвѣтъ: $x = 2{,}0945514845$.

Примѣръ 3. Найти кубическій корень изъ:

673373097125

Отвѣтъ: $x = 8765$. Это значитъ вычислить корень уравненія:

$$x^3 - 673373097125 = 0$$

§ 359. *Способъ Лагранжа.* Лагранжъ далъ способъ вычислять корни по приближенію, основанный на свойствахъ непрерывныхъ дробей. Онъ практически уступаетъ способу Горнера.

Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = 0$$

выдѣлимъ корень такъ, чтобы онъ находился между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a и $a+1$. Подставимъ въ уравненіе $x = a + \frac{1}{y}$ преобразованное уравненіе $f_1(y) = 0$ будетъ имѣть одинъ корень, который выдѣлимъ такъ, чтобы онъ находился между двумя послѣдовательными цѣлыми числами b и $b+1$. Подставимъ въ уравненіе $y = b + \frac{1}{z}$, преобразованное уравненіе $f_2(z) = 0$ будетъ имѣть корень, который выдѣлимъ такъ, чтобы онъ находился между двумя послѣдовательными числами c и $c+1$. Продолжая подобный процессъ найдемъ приближенно корень въ видѣ непрерывной дроби:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{e + \ldots}}}$$

Примѣръ 1. Найти корень уравненія:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

корень этого уравненія находится между числами 2 и 3. Положимъ:

$$x = 2 + \frac{1}{y}\cdot$$

и подставимъ въ уравненіе, то найдемъ:

$$y^3 - 10y^2 - by - 1 = 0$$

Корень этого уравненія находится между 10 и 11. Положимъ:

$$y = 10 + \frac{1}{z}$$

подставимъ и преобразуемъ, то найдемъ:

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$$

корень этого уравненія находится между 1 и 2. Положимъ:

$$z = 1 + \frac{1}{v}$$

подставимъ и преобразуемъ, то найдемъ:

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$

корень этого находится между 1 2. Положимъ:

$$u = 1 + \frac{1}{w}$$

Откуда найдемъ, что:

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Примѣръ 2. Найти положительный корень уравненія:

$$x^3 - 6x - 18 = 0$$

въ видѣ непрерывной дроби.

Отвѣтъ:

$$x = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

таковъ вкратцѣ способъ Лагранжа.

Этимъ и закончимъ настоящую часть нашего труда.

236. – призначная – [illegible] (280,
253. – [illegible] – [illegible]
25[illegible] – [illegible]
285. – [illegible] інвітаційні [illegible]
287. – [illegible]

